

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori matriks merupakan salah satu cabang sentral dalam Aljabar Linier, berperan penting dalam berbagai bidang matematika dan aplikasinya, seperti mekanika kuantum, kecerdasan buatan, dan analisis data [1] [2]. Matriks didefinisikan sebagai susunan bilangan dalam baris dan kolom, di mana entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dilambangkan a_{ij} [2]. Matriks banyak digunakan untuk berbagai permasalahan, salah satunya menyelesaikan sistem persamaan linier [3].

Salah satu bentuk matriks yang paling sering dimanfaatkan adalah matriks diagonal, yaitu matriks persegi yang semua entri di luar diagonal utamanya bernilai nol. Matriks diagonal menyederhanakan perhitungan nilai eigen dan operasi aljabar linier lainnya, sehingga banyak dipakai dalam permasalahan, misalnya eksponensial matriks [1].

Sedangkan matriks antidiagonal, yaitu matriks yang hanya memiliki entri tak nol pada diagonal sekundernya, meskipun kurang umum dibahas, memiliki aplikasi yang semakin berkembang, antara lain pada kriptografi, pemrosesan sinyal, dan teori graf [4]. Sebagai contoh, dalam teori graf, matriks antidiagonal muncul sebagai bentuk normalisasi khusus pada *adjacency matrix* graf bipartit, yang spektrumnya bersifat simetris terhadap nol [4].

Proses diagonalisasi mengubah matriks persegi menjadi bentuk diagonal [2]. Sebaliknya, antidiagonalisasi adalah proses mengubah matriks persegi menjadi bentuk antidiagonal [5]. Konsep antidiagonalisasi ini relatif baru dan saat ini banyak menjadi topik penelitian dalam aplikasi komputasi linier [5].

Selain itu, invers Moore–Penrose menyediakan generalisasi invers bagi matriks bukan persegi atau singular. Ben–Israel & Greville menguraikan teori invers generalisasi dan aplikasinya [6], sedangkan Kurata & Bapat mempelajari invers Moore–Penrose khusus untuk matriks *hollow* simetris [7].

Matriks *cross-product* (atau *skew-symmetric matrix*) muncul saat merepresentasikan operasi perkalian silang antara dua vektor. Matriks ini banyak digunakan dalam robotika, misalnya dalam representasi kecepatan sudut [8].

Kajian mendalam mengenai sifat matriks antidiagonal, termasuk generalisasi invers, diagonalisasi dan teknik antidiagonalisasi, masih sangat terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini berupaya:

1. Mengkaji invers Moore–Penrose matriks antidiagonal.
2. Mengembangkan metode diagonalisasi matriks antidiagonal.
3. Menyajikan metode dan contoh antidiagonalisasi matriks, serta aplikasi metodenya pada matriks *cross-product* (*skew-symmetric* 3×3).

Dengan demikian, diharapkan studi ini dapat memperkaya literatur aljabar linier modern dan membuka peluang aplikasi baru bagi matriks antidiagonal di berbagai disiplin ilmu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana invers Moore-Penrose matriks antidiagonal?
2. Bagaimana diagonalisasi matriks antidiagonal simetris?
3. Bagaimana antidiagonalisasi matriks?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah diperlukan untuk memfokuskan dan mengarahkan penelitian. Berikut adalah batasan masalah dari penelitian ini:

1. Antidiagonalisasi berfokus pada matriks yang memiliki spektrum simetris dengan $\lambda_i \neq 0$ ataupun *c*-simetris dengan $\lambda_i \neq 0$.
2. Diagonalisasi akan berfokus pada matriks antidiagonal simetris dan setiap entri pasangan transposnya tak nol.
3. Aplikasi metode antidiagonalisasi hanya dilakukan pada matriks *cross-product* (*skew-simetris* 3×3).

1.4 Tujuan

Dalam penelitian ini, tujuan dan manfaat yang diharapkan adalah sebagai berikut:

1. Memperluas metode pencarian invers matriks antidiagonal ke kasus matriks antidiagonal *singular*.
2. Menyederhanakan proses diagonalisasi.
3. Mengkaji metode antidiagonalisasi matriks dan matriks antidiagonal hasil antidiagonalisasinya.

1.5 Metode Penelitian

Metodologi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini, dilakukan pengumpulan dan telaah pustaka yang mencakup teori dasar matriks, konsep matriks diagonal dan antidiagonal, serta proses diagonalisasi dan antidiagonalisasi. Sumber referensi mencakup artikel jurnal, buku teks, dan publikasi lain yang relevan.

2. Analisis

Pada tahap ini, dilakukan perumusan dan pembuktian teorema, yaitu invers Moore–Penrose untuk matriks antidiagonal, serta penyederhanaan proses diagonalisasi matriks antidiagonal simetris. Selanjutnya, dilakukan analisis nilai eigen dengan sifat spektrumnya untuk memastikan antidiagonalisasi dapat dicapai melalui diagonalisasi dan mengidentifikasi berbagai bentuk matriks antidiagonal yang mungkin muncul pada matriks dengan spektrum tersebut.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini terdiri dari lima bab dengan rincian sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Menguraikan konsep-konsep dasar antara lain teori matriks (diagonal dan antidiagonal), spektrum simetris dan c -simetris, invers Moore–Penrose, diagonalisasi, serta antidiagonalisasi matriks.

BAB III DIAGONALISASI MATRIKS ANTIDIAGONAL DAN ANTIDIAGONALISASI MATRIKS

Memaparkan perumusan dan pembuktian teorema invers Moore–Penrose untuk matriks antidiagonal, proses diagonalisasi matriks antidiagonal simetris, prosedur antidiagonalisasi, serta aplikasi pada matriks skew-simetris *cross-product*.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menyajikan jawaban atas rumusan masalah serta rekomendasi untuk pengembangan dan penerapan studi lebih lanjut.

