BAB III
SOLUSI NUMERIK GELOMBANG AIR DANGKAL 1D PADA TOPOGRAFI DISKONTINU

Pada bab ini, akan dijabarkan bagaimana menentukan solusi numerik dari persamaan gelombang air dangkal nonlinear, adapun solusi numerik yang dimaksud yaitu nilai variabel w dan u pada suatu grid ruang dalam selang waktu tertentu yang diaproksimasi menggunakan metode volume hingga. Sifat penting dari hukum kekekalan nonlinear seperti pada persamaan air dangkal adalah diskontinuitas dapat dengan mudah terjadi bahkan bisa muncul secara spontan, maka digunakan skema *staggered grid* yang diterapkan pada metode volume hingga. Sehingga untuk membuktikan skema yang digunakan stabil, dilakukan eksperimen pada kasus simulasi bendungan bobol 1D dengan topografi diskontinu.

3.1 Menentukan Solusi Numerik Gelombang Air Dangkal dengan Metode Volume Hingga pada Skema *Staggered Grid*

Persamaan gelombang air dangkal 1D dalam (2.9) dan (2.10) dituliskan kembali dalam bentuk persamaan ekuivalen sebagai berikut :

$$w_t + (hu)_x = 0 \tag{3.1}$$

$$u_t + uu_x + gw_x + Cf\,\frac{|u|u}{h} = 0. \tag{3.2}$$

Karena gaya gesek dipertimbangkan, maka pada persamaan (3.2) Cf adalah koefisien gesekan dari hukum newton II yang diasumsikan memiliki besaran yang sebanding dengan kuadrat kecepatan, dan memiliki arah yang berlawanan dengan kecepatan [5].

Dalam persamaan (3.1) dan (3.2) diketahui bahwa kondisi awal ketebalan air $h(x,t)$ sebagai berikut :

$$h(x,0) = f(x), \quad \text{untuk } 0 < x < L$$

kondisi awal kecepatan aliran $u(x,t)$ sebagai berikut :

$$u(x,0) = g(x), \quad \text{untuk } 0 < x < L$$

dan kondisi awal simpangan permukaan air $w(x,t)$ sebagai berikut :

$$w(x,0) = h(x), \quad \text{untuk } 0 < x < L$$

Sedangkan, kondisi batas kiri dan kanan ketebalan air $h(x,t)$ sebagai berikut :

$$h(0,t) = c_1 \quad h(L,t) = c_2, \quad \text{untuk semua t}$$

kondisi awal kecepatan aliran $u(x,t)$ sebagai berikut :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad \text{untuk semua t}$$

dan kondisi awal simpangan permukaan air $w(x,t)$ sebagai berikut [12]:

$$w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad \text{untuk semua } t.$$

Persamaan (3.1) dan (3.2) akan diselesaikan menggunakan metode volume hingga pada *staggered grid*, bisa dilihat pada Gambar 2.4. Dipertimbangkan domain spasial dengan panjang L yang didefinisikan $[0, L]$ sebagai domain spasial dan $[0, T]$ sebagai domain temporal. Domain spasial dibagi menjadi grid stengah dan grid penuh dengan panjang Δx.

Pada persamaan (3.1) dihitung pada sel $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$, jika dilihat pada Gambar 2.4 yaitu ditandai dengan warna biru, dan pada persamaan (3.2) dihitung pada sel $[x_i, x_{i+1}]$, jika dilihat pada Gambar 2.4 yaitu ditandai dengan warna merah. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa elevasi gelombang $w(x,t)$ dan $h(x,t)$ dihitung pada titik grid penuh $x_i, i = 1,2, \ldots, N$, sedangkan u dihitung pada titik grid setengah $x_{i+\frac{1}{2}}, i = 1,2, \ldots, N+1$. Dengan menggunakan metode volume hingga, persamaan (3.1) dan (3.2) diaproksimasi dengan diskritisasi yang dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + \frac{(hu)_{i+\frac{1}{2}}^n - (hu)_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + g\,\frac{w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}}{\Delta x} + (uu_x)_{i+\frac{1}{2}}^n + Cf\,\frac{|u|u}{h}\bigg|_{i-\frac{1}{2}}^n = 0, \tag{3.4}$$

dimana, dari persamaan di atas subskrip menunjukan titik grid spasial, yaitu i menunjukan titik grid pusat sel i, $i+1$ menunjukan titik grid berikutnya yang terletak disebelah kanan i, $i+\frac{1}{2}$ menunjukan posisi diantara sel i dan $i+1$, sedangkan $i-\frac{1}{2}$ menunjukan posisi diantara sel $i-1$ dan i. Sedangkan superskrip menunjukan titik grid temporal, yaitu n menunjukan nilai waktu saat ini atau $t = n\Delta t$, dan $n+1$ menunjukan nilai waktu selanjutnya atau $t = (n+1)\Delta t$.

Dari persamaan (3.3) dan (3.4) jika dituliskan dalam bentuk eksplisit adalah sebagai berikut :

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \Delta t\left(\frac{q_{i+\frac{1}{2}}^n - q_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}\right) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta t\left(g\,\frac{w_{i+1}^{n+1} - w_i^{n+1}}{\Delta x}\right) - (uu_x)_{i+\frac{1}{2}}^n \\ - Cfu_{i-\frac{1}{2}}^n\left|u_{i-\frac{1}{2}}^n\right|\frac{\Delta t}{h_{i-\frac{1}{2}}^n}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sementara itu, nilai h pada titik grid penuh yaitu dituliskan sebagai berikut:

$$h_i^{n+1} = w_i^{n+1} - b_i.$$

Sedangkan, diketahui bahwa nilai h di titik grid setengah untuk menghitung hu tidak ada, maka nilai h diaproksimasi menggunakan skema upwind orde pertama yang bergantung pada arah kecepatan aliran. Nilai yang diaproksimasi dinotasikan dengan simbol ${}^*h$ yang dituliskan sebagai berikut :

$${}^*h_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} h_i^n, & jika\ u_{i+\frac{1}{2}}^n > 0 \\ h_{i+1}^n & jika\ u_{i+\frac{1}{2}}^n < 0 \end{cases}$$

Mengaproksimasi suku adveksi uu_x merupakan tantangan sulit dalam menemukan solusi numerik untuk persamaan air dangkal nonlinear, maka untuk mengaproksimasi uu_x digunakan metode sederhana dengan langkah penulisan sebagai berikut :

$$uu_x = \frac{qu}{h} = \frac{q}{h}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.7}$$

dimana $q = hu$, kemudian tuliskan persamaan (3.7) seperti di bawah ini, yaitu :

$$(uu_x)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}}{\bar{h}_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{{}^*u_{i+1} - {}^*u_i}{\Delta x}\right),$$

dari persamaan di atas diketahui sebagai berikut :

$$\bar{h}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}),$$

$$\bar{q}_i = \frac{1}{2}\left(q_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}\right),$$

$$q_{i+\frac{1}{2}} = {}^*h_{i+\frac{1}{2}}u_{i+\frac{1}{2}}.$$

Sedangkan nilai ${}^*u_i$ diaproksimasi dengan skema upwind orde pertama sebagai berikut [5] :

$${}^*u_i = \begin{cases} u_{i-\frac{1}{2}} & jika\ \bar{q}_i > 0 \\ u_{i+\frac{1}{2}} & jika\ \bar{q}_i < 0 \end{cases}.$$