

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) muncul dalam bidang sains dan teknik karena sebagian besar proses fisika nyata dikendalikan oleh PDP. Dalam banyak kasus, pendekatan dengan penyederhanaan dilakukan untuk mereduksi PDP menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau menjadi persamaan aljabar. Tetapi seiring berjalannya waktu kebutuhan akan pemodelan proses fisika yang lebih akurat, sehingga para ilmuwan dan insinyur dituntut untuk menyelesaikan PDP tanpa harus melakukan pendekatan penyederhanaan terlebih dahulu.

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas dan turunan parsial dari fungsi tersebut terhadap variabel bebas tersebut. Solusi dari PDP adalah suatu fungsi tertentu seperti $f(x, y)$ atau $f(x, t)$ yang memenuhi domain yang diminati seperti $D(x, y)$ atau $D(x, t)$ serta memenuhi kondisi awal dan/atau kondisi batas yang ditentukan pada batas domain tersebut. Namun, dalam sebagian besar permasalahan sains dan teknik, solusi PDP diperoleh menggunakan metode numerik.

2.1.1 Istilah dalam Persamaan Diferensial Parsial

Beberapa istilah penting dalam PDP diantaranya sebagai berikut :

A. Variabel dalam PDP

1. Variabel Bebas

Variabel bebas biasanya berupa koordinat ruang (x, y, z) atau koordinat ruang dan waktu (x, y, z, t) ,

2. Variabel Terikat

Variabel terikat bergantung terhadap masalah fisika yang dimodelkan atau fungsi yang tidak diketahui dari variabel tersebut dan biasanya bergantung pada variabel bebas.

B. Orde PDP

Orde suatu persamaan diferensial parsial ditentukan oleh turunan dengan orde tertinggi yang muncul dalam persamaan yang diberikan [7]. Dalam PDP mempunyai beberapa orde diantaranya sebagai berikut [8]:

1. PDP Orde Pertama

Contoh PDP orde pertama dalam teori fisika seperti transportasi yaitu:

$$f_x + f_y = 0$$

2. PDP Orde Kedua

Contoh PDP orde kedua dalam teori fisika seperti persamaan Laplace yaitu:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

3. PDP Orde Ketiga

Contoh PDP orde ketiga dalam teori fisika seperti gelombang dispersif yaitu:

$$f_t + f f_x + f_{xxx} = 0$$

4. PDP Orde Keempat

Contoh PDP orde keempat dalam teori fisika seperti batang bergetar yaitu:

$$f_{tt} + f_{xxxx} = 0$$

Semua persamaan di atas memiliki dua variabel bebas yang ditulis dengan x dan y atau x dan t .

C. Linearitas PDP

Linearitas persamaan diferensial parsial yaitu disebut linear dan nonlinear, yang dijabarkan sebagai berikut:

1. PDP Linear

PDP linear adalah PDP dimana semua turunan parsial muncul dalam bentuk linear dan tidak ada koefisien yang bergantung pada variabel terikat. Contohnya seperti pada PDP orde pertama hingga PDP orde ketiga.

2. PDP Nonlinear

PDP nonlinear adalah PDP dimana semua turunan parsial muncul dalam bentuk nonlinear dan koefisien bergantung pada variabel terikat. Contohnya seperti pada PDP orde keempat.

2.1.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Ada tiga klasifikasi dalam PDP yaitu parabolik, hiperbolik, dan eliptik yang dijelaskan sebagai berikut :

A. PDP Parabolik

Berbagai jenis PDP sering ditemukan dalam rekayasa dan ilmu pengetahuan, dan yang dikenal dari PDP parabolik adalah persamaan difusi dan persamaan konveksi-difusi.

1. Persamaan Difusi

Persamaan difusi dapat digunakan untuk difusi massa, difusi panas, dan sebagainya. Bentuk umumnya yaitu :

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

2. Persamaan Konveksi-Difusi

Persamaan konveksi-difusi dapat digunakan untuk masalah yang melibatkan konveksi dan difusi secara bersamaan, seperti mekanika fluida dan perindahan panas. Bentuk umumnya yaitu :

$$f_t + uf_x = \alpha f_{xx}$$

Dari kedua bentuk umum di atas α adalah koefisien difusitas dan u adalah kecepatan konveksi.

B. PDP Hiperbolik

Banyak PDP hiperbolik yang sering dijumpai dalam bidang rekayasa dan sains. Contoh klasik yang lebih dikenal dalam PDP hiperbolik adalah persamaan gelombang dan persamaan konveksi.

1. Persamaan Gelombang

Persamaan gelombang dapat merambat ke dua arah, yaitu dengan kecepatan $+c$ dan $-c$. Bentuk umumnya yaitu :

$$f_{tt} = c^2 f_{xx}$$

c adalah kecepatan perambatan gelombang. Persamaan ini dapat digunakan untuk masalah sistem gataran seperti bidang akustik, senar bergatar dan sebagainya.

2. Persamaan Konveksi

Persamaan konveksi memodelkan gelombang yang bergerak hanya dalam satu arah, yaitu arah kecepatan u . Bentuk umumnya yaitu :

$$f_t + uf_x = 0.$$

Persamaan konveksi menggambarkan fitur dasar dari gerakan gelombang yang lebih kompleks, dan karakteristik solusi numerik dari persamaan ini juga berlaku untuk persamaan gelombang. Persamaan ini dapat diterapkan pada masalah mekanika fluida, perpindahan panas, dan sebagainya.

C. PDP Eliptik

Banyak PDP eliptik muncul dalam rekayasa dan ilmu pengetahuan, PDP eliptik memiliki beberapa persamaan dan yang paling umum digunakan adalah persamaan Laplace dan persamaan Poisson, sebagai berikut :

1. Persamaan Laplace

Persamaan Laplace bisa digunakan untuk masalah aliran fluida inviscid dan incompressible, difusi massa, difusi panas, elektrostatika, dan sebagainya. Bentuk umumnya yaitu:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Persamaan ini mengatur potensial dari banyak besaran fisik, dimana laju aliran suatu properti sebanding dengan gradien potensial.

2. Persamaan Poisson

Persamaan Poisson bisa dikatakan persamaan Laplace nonhomogen. Bentuk umumnya yaitu:

$$f_{xx} + f_{yy} = F(x, y).$$

Dimana $F(x, y)$ adalah suku nonhomogen yang diketahui. Keberaddan suku nonhomogen ini dapat memperumit solusi eksak

dari persamaan poisson, tetapi tidak terlalu rumit untuk solusi numerik [7].

2.2 Gelombang Air Dangkal

Persamaan gelombang air dangkal atau *shallow water equation* (SWE) merupakan sistem persamaan diferensial parsial (PDP) yang mendeskripsikan masalah aliran fluida. Persamaan ini berlaku untuk fluida homogen yang memiliki massa jenis konstan, bersifat *inviscid* (tidak kental), *incompressible* (tidak dapat dimampatkan), dan mengalir secara *irrotational*. Dinamika fenomena gelombang air dapat diketahui melalui penyelesaian sistem PDP. Solusi yang diperoleh berguna untuk memprediksi arah aliran air, kecepatan aliran air, dan tinggi gelombang [6].

Ada beberapa teori yang menggambarkan bentuk gelombang sederhana dari pendekatan alam salah satunya adalah teori gelombang linier. Menurut teori gelombang linier, gelombang berdasarkan kedalamannya dibagi menjadi tiga yaitu *deep water* (gelombang air dalam), *transitional water* (gelombang daerah transisi), dan *shallow water equation* (gelombang air dangkal).

Klasifikasi dari gelombang air tersebut ditunjukkan dalam Tabel 2.1 yaitu :

Tabel 2.1 Klasifikasi Gelombang Menurut Teori Gelombang Linear

Klasifikasi	$\frac{h}{L}$
Gelombang Air Dalam	$> 1/2$
Gelombang Daerah Transisi	$1/25 \text{ s/d } 1/2$
Gelombang Air Dangkal	$< 1/25$

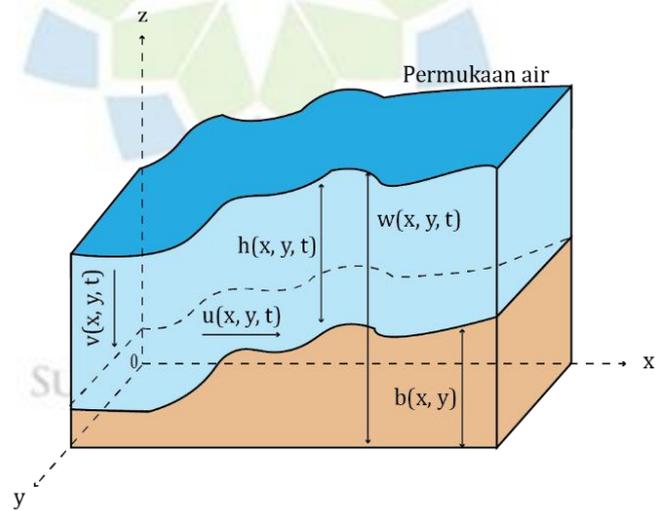
Berdasarkan Tabel 2.1, h adalah ketebalan air dan L adalah panjang gelombang. Sehingga gelombang air dangkal itu gelombang yang memiliki nilai $< 1/25$ menunjukkan ketebalan air lebih kecil dibandingkan panjang gelombangnya [9].

Persamaan gelombang air dangkal telah digunakan untuk mensimulasikan berbagai masalah gelombang dengan penyesuaian yang berbeda. Namun, Masalah yang ada tidak selalu dapat diselesaikan menggunakan metode analitik apalagi persamaan diferensial parsial nonlinear yang biasanya lebih mudah diselesaikan

dengan menggunakan metode numerik. Persamaan gelombang air dangkal memiliki biaya komputasi yang jauh lebih kecil, dan lebih cepat dihitung karena persamaannya relatif sederhana. Selain itu, SWE lebih *fleksibel* sehingga bisa di modifikasi dalam mempelajari berbagai pengaturan lebar saluran dan posisi hambatan [5].

Banyak fenomena alam yang dapat diselesaikan menggunakan persamaan gelombang air dangkal seperti bendungan bobol (*dam break*), aliran di saluran terbuka seperti sungai, pemodelan tsunami, banjir, dan banjir bandang yang disebabkan longsor. Adapun beberapa fenomena alam dengan geometri yang kompleks memberikan tantangan tersendiri bagi beberapa peneliti [2].

Persamaan gelombang air dangkal terdiri dari persamaan konservasi massa dan konservasi momentum. Berikut notasi-notasi dasar yang digunakan pada persamaan gelombang air dangkal 2D bisa dilihat pada Gambar 2.1 .



Gambar 2.1 Tampilan Gelombang Air Dangkal 2D

Berdasarkan Gambar 2.1 notasi yang digunakan antara lain $h(x, y, t)$ adalah ketebalan air arah z, $b(x, y)$ adalah topografi dasar, $u(x, y, t)$ adalah kecepatan aliran air arah x, dan $v(x, y, t)$ adalah kecepatan aliran air arah y. Sedangkan, $w(x, y, t)$ adalah simpangan permukaan air dari keadaan setimbang yang diberikan sebagai berikut :

$$w = h + b.$$

Dalam persamaan air dangkal 2D terdapat dua variabel ruang yaitu x dan y serta variabel waktu t sehingga dapat dilihat dari dua arah, sedangkan 1D hanya bergantung pada variabel x sebagai fungsi variabel ruang dan t sebagai fungsi variabel waktu sehingga hanya dapat dilihat dari satu arah. Berikut ini akan diuraikan penurunan persamaan gelombang air dangkal 1D dari hukum konservasi [10].

2.2.1 Hukum Konservasi Massa

Hukum konservasi massa menyatakan laju perubahan massa fluida di suatu ruang pada selang waktu t harus sama dengan perubahan laju massa yang masuk dan laju massa yang keluar.

Misalkan ρ massa jenis fluida, dengan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

dimana m adalah massa fluida dan V adalah volume. Maka, persamaan massa fluida adalah sebagai berikut:

$$m = \rho \cdot V$$

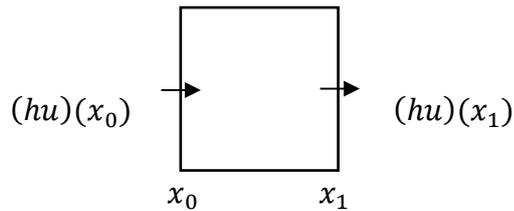
atau dalam kasus ini massa fluida dituliskan sebagai berikut:

$$m_{total} = \rho \int_{x_0}^{x_1} h(x, t) dx$$

dimana massa fluida adalah perkalian antara massa jenis fluida ρ dan ketebalan fluida $h(x, t)$, sehingga diperoleh massa total pada air di setiap volume kontrol (x_0, x_1) pada waktu t adalah sebagai berikut :

$$m_{total} = \int_{x_0}^{x_1} \rho h(x, t) dx \quad (2.1)$$

dimana ρ massa jenis fluida diasumsikan konstan, seiring waktu massa total fluida akan berubah sesuai aliran masuk dan aliran keluar fluida dari sel, seperti yang terlihat pada Gambar 2.2 berikut ini :



Gambar 2.2 Aliran Masuk dan Aliran Keluar dari Sel.

Sedangkan, laju aliran massa fluida yaitu massa fluida dikalikan dengan kecepatan rata-rata fluida u untuk variabel x . Maka, perubahan volume air dari waktu t_0 ke t_1 dinyatakan sebagai berikut:

$$V(t_1) - V(t_0) = \text{Fluks masuk} - \text{Fluks keluar}$$

dalam bentuk eksplisit dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} h(x, t_1) dx \\ = \int_{x_0}^{x_1} h(x, t_0) dx + \int_{t_0}^{t_1} h(x_0, t)u(x_0, t) dt \\ - \int_{t_0}^{t_1} h(x_1, t)u(x_1, t) dt. \end{aligned}$$

dari persamaan di atas menyatakan bahwa perubahan volume air dalam sel sama dengan selisih aliran masuk dan keluar. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus (TDK) seperti berikut ini:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Penerapan TDK dalam waktu t pada bagian kiri persamaan di atas yaitu:

$$\int_{x_0}^{x_1} h(x, t_1) dx - \int_{x_0}^{x_1} h(x, t_0) dx$$

menjadi bentuk seperti berikut :

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} h_t dx dt$$

dan, penerapan TDK dalam x pada bagian kanan berikut ini:

$$\int_{t_0}^{t_1} h(x_0, t)u(x_0, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} h(x_1, t)u(x_1, t) dt$$

diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (hu)_x dx dt.$$

Maka, dalam variabel t dan x persamaan di atas menjadi sebagai berikut :

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} h_t dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (hu)_x dx dt = 0, \quad (2.2)$$

karena perubahan total massa fluida untuk sel dalam ruang dan waktu dengan massa jenis ρ bernilai konstan, maka dari persamaan (2.2) diperoleh bentuk persamaan konservasi massa sebagai berikut :

$$h_t + (hu)_x = 0, \quad (2.3)$$

dari persamaan (2.3) dinyatakan bahwa nilai 0 menunjukkan keseimbangan, yaitu perubahan massa dalam suatu wilayah sama dengan massa yang masuk dan keluar, yang berarti massa fluida tetap terjaga sepanjang waktu tidak ada massa yang diciptakan atau dimusnahkan tetapi hanya berpindah melalui fluks [10].

2.2.2 Hukum Konservasi Momentum

Konservasi momentum didasarkan pada hukum Newton II yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum terhadap waktu dari suatu sistem sama dengan total gaya yang bekerja pada fluida. Gaya yang dimaksud adalah gaya tekanan. Maka berdasarkan pernyataan tersebut hukum Newton II ditulis secara matematis sebagai berikut :

$$F = \frac{dp}{dt}$$

dimana F adalah gaya (Newton) dan p adalah momentum ($kg.m/s$), atau didefinisikan bahwa gaya F yang diberikan pada suatu benda sama dengan laju perubahan momentum p terhadap waktu t .

Momentum total dari perpindahan air yang bergerak pada volume kontrol dari x_0 ke x_1 pada waktu t yaitu sebagai berikut :

$$p(t) = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho h(x, t) u(x, t) dx.$$

Ada beberapa gaya yang diperhitungkan, seperti dengan mengasumsikan tekanan hidrostatis yaitu $p = \rho gh$ dan ρ dianggap bernilai konstan, maka gaya akibat tekanan hidrostatis pada x_0 dan x_1 di atas kedalaman air pada waktu t yaitu sebagai berikut [11] :

$$F_1(t) = \frac{1}{2}gh^2(x_0(t), t),$$

dan

$$F_2(t) = -\frac{1}{2}gh^2(x_1(t), t).$$

Jika dituliskan dalam bentuk gaya akibat perbedaan tekanan yaitu sebagai berikut:

$$p(x_0, t) - p(x_1, t) = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}(gh^2)_x dx.$$

Sedangkan gaya gravitasi $F = mg$ adalah sebanding dengan massa fluida, atau secara bentuk eksplisit yaitu sebagai berikut [12] :

$$F_3 = \int_{x_0}^{x_1} b_x gh dx.$$

Oleh karena itu, gaya total yang sudah diperhitungkan di atas volume kontrol yaitu sebagai berikut :

$$F = \frac{1}{2}gh^2(x_0(t), t) - \frac{1}{2}gh^2(x_1(t), t) - \int_{x_0}^{x_1} b_x gh dx. \quad (2.4)$$

Turunan pertama p terhadap t adalah sebagai berikut :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} h(x, t)u(x, t)dx$$

dengan menggunakan aturan Leibniz seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt \\ = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt + f((v(x), x)) \frac{d}{dx} v(x) - f((u(x), x)) \frac{d}{dx} u(x), \end{aligned}$$

turunan hasil integral persamaan di atas menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) u(x, t) dx + h(x_1(t), t) u^2(x_1(t), t) \\ - h(x_0(t), t) u^2(x_0(t), t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Maka, menurut hukum Newton II tentang gerak, hasil dari persamaan (2.4) sama dengan persamaan (2.5). Sedangkan dalam variabel t dan x dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} (hu)_t dx dt + \int_{t_0}^{t_1} h(x_1(t), t) u^2(x_1(t), t) dt \\ - \int_{t_0}^{t_1} h(x_0(t), t) u^2(x_0(t), t) dt \\ = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} gh^2(x_0(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} gh^2(x_1(t), t) dt \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} b_x gh dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.6) diperoleh persamaan konservasi momentum yang dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = - ghb_x \quad (2.7)$$

dari persamaan di atas sesuai dengan pernyataan diawal bahwa konservasi momentum didasarkan pada hukum Newton II yang menyatakan bahwa laju perubahan momentum terhadap waktu dari suatu sistem sama dengan total gaya yang bekerja pada fluida, maka dalam persamaan (2.8) maksud dari $-ghb_x$ adalah adanya gaya eksternal seperti gaya pada topografi bawah dan gaya gravitasi yang bekerja pada fluida, sedangkan tanda $-$ berarti untuk menyesuaikan arah gaya dengan sistem koordinat. Adapun nilai dari g adalah 9.81 dengan satuan m/s^2 [11].

2.2.3 Persamaan Gelombang Air Dangkal

Persamaan gelombang air dangkal 1D dibentuk dari persamaan diferensial parsial (2.3) dan (2.7) yang didasarkan pada hukum konservasi massa dan hukum konservasi momentum, dituliskan sebagai berikut :

$$h_t + (hu)_x = 0. \quad (2.9)$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_x = -ghb_x \quad (2.10)$$

Sedangkan dalam bentuk vektor, persamaan gelombang air dangkal dapat ditulis sebagai berikut :

$$q_t + f(q)_x = S(q), \quad (2.11)$$

persamaan (2.11) jika dijabarkan sebagai berikut :

$$q = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t, f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x, \text{ dan } S = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

dimana q adalah kuantitas, $f(q)$ adalah flux dan S adalah suku sumber [13].

2.3 Metode Numerik

Pemodelan matematika digunakan untuk membedakan suatu model dalam persamaan diferensial parsial (PDP) contohnya memodelkan air dangkal. Masalah dalam PDP tidak selalu dapat di selesaikan menggunakan metode analitik apalagi PDP nonlinear yang biasanya diselesaikan menggunakan metode numerik.

Metode analitik adalah metode untuk menyelesaikan model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku, metode ini memberikan solusi sesungguhnya (*exact solution*), yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol atau menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Tapi karena persoalan dalam dunia nyata seringkali melibatkan model matematika dalam bentuk yang rumit adakalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik, akibatnya nilai praktis penyelesaian metode analitik menjadi terbatas. Sehingga untuk menyelesaikannya bisa menggunakan metode numerik.

Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Metode ini memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sesungguhnya

sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approxomation*) atau solusi pendekatan. selain itu, berbeda dengan metode analitik metode ini bisa digunakan untuk menyelesaikan persoalan matematika sederhana ataupun rumit. Ada enam tahap yang dilakukan dengan metode numerik dalam pemecahan persoalan dunia nyata yaitu pemodelan, penyederhanaan model, formulasi numerik, pemrograman, operasional, dan evaluasi.

Seiring berjalannya waktu metode numerik terus berkembang dan tidak luput dari peran besar komputer, hal ini karena dengan menggunakan komputer memudahkan untuk dimengerti karena perhitungan dalam metode numerik berupa operasi aritmetika yang jumlah operasinya sangat banyak dan berulang, sehingga perhitungan secara manual sering menjemukan dan dapat terjadi kesalahan. Penggunaan komputer dalam metode numerik antara lain untuk memprogram, adapun program aplikasi yang bisa digunakan salah satunya yaitu *software* Octave [14].

Software Octave atau GNU Octave adalah perangkat lunak gratis (*freeware*) dengan bahasa pemrograman tingkat tinggi untuk visualisasi data dan komputasi numerik. Digunakan dengan berbagai sistem operasi seperti GNU/Linux, Mac OS, dan Microsoft Windows. File instalasi Octave dapat diunduh melalui situs <https://www.gnu.org/software/octave/>, situs tersebut juga menyediakan informasi dan dokumentasi terkait dengan Octave dan menyebutkan bahwa Octave kompatibel langsung dengan banyak skrip Matlab. Adapun beberapa manfaat dari penggunaan Octave antara lain perhitungan matematika, komputasi numerik, visualisasi data secara 1D/2D/3D, dan pembuatan grafik [15].

Dari penjelasan di atas untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial seperti memodelkan air dangkal nonlinear tidak selalu bisa diselesaikan dengan solusi analitik yang hanya tersedia untuk model matematika sederhana dan sangat terbatas, maka digunakan metode numerik untuk memperoleh solusi persamaan gelombang air dangkal. Penelitian yang luas mengenai model numerik untuk solusi persamaan SWE telah dikembangkan seperti metode beda hingga, metode elemen hingga, dan metode volume hingga.

2.3.1 Metode Beda Hingga

Metode Beda Hingga atau *Finite Difference Method* (FDM) digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik itu persamaan diferensial biasa (PDB)/*Ordinary Differential Equation* (ODE) ataupun persamaan diferensial parsial (PDP)/*Partial Differential Equation* (PDE), dimana semua turunan yang ada digantikan oleh aproksimasi beda hingga/*finite difference approximation* (FDA) dan dapat diselesaikan dengan aritmatika sederhana. Aproksimasi beda hingga merupakan suatu metode untuk mengaproksimasi turunan dengan suatu rasio beda, implementasinya akan memberikan persamaan beda, dan orde dari skema beda merupakan orde dari diskritisasi error lokal [7]. Dengan metode beda hingga solusi numerik untuk persamaan pengatur yang didiskretisasi dapat dihitung secara eksplisit, sehingga metode ini memerlukan sumber daya komputasi yang lebih sedikit dibandingkan metode yang melibatkan solusi implisit [4]. Keunggulan metode ini mudah dalam komputasi namun tidak dalam fleksibilitas geometri domain, karena untuk geometri domain yang kompleks penerapan metode beda hingga dirasa kurang baik karena grid perhitungan pada umumnya berbentuk kotak teratur. Adapun beberapa peneliti yang menerapkan metode beda hingga ini yaitu Fennema dan Chaudry (1990), Glaister (1991), Alcrudo dan Navarro (1994), serta Jha dan Akiyama menerapkan metode ini dalam kasus runtuhnya bendungan [16].

Konsep penting yang harus diperhatikan dalam metode beda hingga, yaitu sebagai berikut :

1. Kekonsistenan

Kekonsistenan mengukur sejauh mana hubungan antara persamaan beda hingga/*finite difference equation* (FDE) mendekati persamaan diferensial saat jarak grid mendekati 0.

2. Kestabilan

Kestabilan memastikan solusi numerik (hampiran) dari persamaan beda tidak divergen atau dapat menghasilkan solusi terbatas, hal ini bisa dicek dengan metode Von-Neumann.

3. Kekonvergenan

Kekonvergenan memastikan apakah solusi hampiran mendekati solusi eksak.

Ada tiga klasifikasi dalam PDP yaitu parabolik, hiperbolik, dan eliptik adapun beberapa skema metode beda hingga yang bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah PDP atau sebagai solusi untuk PDP yaitu dijelaskan sebagai berikut :

A. Skema Metode Beda Hingga untuk Solusi PDP Parabolik

1. Metode Forward Time Centered Space (FTCS)

Metode FTCS memberikan pendekatan yang cukup baik terhadap solusi persamaan difusi dan bisa digunakan untuk menyelesaikan masalah PDP nonlinear dengan cara sederhana yaitu dengan mengevaluasi koefisien nonlinear pada titik dasar (i,n) .

2. Metode Richardson (Leapfrog)

Richardson mengembangkan metode ini tahun 1910 dan mengusulkan pendekatan persamaan difusi menggunakan pendekatan beda hingga terpusat orde kedua pada turunan waktu. Metode ini tidak stabil pada persamaan difusi sehingga tidak bisa digunakan untuk PDP parabolik dan hanya bisa digunakan pada persamaan diferensial parabolik.

3. Metode Backward Time Centered Space (BTCS)

Metode BTCS untuk menyelesaikan persamaan difusi bersifat konsisten, akurat, stabil dan penggunaan komputasi lebih sedikit. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah PDP nonlinear dan masalah multidimensi tapi cara penyelesaiannya lebih rumit.

4. Metode Crank-Nicolson

Metode Crank-Nicolson dikembangkan tahun 1947 yang mengusulkan pendekatan turunan parsial menggunakan pendekatan beda pusat orde kedua pada waktu yang diperoleh dengan mengkombinasikan dengan deret Taylor, sedangkan secara kegunaan sama dengan metode BTCS.

B. Skema Metode Beda Hingga untuk Solusi PDP Hiperbolik

PDP hiperbolik dalam persamaan konveksi, yaitu sebagai berikut

1. Metode Forward Time Centered Space (FTCS)

Metode FTCS merupakan metode beda hingga yang paling sederhana untuk menyelesaikan PDP hiperbolik, tapi ketika diterapkan pada persamaan konveksi metode ini terbukti tidak stabil tanpa syarat atau solusi numerik tidak konvergen.

2. Metode Lax

Metode Lax dikembangkan tahun 1954 digunakan untuk mengatasi ketidakstabilan pada metode FTCS dan memperkenalkan inkonsistensi numerik yang menyebabkan difusi numerik. Artinya metode ini masih kurang akurat.

3. Metode Lax-Wendroff Satu Langkah

Metode Lax-Wendroff satu langkah adalah metode yang melibatkan perhitungan solusi dalam satu langkah waktu yang dikembangkan tahun 1960. Metode ini akurat dan efisien untuk persamaan konveksi linear tapi tidak bisa diterapkan pada PDP nonlinear karena rumit.

4. Metode Lax-Wendroff Dua Langkah

Metode Lax-Wendroff dua langkah dikembangkan oleh Richtmyer pada tahun 1963 dan metode ini dikenal dengan metode Richtmyer. Metode Richtmyer jauh lebih sederhana dari pada Metode Lax-Wendroff satu langkah untuk mengatasi PDP nonlinear dan sistem PDP.

5. Metode MacCormack

Metode MacCormack dikembangkan tahun 1969 dan mengusulkan metode prediktor-korektor tipe Lax-Wendroff. Metode ini dapat digunakan untuk PDP linear dan nonlinear maka metode MacCormack sangat banyak digunakan dalam berbagai aplikasi numerik.

6. Metode Upwind

Metode upwind adalah metode yang memperhitungkan arah penyebaran informasi. Pada bagian ini, terdapat dua metode yaitu metode upwind orde pertama dan metode upwind orde kedua.

PDP hiperbolik dalam persamaan gelombang, yaitu sebagai berikut :

1. Metode Lax-Wendroff Satu Langkah

Metode Lax-Wendroff satu langkah ini akurat dan efisien untuk menyelesaikan persamaan gelombang linear tapi tidak bisa diterapkan pada PDP nonlinear karena rumit.

2. Metode Flux-Vector-Splitting

Metode Flux-Vector-Splitting ini mengidentifikasi jalur propagasi yang diinginkan dalam sistem PDP Hiperbolik.

C. Skema Metode Beda Hingga untuk Solusi PDP Eliptik

Metode iteratif digunakan untuk mengatasi masalah komputasi yang sulit dan memori yang sangat besar seiring bertambahnya jumlah titik grid.

Beberapa metode iteratif yang dapat digunakan yaitu

1. Gaus-Saidel, dan Successive Over Relaxation (SOR), adapun metode SOR adalah metode yang direkomendasikan dan paling umum digunakan [7].

2.3.2 Metode Elemen Hingga

Metode Elemen Hingga atau *Finite Element Method* (FEM) adalah metode untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial. Metode ini dapat menghasilkan solusi pendekatan dalam bentuk fungsi pada setiap elemen sehingga fungsi tersebut saling kontinu. Keunggulan dari metode ini yaitu bisa digunakan untuk geometri domain yang kompleks karena grid perhitungan tidak hanya terbatas pada bentuk kotak, namun kekurangan dari metode ini memerlukan memori perhitungan yang besar. Metode ini dikembangkan oleh Berger dan Stockstill (1995) untuk kasus runtuhnya bendungan [16].

Metode elemen hingga memiliki beberapa pendekatan seperti metode Rayleigh-Ritz, dan metode Galerkin. kedua metode ini dapat memperkirakan solusi eksak dengan solusi perkiraan, yang merupakan kombinasi linear dari fungsi uji tertentu atau berupa polinomial. Fungsi uji adalah fungsi yang saling bebas secara linear dan memenuhi kondisi batas, sedangkan koefisien yang tidak diketahui dalam fungsi uji ditentukan dengan solusi tertentu. Sedangkan solusi untuk masing-masing elemen dirangkai untuk mendapatkan solusi global, maka dalam penerapan ini disebut pendekatan metode elemen hingga. Selain itu metode elemen hingga dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial seperti persamaan Poisson dua dimensi, menyelesaikan persamaan diferensial parsial eliptik seperti persamaan difusi satu dimensi dan dapat menyelesaikan persamaan diferensial parsial tak tetap. Penjelasan metode elemen hingga secara lebih detail terdapat dalam buku karya Rao (1982), Reddy (1993), Strang (1973), serta Zienkiewicz dan Taylor (1989 dan 1991).

A. Metode Rayleigh-Ritz

Metode Rayleigh-Ritz didasarkan pada kalkulus variasi yang bertujuan untuk menentukan ekstremum (minimum atau maksimum) dari fungsional yang bergantung pada fungsi tidak dikenal lainnya.

Langkah-langkah dalam penyelesaian metode Rayleigh-Ritz adalah sebagai berikut :

1. Tentukan fungsional yang menghasilkan persamaan diferensial nilai batas ketika persamaan Euler diterapkan.
2. Asumsikan bentuk fungsi dari pendekatan solusi, kemudian pilih bentuk fungsi uji dan pastikan fungsi tersebut saling bebas linear dan memenuhi kondisi batas.
3. Substitusikan solusi pendekatan ke dalam fungsional untuk memperoleh nilai turunan parsial.
4. Dari turunan parsial yang didapatkan lalu ubah menjadi nol.
5. Selesaikan persamaan untuk mendapatkan nilai koefisien.

B. Metode Galerkin

Metode Galerkin adalah salah satu pendekatan residual pada pengintegralan residul yang dikalikan dengan fungsi pembobot kemudian menjadikan integral residual berbobot bernilai nol untuk menghasilkan persamaan koefisien dari fungsi uji. Keunggulan metode ini adalah pemilihan fungsi pembobot yang sama dengan fungsi uji sehingga menghasilkan akurasi yang baik.

Langkah-langkah dalam metode Galerkin yaitu sebagai berikut :

1. Tentukan persamaan diferensial yang akan diselesaikan.
2. Asumsikan bentuk fungsi dari pendekatan solusi, lalu pilih bentuk fungsi uji dan pastikan fungsi tersebut saling bebas linear dan memenuhi kondisi batas.
3. Substitusikan solusi pendekatan pada persamaan ke dalam persamaan diferensial dan definisikan residual.
4. Pilih fungsi pembobot.
5. Ubah integral dari residual berbobot menjadi nol.
6. Integrasikan persamaan dan selesaikan sistem integral residual berbobot untuk menentukan nilai koefisien [7].

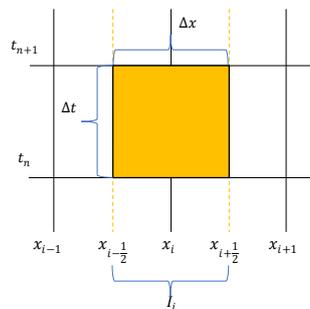
2.3.3 Metode Volume Hingga

Metode Volume Hingga atau *Finite Volume Method* (FVM) adalah suatu konsep baru dalam komputasi numerik yang digunakan dalam beberapa waktu terakhir untuk menyelesaikan persamaan air dangkal nonlinear karena menghasilkan akurasi yang baik, perhitungan relatif sederhana, bisa untuk geometri domain yang kompleks, dan terutama untuk masalah yang melibatkan kejutan (*shock*). Metode volume hingga yang telah banyak dikembangkan adalah skema Gudonov oleh Alcrudo dan Navarro (1993) dalam menyelesaikan persamaan SWE, dan skema Roe oleh Soares (2002) untuk pemodelan kasus runtuhnya bendungan yang dibandingkan terhadap hasil uji laboratorium [16].

Salah satu sifat penting dalam hukum konservasi nonlinear pada persamaan air dangkal adalah diskontinuitas yang dapat terjadi dengan mudah dan bahkan bisa muncul secara tiba-tiba. Oleh karena itu, digunakan metode volume hingga yang didasarkan pada bentuk integral, karena formulasi integral ini memiliki solusi yang lebih sedikit dan memungkinkan untuk solusi diskontinu [17]. Metode volume hingga membagi domain menjadi beberapa sel dan mengambil nilai pendekatan rata-rata kuantitas dalam setiap sel. Di setiap waktu, nilai-nilai tersebut diperbarui oleh pendekatan *flux* pada setiap ujung sel. Keakuratan metode ini sangat bergantung pada fungsi flux numerik [13]. Fluks yang masuk ke dalam suatu sel diidentifikasi dengan fluks yang keluar dari sel yang berdekatan, sehingga metode volume hingga dikenal juga sebagai skema konservatif [18].

Metode volume hingga dapat diterapkan pada persamaan gelombang air dangkal 1D dan dapat diaplikasikan pada geometri apapun termasuk pada grid terstruktur maupun tidak struktur. Diskritisasi volume hingga dilakukan hingga bentuk konservatif dari persamaan yang menghubungkan integral rata-rata nilai konservasi dan fluks antar sel, sehingga solusi yang didapatkan lebih akurat. Solusi yang didapatkan berguna untuk memprediksi arah aliran air, kecepatan aliran air, dan tinggi gelombang karena pengaruh topografi dasar. Langkah-langkah penyelesaian metode volume hingga yaitu mengintegrasikan, mendiskritisasi, dan menyelesaikan masalah.

Prinsip dasar metode volume hingga adalah mengintegrasikan bentuk konservatif dari persamaan gelombang air dangkal 1D pada volume kontrol. Volume kontrol dalam bidang x dan t untuk persamaan gelombang air dangkal seperti dalam Gambar 2.3 [6].



Gambar 2.3 Volume Kontrol Gelombang Air Dangkal 1D pada Bidang $x-t$

Dengan mempertimbangkan persamaan air dangkal pada (2.12) pada domain $[x_L, x_R] \times [0, T]$ di bidang $x - t$. Dimulai dengan membagi domain spasial sepanjang panjang $L := x_R - x_L$ menjadi N volume/sel yang berukuran sama dimana $x \in I_i (i = 1, 2, \dots, N)$, atau sel grid i dinotasikan sebagai berikut :

$$I_i = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right],$$

panjang sel sebagai berikut :

$$\Delta x := x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_R - x_L}{N},$$

dan langkah waktu sebagai berikut :

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n$$

Ketika dipertimbangkan volume kontrol $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times [t_n, t_{n+1}]$, dan mengintegrasikan (2.11) maka akan dijelaskan sebagai berikut [17].

Dipertimbangkan, pendekatan nilai rata-rata q pada interval ke i dan waktu t_n menggunakan notasi Q_i^n dan dituliskan sebagai berikut :

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} q(x, t_n) dx,$$

Sedangkan untuk pendekatan rata-rata flux di titik $x = x_{i\pm\frac{1}{2}}$ dalam interval waktu $[t_n, t_{n+1}]$ didekati dengan notasi $F_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ yaitu sebagai berikut :

$$F_{i\pm\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f \left(q \left(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t \right) \right) dt, \quad (2.13)$$

dan untuk rata-rata dalam pendekatan suku sumber S pada interval ke i dan waktu t_n adalah sebagai berikut :

$$S_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} S(q(x, t_n)) dx.$$

Karena massa total dalam sel ini berubah hanya bergantung pada flux di ujung-ujung sel, maka didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \int_{I_i} q(x, t) dx = f \left(q \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t \right) \right) - f \left(q \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t \right) \right) + \int_{I_i} S(q(x, t)) dx$$

pengintegralan persamaan (2.13) terhadap variabel waktu dari t_n hingga t_{n+1} didapatkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \int_{I_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{I_i} q(x, t_n) dx \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f \left(q \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t \right) \right) - f \left(q \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t \right) \right) \right) dt \\
&+ \int_{I_i} S(q(x, t_n)) dx
\end{aligned}$$

dengan menggunakan operasi aljabar dan pembagian oleh Δx didapatkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} q(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} q(x, t_n) dx \\
&- \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(f \left(q \left(x_{i-\frac{1}{2}}, t \right) \right) - f \left(q \left(x_{i+\frac{1}{2}}, t \right) \right) \right) dt \right] \quad (2.14) \\
&+ \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} S(q(x, t_n)) dx
\end{aligned}$$

persamaan (2.14) atau ditulis dalam bentuk diskrit-penuh sebagai berikut :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + S_i^n \quad (2.15)$$

Dari penjabaran di atas, persamaan (2.15) adalah persamaan volume hingga untuk persamaan air dangkal satu dimensi [13].

Metode volume hingga memiliki dua pendekatan yaitu pendekatan kolokasi dan *staggered* yang dijelaskan sebagai berikut :

1. Kolokasi

Pendekatan kolokasi (*Collocated*) tidak sederhana dan sulit diterapkan, karena semua variabel tak diketahui dalam sistem diaproksimasi pada mesh yang sama. Fluks numerik dihitung menggunakan penyelesaian solver Riemann yang diaproksimasi sehingga sifat yang dimiliki fluks numerik terbukti sebagai solver Riemann pendekatan yang memenuhi entropi positif untuk persamaan air dangkal.

Sebagai contoh, perhitungan solusi data vakum. Masalah ini terjadi ketika dua nilai yang bernilai nol dan tidak nol diberikan, maka langkah waktu (*timestep*) cenderung menuju nol dibatasi oleh kondisi *Courant Friedrichs Levy* (CFL) maka untuk mengatasi kekurangan yang ada

diusulkan fluks numerik *Suliciu relaxation* yang disesuaikan untuk vakum. Fluks numerik ini memiliki sifat yang terbukti memenuhi entropi positif sebagai penyelesaian Riemann aproksimasi untuk persamaan air dangkal yang dapat menangani kondisi vakum. Namun, sifat ini tidak mudah diperoleh dan cukup rumit.

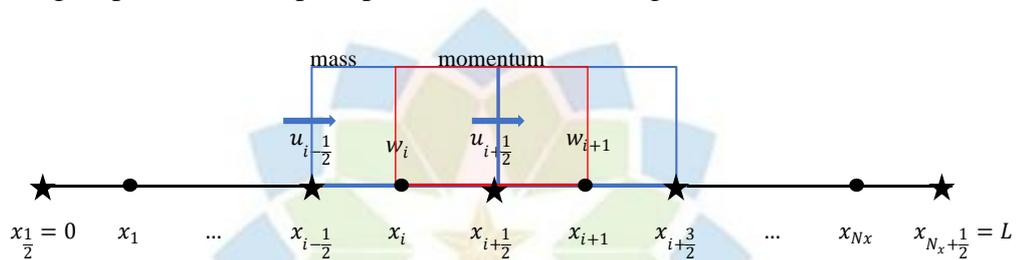
2. *Staggered*

Dalam pendekatan *staggered*, variabel-variabel yang tidak diketahui dalam sistem diaproksimasi pada mesh *staggered* dan fluks numerik dapat dihitung dengan cara yang lebih sederhana untuk menghindari penggunaan solver Riemann yang diaproksimasi. Dalam *staggered* volume hingga menyelesaikan sistem nonlinear hiperbolik dari hukum kekekalan telah diteliti dalam beberapa tahun terakhir dan diskritisasi *staggered* telah lama digunakan untuk sistem PDP seperti persamaan Navier-Stokes, atau persamaan air dangkal non-konservatif. Skema *staggered* ini mendekati persamaan kekekalan dalam bentuk diskrit pada sel tetap (volume kontrol).

Dari penjelasan kedua pendekatan di atas skema *staggered* merupakan alternatif dari skema kolokasi untuk menyelesaikan persamaan gelombang air dangkal karena skema *staggered* memiliki tingkat akurasi dan kekuatan yang setara dengan skema kolokasi. Adapun kelebihan lain dari skema *staggered* yaitu memberikan jaminan matematis yang sama dengan skema kolokasi, konsisten dengan ketidaksamaan entropi, perhitungan komponen fluks numerik lebih sederhana dibandingkan dengan penyelesaian Riemann yang diaproksimasi, dan diskritisasi seimbang (*well-balanced*) dari suku sumber topografi dapat dilakukan dengan cara langsung [19].

Oleh karena itu, metode volume hingga dapat melibatkan pendekatan pada sel-sel yang berdekatan, sehingga menghasilkan skema dimana dua variabel yang tidak diketahui dari SWE dihitung pada *staggered grid*. Menerapkan metode volume hingga pada *staggered grid* memiliki keuntungan besar, karena fluks numerik dapat dihitung lebih sederhana karena kebutuhan untuk menggunakan penyelesaian Riemann perkiraan dapat dihindari [18].

Untuk merancang kode gelombang tidak hanya memerlukan model gelombang yang akurat tapi penting juga untuk memilih implementasi numerik yang efisien, dan stabil serta mudah dalam komputasi. Oleh karena itu, persamaan gelombang air dangkal secara numerik dapat diimplementasikan menggunakan metode volume hingga pada skema *staggered grid*. *Staggered grid* artinya persamaan diferensial diaproksimasi pada sel yang berbeda, dan penempatan nilai variabel pada *staggered grid* ditempatkan di grid penuh atau berada di titik pusat volume kontrol dan di grid setengah atau terletak diantara dua grid penuh [20], seperti pada Gambar 2.4 sebagai berikut [12]:



Gambar 2.4 Ilustrasi Skema *Staggered Grid*. Titik dengan Gambar Lingkaran melambangkan Nilai pada Grid Penuh dan Titik dengan Gambar Bintang melambangkan Nilai pada Grid Setengah.