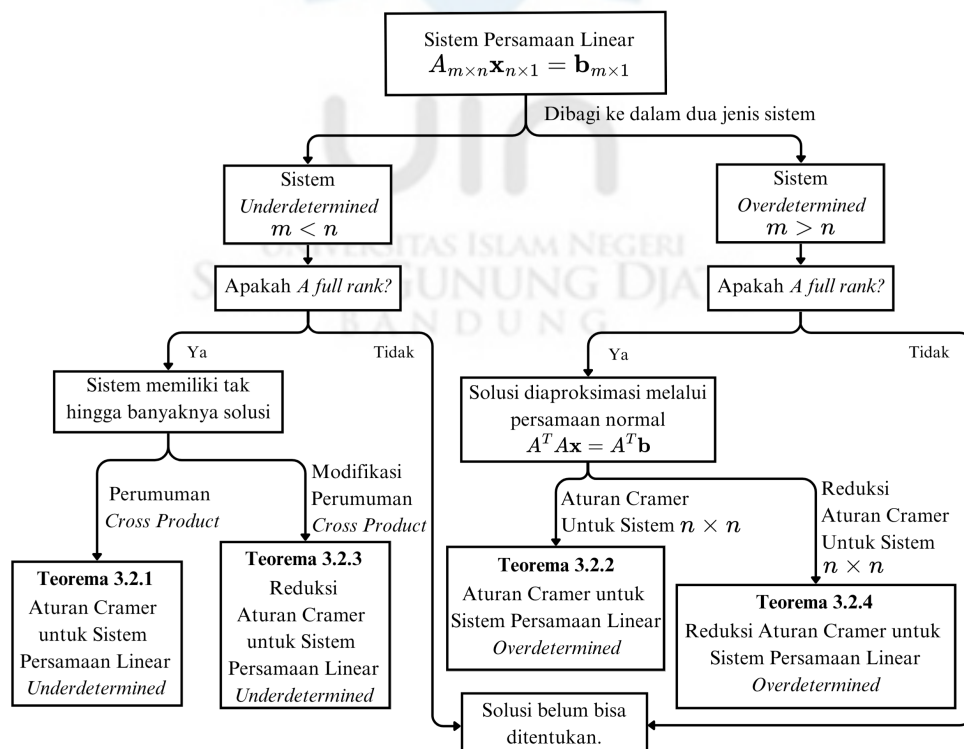


BAB III

PENERAPAN PERUMUMAN *CROSS PRODUCT* DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR $m \times n$ MENGGUNAKAN REDUKSI ATURAN CRAMER

Pada bagian ini dibahas topik utama dalam penelitian skripsi, yang disajikan dalam tiga subbab. Pada Subbab 3.1 akan ditunjukkan bahwa perumuman *cross product* di $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat antikomutatif, sifat perkalian skalar, sifat distributif, sifat vektor nol, serta hasil kali skalar dari n vektor, dengan memanfaatkan sifat-sifat determinan. Selanjutnya, Subbab 3.2 dan 3.3 membahas perluasan aturan Cramer dan reduksi aturan Cramer untuk sistem $m \times n$ (*underdetermined* dan *overdetermined*), dengan memanfaatkan sifat ortogonal dari perumuman *cross product* dan modifikasi dari perumuman tersebut. Perluasan ini dijelaskan melalui alur penelitian berikut:



Gambar 1: Alur Penelitian

3.1 Sifat-Sifat Perumuman *Cross Product* di $\mathbb{R}^n$

Selain memenuhi sifat tegak lurus, akan ditunjukkan bahwa perumuman *cross product* di $\mathbb{R}^n$ juga memenuhi sifat *cross product* di $\mathbb{R}^3$ dalam Teorema (2.3.8).

3.1.1 Sifat Antikomutatif pada Perumuman *Cross Product*

Sifat antikomutatif pada *cross product* di $\mathbb{R}^3$ juga berlaku untuk perumuman *cross product*, sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.1.1 (Sifat Antikomutatif)

Untuk sembarang vektor $\mathbf{a}_i$ dan $\mathbf{a}_j$ di ruang vektor $\mathbb{R}^n$, maka berlaku sifat:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = -(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}).$$

Bukti.

Misalkan terdapat $n - 1$ vektor yang saling bebas linear di $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_j &= (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots, a_{jn}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n}) \end{aligned}$$

dengan $1 \leq i, j \leq n - 1$ dan $i \neq j$, maka operasi *cross product* dari $\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, melalui penukaran baris ke- i dengan baris ke- j , dan menggunakan sifat determinan pertama dalam Teorema (2.2.2), diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa:

$$\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_i \times \dots \times \mathbf{a}_j \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = -(\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_j \times \dots \times \mathbf{a}_i \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1})$$

Karena vektor $\mathbf{a}_i$ dan $\mathbf{a}_j$ dipilih secara sembarang dengan $1 \leq i, j \leq n-1$ dan $i \neq j$, maka terbukti bahwa perumuman *cross product* memenuhi sifat antikomutatif.

Berikut ini adalah contoh yang menunjukkan sifat antikomutatif pada perumuman *cross product*.

Contoh 3.1.1

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_2 = (4, 3, 2, 1), \text{ dan } \mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4).$$

Operasi $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$, menghasilkan:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -15\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3 - 15\mathbf{e}_4.$$

Operasi $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2$, menghasilkan:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{e}_1 - 15\mathbf{e}_2 - 15\mathbf{e}_3 + 15\mathbf{e}_4 \\ &= -(-15\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3 - 15\mathbf{e}_4). \end{aligned}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = -(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2)$.

3.1.2 Sifat Perkalian Skalar pada Perumuman *Cross Product*

Selanjutnya, sifat perkalian skalar pada *cross product* di $\mathbb{R}^3$ juga berlaku untuk perumuman *cross product*, sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.1.2 (Sifat Perkalian Skalar pada Perumuman *Cross Product*)

Misalkan k adalah skalar dan $\mathbf{a}_i$ merupakan sembarang vektor di ruang vektor $\mathbb{R}^n$, maka berlaku sifat berikut:

$$k(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}) = \mathbf{a}_1 \times \cdots \times (k\mathbf{a}_i) \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}.$$

Bukti.

Misalkan terdapat $n - 1$ vektor yang saling bebas linear di $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n}) \end{aligned}$$

dengan $1 \leq i \leq n - 1$. Selanjutnya, misalkan $k \in \mathbb{R}$, maka perkalian skalar antara k dan operasi *cross product* dari vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$k(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}) = k \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, menggunakan sifat determinan kedua dalam Teorema (2.2.2), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$k \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, dapat diperoleh bahwa:

$$k(\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}) = \mathbf{a}_1 \times \cdots \times (k\mathbf{a}_i) \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$$

Karena vektor $\mathbf{a}_i$ dipilih secara sembarang dengan $1 \leq i \leq n-1$, maka terbukti bahwa perumuman *cross product* memenuhi sifat perkalian skalar.

Berikut ini adalah contoh yang menunjukkan sifat perkalian skalar pada perumuman *cross product*.

Contoh 3.1.2

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\mathbf{a}_2 = (4, 3, 2, 1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4)$$

Serta misalkan skalar $k = 2$. Maka operasi $k(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$, menghasilkan:

$$k(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = 2(-15\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3 - 15\mathbf{e}_4) = -30\mathbf{e}_1 + 30\mathbf{e}_2 + 30\mathbf{e}_3 - 30\mathbf{e}_4.$$

Selanjutnya, operasi $\mathbf{a}_1 \times (k\mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3$, menghasilkan:

$$\mathbf{a}_1 \times (k\mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -30\mathbf{e}_1 + 30\mathbf{e}_2 + 30\mathbf{e}_3 - 30\mathbf{e}_4.$$

Dengan demikian, terlihat bahwa $2(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 \times (2\mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_3$.

3.1.3 Sifat Distributif pada Perumuman *Cross Product*

Sifat berikutnya adalah sifat distributif pada *cross product* di $\mathbb{R}^3$, yang juga berlaku pada perumuman *cross product*, sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.1.3

Misalkan sembarang vektor $\mathbf{a}_i$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari dua vektor, yaitu $\mathbf{a}_i = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, dengan $\mathbf{a}_i, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, maka berlaku sifat berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = (\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{u} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}) + (\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{v} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}).$$

Bukti.

Misalkan terdapat $n - 1$ vektor bebas linear di $\mathbb{R}^n$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_i &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \dots, u_n + v_n) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n})\end{aligned}$$

dengan $1 \leq i \leq n - 1$, dan $\mathbf{a}_i$ yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari dua vektor:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \text{ dan } \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n),$$

dengan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Maka, operasi *cross product* dari $\mathbf{a}_1 \times \dots \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \dots \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 & \dots & u_n + v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat determinan pada Teorema (2.2.3), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \dots \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, dapat diperoleh bahwa:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = (\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{u} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}) + (\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{v} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}).$$

Karena $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ berada di sembarang i dengan $1 \leq i \leq n - 1$, maka perumuman *cross product* terbukti memenuhi sifat distributif.

Berikut adalah contoh yang menunjukkan bagaimana sifat distributif berlaku dalam perumuman *cross product*.

Contoh 3.1.3

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\mathbf{a}_2 = (4, 3, 2, 1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4)$$

Dari Contoh (3.1.1), diperoleh hasil operasi $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$, yaitu:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = -15\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3 - 15\mathbf{e}_4.$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa vektor $\mathbf{a}_3$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$, sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4) = (1, 1, 2, 3) + (0, 2, 0, 1) = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

Maka, operasi *cross product* dari $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{v})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (0\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 - 10\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4) + \\ &\quad (-15\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 + 25\mathbf{e}_3 - 20\mathbf{e}_4) \\ &= -15\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3 - 15\mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

Dengan demikian, terlihat bahwa:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{u}) + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{v}),$$

dengan $\mathbf{u} = (1, 1, 2, 3)$ dan $\mathbf{v} = (0, 2, 0, 1)$.

3.1.4 Sifat Vektor Nol pada Perumuman *Cross Product*

Sifat berikutnya adalah sifat vektor nol pada perumuman *cross product*, yang terbagi menjadi dua bagian, sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.1.4 (Sifat Vektor Nol pada Perumuman *Cross Product*)

Misalkan sembarang vektor $\mathbf{a}_i$ dan $\mathbf{a}_j$ di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol di $\mathbb{R}^n$, dengan $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Maka, berlaku sifat berikut:

1. $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{0}$, dan
2. $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_i \times \dots \times \mathbf{a}_j \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{0}$ jika vektor $\mathbf{a}_i$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\mathbf{a}_j$.

Bukti. (1)

Misalkan $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ adalah vektor nol di $\mathbb{R}^n$, dan misalkan terdapat $n - 1$ vektor bebas linear di $\mathbb{R}^n$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} &= (a_{i-1,1}, a_{i-1,2}, a_{i-1,3}, \dots, a_{i-1,n}) \\ \mathbf{a}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) \\ \mathbf{a}_{i+1} &= (a_{i+1,1}, a_{i+1,2}, a_{i+1,3}, \dots, a_{i+1,n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n})\end{aligned}$$

Dengan $1 \leq i \leq n - 1$. Maka operasi $\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & a_{i-1,3} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,3} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan sifat determinan ketiga dalam Teorema (2.2.2), dapat diperoleh hasil

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} &= \mathbf{e}_1(0) - \mathbf{e}_2(0) + \mathbf{e}_3(0) - \cdots + \\
 &\quad (-1)^{1+n} \mathbf{e}_n(0) \\
 &= (0, 0, 0, \dots, 0) \\
 &= \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat diperoleh bahwa:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{0}$$

Karena vektor $\mathbf{0}$ berada pada sembarang baris ke- i , maka perumuman *cross product* terbukti memenuhi sifat pertama dari *cross product* dengan vektor nol.

Bukti. (2)

Misalkan terdapat $n - 1$ vektor di $\mathbb{R}^n$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{a}_i &= (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{a}_j &= (ka_{i1}, ka_{i2}, ka_{i3}, \dots, ka_{in}) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n})
 \end{aligned}$$

dengan $1 \leq i, j \leq n - 1$ dan $i \neq j$, serta vektor $\mathbf{a}_i$ merupakan kombinasi linear dari vektor $\mathbf{a}_j$, yaitu $\mathbf{a}_j = k\mathbf{a}_i$ untuk suatu skalar k . Maka, operasi $\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \cdots \times \mathbf{a}_i \times \cdots \times \mathbf{a}_j \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan sifat determinan kedua dalam Teorema (2.2.2), dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Dengan demikian, melalui sifat determinan ketiga dalam Teorema (2.2.2), dapat diperoleh bahwa:

$$\mathbf{a}_1 \times \dots \times \mathbf{a}_i \times \dots \times \mathbf{a}_j \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1} = k(0, 0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}.$$

Karena $\mathbf{a}_i$ dan $\mathbf{a}_j$ dipilih secara sembarang dengan $1 \leq i, j \leq n-1$ dan $i \neq j$, serta $\mathbf{a}_j = k\mathbf{a}_i$ untuk suatu skalar k , maka perumuman *cross product* terbukti memenuhi sifat kedua dari *cross product* dengan vektor nol.

Berikut adalah contoh yang menunjukkan bagaimana sifat pertama dari *cross product* dengan vektor nol berlaku dalam perumuman *cross product*.

Contoh 3.1.4

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$$

$$\mathbf{a}_2 = (4, 3, 2, 1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4)$$

Serta vektor nol di $\mathbb{R}^4$, yaitu:

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$$

Maka, operasi *cross product* dari $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_3$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

Dengan demikian, terlihat bahwa $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{0} \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

Berikut adalah contoh yang menunjukkan bagaimana sifat kedua dari *cross product* dengan vektor nol berlaku dalam perumuman *cross product*.

Contoh 3.1.5

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_2 = (4, 3, 2, 1), \text{ dan } \mathbf{a}_3 = (2, 4, 6, 8).$$

Perhatikan bahwa $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1$. Maka, operasi *cross product* dari $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(0, 0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

Dengan demikian, terlihat bahwa $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ dengan $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1$.

3.1.5 Hasil Kali Skalar n Vektor

Hasil kali skalar dari n vektor merupakan perluasan dari *scalar triple product* di ruang $\mathbb{R}^3$. Operasi ini melibatkan *dot product* dan perumuman *cross product*, dengan hasil berupa skalar. Perhitungan hasil kali skalar dari n vektor dilakukan dengan memisalkan terlebih dahulu vektor-vektor bebas linear $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ di $\mathbb{R}^n$, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n})$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n})$$

$$\mathbf{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n})$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots, a_{n,n})$$

Maka, operasi *cross product* dari $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \dots \times \mathbf{a}_n$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \dots \times \mathbf{a}_n = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \dots & \mathbf{e}_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Melalui ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \cdots \times \mathbf{a}_n = & \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \\ & \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^{1+n} \\ & \mathbf{e}_n \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan melakukan operasi *dot product* antara vektor $\mathbf{a}_1$ dan hasil dari operasi *cross product* $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \cdots \times \mathbf{a}_n$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \cdots \times \mathbf{a}_n) \\ = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \\ & a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dengan mengembalikan persamaan (3.1) ke bentuk sebelum ekspansi kofaktor terhadap baris pertama, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \cdots \times \mathbf{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Berikut adalah contoh dari hasil kali skalar dari n vektor.

Contoh 3.1.6

Diberikan vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$ di $\mathbb{R}^4$, dengan:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= (1, 2, 3, 4), \mathbf{a}_3 = (1, 3, 2, 4), \\ \mathbf{a}_2 &= (4, 3, 2, 1), \mathbf{a}_4 = (1, 4, 3, 2).\end{aligned}$$

Maka, dengan menggunakan persamaan (3.2), diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -60.$$

3.2 Penerapan Perumuman *Cross Product* dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear $m \times n$ Menggunakan Aturan Cramer

Penelitian mengenai aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $n \times n$ melalui perumuman *cross product* di $\mathbb{R}^n$ telah dilakukan dalam [7] dan [8], yang menjadi landasan bagi pembahasan dalam penelitian skripsi ini. Selanjutnya, melalui pendekatan yang sama, aturan Cramer dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, baik pada kasus *underdetermined* maupun *overdetermined*.

3.2.1 Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Underdetermined*

Sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m < n$, dikenal sebagai sistem *underdetermined*. Sistem ini memiliki solusi berupa solusi umum. Perumusan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear *underdetermined* melalui perumuman *cross product* dilakukan secara bertahap, dimulai dengan menyelesaikan sistem persamaan linear *full rank* berukuran 4×5 , yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= f_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= f_4\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sistem (3.3) dapat dituliskan ke dalam bentuk kombinasi linear dari vektor sebagai berikut:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

Diperoleh vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

Serta, vektor $\mathbf{b} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$. Dengan demikian, sistem pada persamaan (3.3) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 = \mathbf{b} \quad (3.4)$$

Sistem (3.3) juga dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat empat vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$. Artinya:

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dengan demikian, matriks A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem persamaan (3.3) memiliki solusi umum dengan $5 - 4 = 1$ parameter, yaitu x_5 yang dipilih sebagai parameter.

Selanjutnya, untuk mencari solusi dari variabel x_1 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan *cross product* antara $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_1$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} [x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5] \cdot \mathbf{v}_1 &= [\mathbf{b}] \cdot \mathbf{v}_1 \\ x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_1 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_1$ terhadap vektor $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$, maka diperoleh $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, sehingga:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_1 dan menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$, diperoleh solusi untuk variabel x_1 sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} - x_5 \frac{\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Solusi untuk variabel x_1 juga dapat dituliskan dalam bentuk yang disederhanakan sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}. \quad (3.5)$$

Untuk mencari solusi dari variabel x_2 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan *cross product* antara $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_2$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} [x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5] \cdot \mathbf{v}_2 &= [\mathbf{b}] \cdot \mathbf{v}_2 \\ x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_2 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_2$ terhadap vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$, maka diperoleh $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, sehingga:

$$x_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_2 , serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$ dan dengan melakukan satu kali penukaran kolom, diperoleh solusi untuk variabel x_2 sebagai berikut:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & f_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & f_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & f_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & f_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} - x_5 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{25} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{35} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{45} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Solusi untuk variabel x_2 juga dapat dituliskan dalam bentuk yang disederhanakan sebagai berikut:

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}. \quad (3.6)$$

Untuk mencari solusi dari variabel x_3 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan *cross product* antara $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_4$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_3$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} [x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5] \cdot \mathbf{v}_3 &= [\mathbf{b}] \cdot \mathbf{v}_3 \\ x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_3 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_3 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_3 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_3$ terhadap vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_4$, maka diperoleh $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, sehingga:

$$x_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_3 , serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$ dan dengan melakukan dua kali penukaran kolom, diperoleh solusi untuk variabel x_3 sebagai berikut:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & f_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & f_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & f_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} - x_5 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Solusi untuk variabel x_3 juga dapat dituliskan dalam bentuk yang disederhanakan sebagai berikut:

$$x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}. \quad (3.7)$$

Terakhir, untuk mencari solusi dari variabel x_4 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan *cross product* antara $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_4$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.4), diperoleh:

$$\begin{aligned} [x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5] \cdot \mathbf{v}_4 &= [\mathbf{b}] \cdot \mathbf{v}_4 \\ x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_4 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_4 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_4 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_4 &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_4 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_4$ terhadap vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$, maka diperoleh $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_4 = 0$, sehingga:

$$x_4 \begin{vmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_4 , serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$ dan dengan melakukan tiga kali penukaran kolom, diperoleh solusi untuk variabel x_4 sebagai berikut:

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & f_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} - x_5 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Solusi untuk variabel x_4 juga dapat dituliskan dalam bentuk yang disederhanakan sebagai berikut:

$$x_4 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}. \quad (3.8)$$

Berdasarkan hasil dari persamaan (3.5), (3.6), (3.7), dan (3.8), maka solusi umum dari sistem persamaan linear berukuran 4×5 , dengan bentuk :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= f_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= f_4 \end{aligned}$$

dapat diperoleh melalui rumus berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_2 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_3 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_4 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}. \end{aligned}$$

dengan $x_5 \in \mathbb{R}$ dan $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$. Di mana vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$, dan $\mathbf{a}_5$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

Serta vektor $\mathbf{b}$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{b} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T.$$

Selanjutnya, perumusan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear *underdetermined* melalui perumuman *cross product* diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *full rank* berukuran 4×6 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 &= f_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 &= f_4 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sistem pada persamaan (3.9) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 + x_6 \mathbf{a}_6 = \mathbf{b} \quad (3.10)$$

Dengan vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ dan $\mathbf{b}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_4 &= \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{pmatrix} a_{16} \\ a_{26} \\ a_{36} \\ a_{46} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sistem (3.9) juga dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat empat vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$. Artinya $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$. Dengan demikian, matriks A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem persamaan (3.9) memiliki solusi umum dengan $6 - 4 = 2$ parameter, yaitu x_5 dan x_6 yang dipilih sebagai parameter. Berdasarkan penyelesaian sistem 4×5 dengan perumuman *cross product*, solusi umum sistem 4×6 diberikan oleh rumus berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_6 \frac{\det(\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_2 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_6 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_3 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_6 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \\ x_4 &= \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_6 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}, \end{aligned}$$

dengan $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ dan $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$.

Berdasarkan penyelesaian sistem berukuran 4×5 dan 4×6 melalui perumusan *cross product*, aturan Cramer untuk solusi umum sistem *underdetermined* dapat dirumuskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.1 (Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Underdetermined*)
Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m < n$ yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m + \dots + a_{1,n}x_n &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m + \dots + a_{2,n}x_n &= f_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,m}x_m + \dots + a_{m,n}x_n &= f_m \end{aligned} \quad (3.12)$$

Misalkan terdapat m vektor kolom yang bebas linear, yang berarti $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \neq 0$. Maka, sistem pada persamaan (3.12) memiliki solusi umum dengan $n - m$ parameter, yang dapat diperoleh melalui:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)} - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)},$$

untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ serta vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \dots, \mathbf{a}_n$ dan $\mathbf{b}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1,m} \\ a_{2,m} \\ \vdots \\ a_{m,m} \end{pmatrix} \\ , \dots, \mathbf{a}_n &= \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bukti.

Sistem pada persamaan (3.12) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (3.14)$$

Dengan vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \dots, \mathbf{a}_n$ dan $\mathbf{b}$ merupakan vektor-vektor pada persamaan (3.13). Sistem pada persamaan (3.12) juga dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}.$$

Misalkan terdapat m vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, yang berarti $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \neq 0$. Dengan demikian, matriks A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = m$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem persamaan (3.12) memiliki solusi umum dengan $n - m$ parameter, yaitu $x_{m+1}, \dots, x_n$ yang dipilih sebagai parameter.

Selanjutnya, untuk mencari solusi variabel x_i , dengan $1 \leq i \leq m$, dan menganggap variabel $x_{m+1}, \dots, x_n$ sebagai parameter, didefinisikan *cross product* antara vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \dots \times \mathbf{a}_m = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_m \\ a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m,1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i-1} & a_{2,i-1} & \dots & a_{m,i-1} \\ a_{1,i+1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{m,i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

Melalui *dot product* antara $\mathbf{v}_i$ dengan kedua ruas persamaan (3.14), diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_i + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \dots + x_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_i + x_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i + x_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i \\ + \dots + x_m \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{v}_i + x_{m+1} \mathbf{a}_{m+1} \cdot \mathbf{v}_i + \dots + x_n \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_i$ terhadap vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m$, maka diperoleh hasil:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_i = \dots = \mathbf{a}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i = \dots = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{v}_i = 0.$$

Dengan demikian, persamaan (3.15) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
& x_i [\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T] \\
& + x_{m+1} [\det(\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T] \\
& + \dots + x_n [\det(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T] \\
& = \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_i , serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$ dan dengan melakukan $i - 1$ penukaran kolom, diperoleh solusi untuk variabel x_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_i = & \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)} \\
& - \frac{x_{m+1} \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)} \\
& - \dots - \frac{x_n \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}.
\end{aligned}$$

Solusi untuk variabel x_i juga dapat dituliskan dalam bentuk yang disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_i = & \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)} \\
& - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)}
\end{aligned}$$

Karena variabel x_i dipilih secara sembarang dengan $1 \leq i \leq m$, maka Teorema (3.2.1) terbukti.

Berikut adalah contoh numerik dari penyelesaian sistem persamaan linear *underdetermined* menggunakan Teorema (3.2.1).

Contoh 3.2.1

Misalkan sistem persamaan linear berukuran 4×5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 4 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 &= 6 \\
x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 15x_4 + 9x_5 &= 2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dari sistem pada persamaan (3.16) dapat diperoleh vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$

dan vektor $\mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Karena $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = -100 \neq 0$, maka berdasarkan Teorema (3.2.1), solusi umum dari sistem pada persamaan (3.16) adalah sebagai berikut:

1. Solusi variabel x_1 :

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}$$

$$= \frac{-104}{-100} - x_5 \frac{-132}{-100} = \frac{26}{25} - \frac{33}{25}x_5.$$

2. Solusi variabel x_2 :

$$x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}$$

$$= \frac{464}{-100} - x_5 \frac{-88}{-100} = -\frac{116}{25} - \frac{22}{25}x_5.$$

3. Solusi variabel x_3 :

$$x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}$$

$$= \frac{-176}{-100} - x_5 \frac{92}{-100} = \frac{44}{25} + \frac{23}{25}x_5.$$

4. Solusi variabel x_4 :

$$x_4 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}$$

$$= \frac{400}{-100} - x_5 \frac{0}{-100} = -4.$$

dengan $x_5 \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Overdetermined*

Sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, dikenal sebagai sistem *overdetermined*. Secara umum, sistem ini tidak memiliki solusi atau bersifat tidak konsisten, sehingga solusi $\mathbf{x}$ hanya dapat didekati (diaproksimasi). Solusi sistem ini dapat didekati dengan menyelesaikan persamaan normal, sebagaimana dijelaskan pada Teorema (2.5.1). Dengan demikian, untuk sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, sebagai berikut:

$$A_{m \times n} \mathbf{x}_{n \times 1} = \mathbf{b}_{m \times 1} \quad (3.17)$$

Maka, dengan mengalikan $A_{n \times m}^T$ pada kedua ruas sistem persamaan (3.17), diperoleh persamaan normal sebagai berikut:

$$A_{n \times m}^T A_{m \times n} \hat{\mathbf{x}}_{n \times 1} = A_{n \times m}^T \mathbf{b}_{m \times 1} \quad (3.18)$$

Perhatikan bahwa hasil dari $A_{n \times m}^T A_{m \times n}$ merupakan matriks berukuran $n \times n$, sedangkan $A_{n \times m}^T \mathbf{b}_{m \times 1}$ menghasilkan vektor kolom berukuran $n \times 1$. Dengan demikian, berdasarkan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ yang dijelaskan dalam Teorema (2.4.1), maka penyelesaian persamaan (3.18) dapat dirumuskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.2 (Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Overdetermined*)
Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.19)$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa matriks koefisien A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = n$, maka solusi dari persamaan (3.19) dapat didekati melalui persamaan normal:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b} \quad (3.20)$$

Dengan demikian, ketika $\det(A^T A) \neq 0$, maka persamaan (3.39) memiliki solusi tunggal, yang diberikan sebagai berikut:

$$\hat{x}_i = \frac{\det((A^T A)_i)}{\det(A^T A)}$$

Di mana $(A^T A)_i$ adalah matriks yang diperoleh dengan menukar entri pada kolom ke- i dari matriks $A^T A$ dengan entri pada matriks kolom $A^T \mathbf{b}$.

Bukti.

Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= f_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= f_2 \\
 &\vdots \\
 a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= f_n \\
 &\vdots \\
 a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= f_m
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sistem (3.21) juga dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Dengan A^T sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} & \dots & a_{m,1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat matriks bagian berukuran $n \times n$ dengan $\det(M_{n \times n}) \neq 0$, yang berarti A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = n$ dan berdasarkan Teorema (2.3.5) terdapat n vektor kolom yang bebas linear.

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.1), solusi dari sistem pada persamaan (3.21) dapat didekati melalui persamaan normal, yang diperoleh dengan mengalikan A^T pada kedua ruas sistem persamaan (3.22) berikut:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Di mana u_{ij} merupakan hasil kali antara entri-entri pada baris ke- i dari matriks A^T dengan entri-entri pada kolom ke- j dari matriks A . Sementara itu, v_{i1} adalah hasil kali antara entri-entri pada baris ke- i dari matriks A^T dengan entri-entri pada kolom pertama dari vektor kolom $\mathbf{b}$.

Karena terdapat n vektor kolom yang bebas linear, maka $\det(A^T A) \neq 0$. Dengan demikian, berdasarkan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ dalam Teorema (2.4.1), maka solusi $\hat{x}_i$ dari persamaan normal (3.23) adalah sebagai berikut:

$$\hat{x}_i = \frac{\det((A^T A)_i)}{\det(A^T A)}$$

Solusi tersebut tunggal dan merupakan solusi kuadrat terkecil dari persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dengan demikian, Teorema (3.2.2) terbukti.

Berikut adalah contoh numerik dari penyelesaian sistem persamaan linear *overdetermined* menggunakan Teorema (3.2.2).

Contoh 3.2.2

Misalkan sistem persamaan linear berukuran 5×4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sistem pada persamaan (3.24) dapat dinyatakan dalam persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\det(M_{4 \times 4}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

Karena terdapat sembarang matriks bagian berukuran 4×4 dengan $\det(M_{4 \times 4}) \neq 0$, maka matriks koefisien A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.2.2), solusi dari persamaan (3.24) dapat didekati melalui persamaan normal $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ berikut:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b} \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 15 & 20 \\ 13 & 19 & 15 & 20 \\ 15 & 15 & 19 & 21 \\ 20 & 20 & 21 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \\ 27 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Maka solusi $\hat{x}_i$ dari persamaan normal (3.25) adalah sebagai berikut:

1. Solusi variabel $\hat{x}_1$:

$$\hat{x}_1 = \frac{\det((A^T A)_1)}{\det(A^T A)} = \frac{3072}{799},$$

2. Solusi variabel $\hat{x}_2$:

$$\hat{x}_2 = \frac{\det((A^T A)_2)}{\det(A^T A)} = \frac{512}{799},$$

3. Solusi variabel $\hat{x}_3$:

$$\hat{x}_3 = \frac{\det((A^T A)_3)}{\det(A^T A)} = -\frac{570}{799},$$

4. Solusi variabel $\hat{x}_4$:

$$\hat{x}_4 = \frac{\det((A^T A)_4)}{\det(A^T A)} = -\frac{1017}{799}.$$

Sehingga diperoleh:

$$A \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3072}{799} \\ \frac{512}{799} \\ -\frac{570}{799} \\ -\frac{1017}{799} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{324}{799} \\ \frac{297}{799} \\ \frac{54}{799} \\ \frac{351}{799} \\ -\frac{513}{799} \end{bmatrix}.$$

serta:

$$\|A \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \frac{27}{\sqrt{799}} \approx 0.95519 \text{ dan } \|A \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2 \approx 0.9124.$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa vektor $\hat{\mathbf{x}}$ merupakan solusi pendekatan yang cukup baik untuk solusi dari persamaan $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3.3 Penerapan Modifikasi Perumuman *Cross Product* dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear $m \times n$ Menggunakan Reduksi Aturan Cramer

Melalui modifikasi perumuman *cross product*, reduksi aturan Cramer yang sebelumnya terbatas untuk penyelesaian sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, baik pada kasus *underdetermined* maupun *overdetermined*. Reduksi aturan Cramer bertujuan untuk mengurangi jumlah determinan yang perlu dihitung.

3.3.1 Reduksi Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Underdetermined*

Perumusan reduksi aturan Cramer untuk sistem persamaan linear *underdetermined* melalui modifikasi perumuman *cross product* dilakukan secara bertahap dengan menyelesaikan sistem persamaan linear *full rank* berukuran 4×5 , yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= f_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= f_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 &= f_3 \\a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 &= f_4\end{aligned}\tag{3.26}$$

Sistem pada persamaan (3.26) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{b}\tag{3.27}$$

Dengan vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

Serta, vektor $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = (f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Sistem (3.26) juga dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat empat vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$. Artinya:

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dengan demikian, matriks A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem persamaan (3.26) memiliki solusi umum dengan $5 - 4 = 1$ parameter, yaitu variabel x_5 sebagai parameter.

Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.2.1), solusi untuk variabel x_1 dengan x_5 sebagai parameter adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - x_5 \frac{|A^{(3)}|}{|A^{(1)}|} = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} - x_5 \frac{\det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)}{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} - x_5 \frac{\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - x_5 \frac{|A^{(3)}|}{|A^{(1)}|} = \frac{f_1 A_{11}^{(2)} + a_{12} A_{12}^{(2)} + a_{13} A_{13}^{(2)} + a_{14} A_{14}^{(2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}} \\ &\quad - x_5 \frac{a_{15} A_{11}^{(3)} + a_{12} A_{12}^{(3)} + a_{13} A_{13}^{(3)} + a_{14} A_{14}^{(3)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Di mana kofaktor $A_{11}^{(1)}, A_{12}^{(1)}, A_{13}^{(1)}$ dan $A_{14}^{(1)}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{11}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{12}^{(1)} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{14}^{(1)} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya, kofaktor $A_{11}^{(2)}, A_{12}^{(2)}, A_{13}^{(2)}$ dan $A_{14}^{(2)}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{11}^{(2)} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{12}^{(2)} = - \begin{vmatrix} f_2 & a_{23} & a_{24} \\ f_3 & a_{33} & a_{34} \\ f_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}^{(2)} = \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{14}^{(2)} = - \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & a_{23} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} \\ f_4 & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Serta kofaktor $A_{11}^{(3)}, A_{12}^{(3)}, A_{13}^{(3)}$ dan $A_{14}^{(3)}$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{11}^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{12}^{(3)} = - \begin{vmatrix} a_{25} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}^{(3)} = \begin{vmatrix} a_{25} & a_{22} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, A_{14}^{(3)} = - \begin{vmatrix} a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk mencari solusi dari variabel x_2 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan modifikasi *cross product* antara $\mathbf{a}_3$ dan $\mathbf{a}_4$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_1$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.27), diperoleh:

$$x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_1 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1.$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_1$ terhadap vektor $\mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{a}_3$, maka diperoleh $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$, sehingga:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_2 , melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris kedua, serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$, diperoleh solusi untuk variabel x_2 sebagai berikut:

$$x_2 = \frac{-x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - x_5 \begin{vmatrix} a_{25} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_2 & a_{23} & a_{24} \\ f_3 & a_{33} & a_{34} \\ f_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Dengan demikian, berdasarkan kofaktor-kofaktor dari $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(3)}|$, solusi x_2 dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_2 = \frac{x_1 A_{12}^{(1)} + x_5 A_{12}^{(3)} - A_{12}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} = \frac{x_1 A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{12}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \quad (3.29)$$

Untuk mencari solusi dari variabel x_3 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan modifikasi *cross product* antara $\mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{a}_4$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_2$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.27), diperoleh:

$$x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_2 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2.$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_2$ terhadap vektor $\mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{a}_4$, maka diperoleh $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, sehingga:

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan untuk variabel x_3 , melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris kedua, serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$, diperoleh solusi untuk variabel x_3 sebagai berikut:

$$x_3 = \frac{-x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - x_5 \begin{vmatrix} a_{25} & a_{22} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{32} & a_{34} \\ a_{43} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Dengan melakukan satu kali penukaran kolom pada determinan penyebut, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x_3 = \frac{x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} a_{25} & a_{22} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}$$

Dengan demikian, berdasarkan kofaktor-kofaktor dari $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(3)}|$, solusi x_3 dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_3 = \frac{x_1 A_{13}^{(1)} + x_5 A_{13}^{(3)} - A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} = \frac{x_1 A_{13}^{(1)} - A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \quad (3.30)$$

Untuk mencari solusi dari variabel x_4 dengan x_5 sebagai parameter, definisikan modifikasi *cross product* antara $\mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{a}_3$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Dengan melakukan *dot product* antara $\mathbf{v}_3$ dengan kedua ruas dari sistem persamaan (3.27), diperoleh:

$$x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_3 + x_3 \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{v}_3 + x_5 \mathbf{a}_5 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_3.$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_3$ terhadap vektor $\mathbf{a}_2$ dan $\mathbf{a}_3$, maka diperoleh $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, sehingga:

$$\begin{aligned} x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} \\ + x_5 \begin{vmatrix} a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan variabel x_4 , melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris kedua, menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$, serta melakukan dua kali penukaran kolom pada determinan penyebut, diperoleh solusi untuk variabel x_3 sebagai berikut:

$$x_4 = \frac{-x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - x_5 \begin{vmatrix} a_{25} & a_{22} & a_{23} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & a_{23} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} \\ f_4 & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}.$$

Dengan demikian, berdasarkan kofaktor-kofaktor dari $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(3)}|$, solusi x_4 dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_4 = \frac{x_1 A_{14}^{(1)} + x_5 A_{14}^{(3)} - A_{14}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} = \frac{x_1 A_{14}^{(1)} - A_{14}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{14}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \quad (3.31)$$

Berdasarkan hasil dari persamaan (3.28), (3.29), (3.30), dan (3.31), maka solusi untuk variabel x_1 dari sistem persamaan linear berukuran 4×5 , dengan bentuk pada persamaan (3.26) dapat diperoleh melalui rumus berikut:

$$x_1 = \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - x_5 \frac{|A^{(3)}|}{|A^{(1)}|} = \frac{f_1 A_{11}^{(2)} + a_{12} A_{12}^{(2)} + a_{13} A_{13}^{(2)} + a_{14} A_{14}^{(2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}} - x_5 \frac{a_{15} A_{11}^{(3)} + a_{12} A_{12}^{(3)} + a_{13} A_{13}^{(3)} + a_{14} A_{14}^{(3)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}}.$$

Dan solusi x_2, x_3 dan x_4 yang diperoleh melalui rumus berikut:

$$x_2 = \frac{x_1 A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{12}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}}, x_3 = \frac{x_1 A_{13}^{(1)} - A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}},$$

$$x_4 = \frac{x_1 A_{14}^{(1)} - A_{14}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{14}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}}.$$

dengan $x_5 \in \mathbb{R}$ dan $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$. Serta $A_{jk}^{(i)}$ merupakan kofaktor dari baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks $A^{(i)}$. Dengan reduksi aturan Cramer untuk sistem 4×5 , jumlah determinan yang perlu dihitung adalah 12 determinan berukuran 3×3 , jauh lebih efisien dibandingkan dengan aturan Cramer pada Teorema (3.2.1), yang memerlukan perhitungan 36 determinan dengan ukuran yang sama.

Selanjutnya, reduksi aturan Cramer untuk sistem persamaan linear *underdetermined* melalui modifikasi perumuman *cross product* diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *full rank* berukuran 4×6 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 &= f_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 &= f_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 &= f_4 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Sistem pada persamaan (3.32) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + x_4 \mathbf{a}_4 + x_5 \mathbf{a}_5 + x_6 \mathbf{a}_6 = \mathbf{b} \quad (3.33)$$

Di mana vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$, dan $\mathbf{a}_6$ merupakan vektor kolom yang bersesuaian dengan variabel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dan x_6 , serta vektor $\mathbf{b}$ didefinisikan dengan:

$$\mathbf{b} = (f_1, f_2, f_3, f_4).$$

Misalkan terdapat empat vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, dan $\mathbf{a}_4$. Artinya $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$. Dengan demikian, matriks A dalam $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem persamaan (3.9) memiliki solusi umum dengan $6 - 4 = 2$ parameter, yaitu x_5 dan x_6 yang dipilih sebagai parameter. Selanjutnya, definisikan $|A^{(1)}|, |A^{(2)}|, |A^{(3)}|$, dan $|A^{(4)}|$ sebagai berikut:

$$|A^{(1)}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, |A^{(2)}| = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ f_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$|A^{(3)}| = \begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, |A^{(4)}| = \begin{vmatrix} a_{16} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{26} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{36} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{46} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan hasil dalam penyelesaian sistem 4×5 , maka solusi x_1 dari sistem berukuran 4×6 diberikan oleh rumus berikut:

$$x_1 = \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - x_5 \frac{|A^{(3)}|}{|A^{(1)}|} - x_6 \frac{|A^{(4)}|}{|A^{(1)}|}$$

$$= \frac{f_1 A_{11}^{(2)} + a_{12} A_{12}^{(2)} + a_{13} A_{13}^{(2)} + a_{14} A_{14}^{(2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}} - x_5 \frac{a_{15} A_{11}^{(3)} + a_{12} A_{12}^{(3)} + a_{13} A_{13}^{(3)} + a_{14} A_{14}^{(3)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}} - x_6 \frac{a_{16} A_{11}^{(4)} + a_{12} A_{12}^{(4)} + a_{13} A_{13}^{(4)} + a_{14} A_{14}^{(4)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + a_{13} A_{13}^{(1)} + a_{14} A_{14}^{(1)}}.$$

Dan solusi untuk variabel x_2, x_3 , dan x_4 yang diperoleh melalui rumus berikut:

$$x_2 = \frac{x_1 A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{12}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_6 A_{12}^{(4)}}{A_{11}^{(1)}}, x_3 = \frac{x_1 A_{13}^{(1)} - A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_6 A_{13}^{(4)}}{A_{11}^{(1)}},$$

$$x_4 = \frac{x_1 A_{14}^{(1)} - A_{14}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{14}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_6 A_{14}^{(4)}}{A_{11}^{(1)}}.$$

dengan $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ dan $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) \neq 0$, serta $A_{jk}^{(i)}$ merupakan kofaktor dari baris ke- i dan kolom ke- j pada matriks $A^{(i)}$. Dengan reduksi aturan Cramer untuk sistem 4×6 , jumlah determinan yang perlu dihitung adalah 16 determinan berukuran 3×3 , jauh lebih efisien dibandingkan dengan aturan Cramer pada Teorema (3.2.1), yang memerlukan perhitungan 52 determinan dengan ukuran yang sama. Reduksi aturan Cramer untuk solusi umum sistem persamaan linear *underdetermined* dapat dirumuskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.1 (Reduksi Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Underdetermined*)

Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m < n$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m + \dots + a_{1,n}x_n &= f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m + \dots + a_{2,n}x_n &= f_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,m}x_m + \dots + a_{m,n}x_n &= f_m \end{aligned} \quad (3.34)$$

Misalkan terdapat m vektor kolom yang bebas linear, yang berarti $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \neq 0$. Maka, sistem pada persamaan (3.12) memiliki solusi umum dengan $n - m$ parameter. Selanjutnya, untuk $j = m + 1, \dots, n$, definisikan $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(j-m+2)}|$ sebagai berikut:

$$|A^{(1)}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, |A^{(2)}| = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & \dots & a_{1,m} \\ f_2 & a_{22} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \text{ dan}$$

$$|A^{(j-m+2)}| = \begin{vmatrix} a_{1,j} & a_{12} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Dengan demikian, solusi untuk variabel x_1 dapat diperoleh melalui:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{|A^{(j-m+2)}|}{|A^{(1)}|} \\ &= \frac{f_1 A_{11}^{(2)} + a_{12} A_{12}^{(2)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(1)}} \\ &\quad - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{a_{1,j} A_{11}^{(j-m+2)} + a_{12} A_{12}^{(j-m+2)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(j-m+2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + a_{12} A_{12}^{(1)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(1)}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, solusi untuk variabel x_i diperoleh melalui:

$$x_i = \frac{x_1 A_{1i}^{(1)} - A_{1i}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j A_{1i}^{(j-m+2)}}{A_{11}^{(1)}}.$$

Di mana $i = 2, \dots, m$ dan $x_{m+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, serta $A_{11}^{(1)}, A_{1i}^{(1)}, A_{1i}^{(2)}$, dan $A_{1i}^{(j-m+2)}$ merupakan kofaktor dari entri-entri yang bersesuaian pada masing-masing matriks.

Bukti.

Misalkan x_i dengan $2 \leq i \leq m$, maka sistem pada persamaan (3.34) dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_i \mathbf{a}_i + \dots + x_m \mathbf{a}_m + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (3.35)$$

Di mana vektor $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ merupakan vektor kolom dari koefisien yang bersesuaian dengan variabel $x_1, \dots, x_n$, dan vektor $\mathbf{b}$ didefinisikan sebagai $\mathbf{b} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$.

Sistem (3.34) juga dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Misalkan terdapat m vektor kolom yang bebas linear, tanpa mengurangi perumuman, yaitu vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, yang berarti $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) \neq 0$. Dengan demikian, matriks A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = m$.

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.2), sistem pada persamaan (3.34) memiliki solusi umum dengan $n - m$ parameter, yaitu variabel $x_{m+1}, \dots, x_n$ yang dipilih sebagai parameter. Selanjutnya, untuk $j = m + 1, \dots, n$ definisikan $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(j-m+2)}|$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |A^{(1)}| &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \\ |A^{(2)}| &= \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m) = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,m} \\ f_2 & a_{22} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \dots & a_{m,i} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \text{ dan} \\ |A^{(j-m+2)}| &= \det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_m) = \begin{vmatrix} a_{1,j} & a_{12} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.2.1) maka solusi untuk variabel x_1 dapat diperoleh melalui:

$$x_1 = \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{|A^{(j-m+2)}|}{|A^{(1)}|}$$

Melalui ekspansi kofaktor terhadap baris pertama, diperoleh hasil:

$$x_1 = \frac{f_1 A_{11}^{(2)} + \dots + a_{1i} A_{1i}^{(2)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + \dots + a_{1i} A_{1i}^{(1)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(1)}} - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{a_{1,j} A_{11}^{(j-m+2)} + \dots + a_{1i} A_{1i}^{(j-m+2)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(j-m+2)}}{a_{11} A_{11}^{(1)} + \dots + a_{1i} A_{1i}^{(1)} + \dots + a_{1,m} A_{1,m}^{(1)}}$$

Di mana $A_{11}^{(1)}$, $A_{1i}^{(1)}$, $A_{1i}^{(2)}$, dan $A_{1i}^{(j-m+2)}$ merupakan kofaktor yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(1)} &= \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}, \\ A_{1i}^{(1)} &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}, \\ A_{1i}^{(2)} &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}, \text{ dan} \\ A_{1i}^{(j-m+2)} &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Selanjutnya, untuk mencari solusi variabel x_i , dengan $2 \leq i \leq m$, dan menganggap variabel $x_{m+1}, \dots, x_n$ sebagai parameter, didefinisikan modifikasi *cross product* antara vektor-vektor $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ sebagai berikut:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i+1} \times \dots \times \mathbf{a}_m = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,i-1} & a_{2,i-1} & \dots & a_{m,i-1} \\ a_{1,i+1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{m,i+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Melalui *dot product* antara $\mathbf{v}_i$ dengan kedua ruas persamaan (3.35), diperoleh:

$$\begin{aligned} & x_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{v}_i + x_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + x_{i-1} \mathbf{a}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_i + x_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_i + x_{i+1} \mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i \\ & + \cdots + x_m \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{v}_i + x_{m+1} \mathbf{a}_{m+1} \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + x_n \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Berdasarkan hasil kali skalar n vektor dan sifat ortogonalitas vektor $\mathbf{v}_i$ terhadap vektor-vektor $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m$, maka diperoleh hasil: $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_i = \cdots = \mathbf{a}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i = \cdots = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{v}_i = 0$. Dengan demikian, persamaan (3.37) dapat disederhanakan menjadi bentuk berikut:

$$\begin{aligned} & x_1 [(\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m))^T] \\ & + x_i [\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T] \\ & + \sum_{j=m+1}^n x_j [\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T] \\ & = \det(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T. \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan untuk variabel x_i diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_i = & - \frac{x_1 (\det \mathbf{a}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T}{\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T} \\ & + \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T}{\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T} \\ & - \sum_{j=m+1}^n x_j \frac{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T}{\det(\mathbf{a}_i, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m)^T}. \end{aligned}$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris kedua, serta menggunakan sifat $\det(A) = \det(A^T)$, diperoleh solusi untuk variabel x_i sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 = & \frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{2,i} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,i} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}} \\ & - \frac{\begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{2,i} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,i} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j \begin{vmatrix} a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{2,i} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,i} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}.$$

Selanjutnya, dengan melakukan $i - 2$ kali penukaran kolom pada determinan penyebut, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$x_i = \frac{x_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}{-(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ f_m & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}{-(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j \begin{vmatrix} a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}{-(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix}}.$$

Misalkan D , E , F dan G adalah minor dari kofaktor $A_{11}^{(1)}$, $A_{12}^{(1)}$, $A_{1i}^{(2)}$, dan $A_{1i}^{(j-m+2)}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$D = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{2,i-1} \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
E &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \\
F &= \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}, \text{ dan} \\
G &= \begin{vmatrix} a_{2,j} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan hasil pemisalan D , E , F dan G , dapat diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{x_1 E}{(-1)(-1)^{i-2} D} - \frac{F}{(-1)(-1)^{i-2} D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j G}{(-1)(-1)^{i-2} D} \\
x_i &= \frac{x_1 E}{(-1)^{i-1} D} - \frac{F}{(-1)^{i-1} D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j G}{(-1)^{i-1} D} \\
x_i &= \left(\frac{x_1 E}{(-1)^{i-1} D} - \frac{F}{(-1)^{i-1} D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j G}{(-1)^{i-1} D} \right) \frac{(-1)}{(-1)} \\
x_i &= \frac{x_1 (-1) E}{(-1)^i D} - \frac{(-1) F}{(-1)^i D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j (-1) G}{(-1)^i D} \\
x_i &= \frac{x_1 (-1)^{-i} (-1) E}{D} - \frac{(-1)^{-i} (-1) F}{D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j (-1)^{-i} (-1) G}{D} \\
x_i &= \frac{x_1 ((-1)^{-1})^i (-1) E}{D} - \frac{((-1)^{-1})^i (-1) F}{D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j ((-1)^{-1})^i (-1) G}{D} \\
x_i &= \frac{x_1 (-1)^i (-1) E}{D} - \frac{(-1)^i (-1) F}{D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j (-1)^i (-1) G}{D} \\
x_i &= \frac{x_1 (-1)^{i+1} E}{D} - \frac{(-1)^{i+1} F}{D} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j (-1)^{i+1} G}{D}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan kofaktor pada persamaan (3.36) diperoleh:

$$D = \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,2} & \dots & a_{m,i-1} & a_{m,i} & a_{m,i+1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix} = A_{11}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{1+i} E &= (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} = A_{1i}^{(1)}, \\
(-1)^{1+i} F &= (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} f_2 & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} = A_{1i}^{(2)}, \\
(-1)^{1+i} G &= (-1)^{1+i} \begin{vmatrix} a_{2,j} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix} = A_{1i}^{(j-m+2)}.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, solusi dari variabel x_i dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{x_1 A_{1i}^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} - \frac{A_{1i}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j A_{1i}^{(j-m+2)}}{A_{11}^{(1)}} \\
&= \frac{x_1 A_{1i}^{(1)} - A_{1i}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \sum_{j=m+1}^n \frac{x_j A_{1i}^{(j-m+2)}}{A_{11}^{(1)}}.
\end{aligned}$$

Karena x_i dipilih sembarang dengan $2 \leq i \leq m$, maka Teorema (3.3.1) terbukti.

Melalui reduksi aturan Cramer hanya diperlukan perhitungan determinan berukuran $m-1$ sebanyak $2m + (n-m)m$. Sedangkan, melalui aturan Cramer pada Teorema (3.2.1), diperlukan perhitungan determinan berukuran $m-1$ sebanyak $(m+1)m + (n-m)m^2$. Berikut adalah contoh numerik dari penyelesaian sistem persamaan linear *underdetermined* menggunakan Teorema (3.3.1).

Contoh 3.3.1

Misalkan sistem persamaan linear berukuran 4×5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= 4 \\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 &= 6 \\
x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 15x_4 + 9x_5 &= 2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Dari sistem pada persamaan (3.38) dapat diperoleh vektor-vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ vektor $\mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa:

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \\ 1 & 15 & 6 & -15 \end{vmatrix} = -100 \neq 0.$$

Dengan demikian, matriks A pada $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Sehingga persamaan (3.38) memiliki solusi umum dengan $5 - 4 = 1$ parameter, yaitu x_5 sebagai parameter. Selanjutnya, berdasarkan Teorema (3.3.1) definisikan $|A^{(1)}|$, $|A^{(2)}|$, dan $|A^{(3)}|$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |A^{(1)}| &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \\ 1 & 15 & 6 & -15 \end{vmatrix}, \\ |A^{(2)}| &= \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 15 & 6 & -15 \end{vmatrix}, \\ |A^{(3)}| &= \det(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -5 \\ 9 & 15 & 6 & -15 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dari $|A^{(1)}|$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |A^{(1)}| &= a_{11}A_{11}^{(1)} + a_{12}A_{12}^{(1)} + a_{13}A_{13}^{(1)} + a_{14}A_{14}^{(1)} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 15 & 6 & -15 \end{vmatrix} + 2 \left(- \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 6 & -15 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 15 & -15 \end{vmatrix} - 3 \left(- \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 15 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
& = 1(-57) + 2(-38) - 1(42) - 3(-25) \\
& = -100.
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai kofaktor $A_{11}^{(1)}$, $A_{12}^{(1)}$, $A_{13}^{(1)}$ dan $A_{14}^{(1)}$, yaitu:

$$A_{11}^{(1)} = -57, A_{12}^{(1)} = -38, A_{13}^{(1)} = 42, \text{ dan } A_{14}^{(1)} = -25.$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dari $|A^{(2)}|$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
|A^{(2)}| &= f_1 A_{11}^{(2)} + a_{12} A_{12}^{(2)} + a_{13} A_{13}^{(2)} + a_{14} A_{14}^{(2)} \\
&= 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 15 & 6 & -15 \end{vmatrix} + 2 \left(- \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -15 \end{vmatrix} \right) \\
&= -1 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -5 \\ 2 & 15 & -15 \end{vmatrix} - 3 \left(- \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
&= 2(-57) + 2(-304) - 1(144) - 3(-254) = -104.
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai kofaktor $A_{11}^{(2)}$, $A_{12}^{(2)}$, $A_{13}^{(2)}$ dan $A_{14}^{(2)}$, yaitu:

$$A_{11}^{(2)} = -57, A_{12}^{(2)} = -304, A_{13}^{(2)} = 144, \text{ dan } A_{14}^{(2)} = -254.$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dari $|A^{(3)}|$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
|A^{(3)}| &= a_{15} A_{11}^{(3)} + a_{12} A_{12}^{(3)} + a_{13} A_{13}^{(3)} + a_{14} A_{14}^{(3)} \\
&= 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 15 & 6 & -15 \end{vmatrix} + 2 \left(- \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 9 & 6 & -15 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 9 & 15 & -15 \end{vmatrix} - 3 \left(- \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 9 & 15 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
&= 4(-57) + 2(-0) - 1(3) - 3(-33) = -132.
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai kofaktor $A_{11}^{(3)}$, $A_{12}^{(3)}$, $A_{13}^{(3)}$ dan $A_{14}^{(3)}$, yaitu:

$$A_{11}^{(3)} = -57, A_{12}^{(3)} = 0, A_{13}^{(3)} = 3, \text{ dan } A_{14}^{(3)} = -33.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.3.1) maka solusi umum dari sistem pada persamaan (3.38) adalah sebagai berikut:

1. Solusi variabel x_1 :

$$x_1 = \frac{|A^{(2)}|}{|A^{(1)}|} - x_5 \frac{|A^{(3)}|}{|A^{(1)}|} = \frac{-104}{-100} - x_5 \frac{-132}{-100} = \frac{26}{25} - \frac{33}{25}x_5.$$

2. Solusi variabel x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1 A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{12}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \\ &= \frac{(\frac{26-33x_5}{25})(-38) - (-304)}{-57} + \frac{x_5(0)}{-57} = -\frac{116}{25} - \frac{22}{25}x_5. \end{aligned}$$

3. Solusi variabel x_3 :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1 A_{13}^{(1)} - A_{13}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{13}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \\ &= \frac{(\frac{26-33x_5}{25})(42) - (144)}{-57} + \frac{x_5(3)}{-57} = \frac{44}{25} + \frac{23}{25}x_5. \end{aligned}$$

4. Solusi variabel x_4 :

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_1 A_{14}^{(1)} - A_{14}^{(2)}}{A_{11}^{(1)}} + \frac{x_5 A_{14}^{(3)}}{A_{11}^{(1)}} \\ &= \frac{(\frac{26-33x_5}{25})(-25) - (-254)}{-57} + \frac{x_5(-33)}{-57} = -4. \end{aligned}$$

dengan $x_5 \in \mathbb{R}$.

Solusi umum untuk sistem berukuran 4×5 berdasarkan Teorema (3.3.1) pada Contoh (3.3.1) hanya memerlukan perhitungan dari 12 determinan berukuran 3×3 , sedangkan solusi yang sama melalui Teorema (3.2.1) pada Contoh (3.2.1) memerlukan 36 determinan.

3.3.2 Reduksi Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Over-determined*

Seperti telah dibahas dalam bagian perumusan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear *overdetermined*, solusi dari sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, dapat didekati (diaproksimasi) dengan menyelesaikan persamaan normal, sebagaimana dijelaskan pada Teorema (2.5.1). Persamaan normal diperoleh dengan mengalikan A^T pada kedua ruas persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$A_{n \times m}^T A_{m \times n} \hat{\mathbf{x}}_{n \times 1} = A_{n \times m}^T \mathbf{b}_{m \times 1}.$$

Persamaan tersebut dapat diselesaikan menggunakan aturan Cramer untuk sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ sebagaimana dijelaskan dalam Teorema (2.4.1). Dengan demikian, reduksi aturan Cramer dalam Teorema (2.4.2) dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan normal, seperti dirumuskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.2 (Reduksi Aturan Cramer untuk Sistem Persamaan Linear *Over-determined*)

Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, sebagai berikut:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.39)$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa matriks koefisien A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = n$, maka solusi dari persamaan (3.19) dapat didekati melalui persamaan normal:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b} \quad (3.40)$$

Selanjutnya, definisikan $|A|$ sebagai determinan dari matriks $A^T A$, dan $|B|$ sebagai determinan dari matriks yang didapat melalui penukaran kolom ke-1 dari $A^T A$ dengan kolom $A^T \mathbf{b}$. Dengan demikian, persamaan (3.39) memiliki solusi tunggal yang diberikan sebagai berikut:

$$\hat{x}_1 = \frac{b_1 B_{11} + a_{12} B_{12} + a_{13} B_{13} + \cdots + a_{1n} B_{1n}}{a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + \cdots + a_{1n} A_{1n}},$$

$$\hat{x}_2 = \frac{x_1 A_{12} - B_{12}}{A_{11}}, \hat{x}_3 = \frac{x_1 A_{13} - B_{13}}{A_{11}}, \dots, \hat{x}_n = \frac{x_1 A_{1n} - B_{1n}}{A_{11}}$$

Di mana A_{1k} adalah kofaktor dari $|A|$ dan B_{1k} adalah kofaktor dari $|B|$.

Bukti.

Diberikan sistem persamaan linear berukuran $m \times n$, dengan $m > n$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= f_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= f_2 \\
 &\vdots \\
 a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= f_n \\
 &\vdots \\
 a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= f_m
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Sistem (3.41) juga dapat dinyatakan dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

Dengan A^T sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} & \dots & a_{m,1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat matriks bagian berukuran $n \times n$ dengan $\det(M_{n \times n}) \neq 0$, yang berarti A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = n$, dan berdasarkan Teorema (2.3.5) terdapat n vektor kolom yang bebas linear.

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema (2.5.1), solusi dari sistem pada persamaan (3.41) dapat didekati melalui persamaan normal, yang diperoleh dengan mengalikan A^T pada kedua ruas sistem persamaan (3.41) berikut:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Di mana u_{ij} merupakan hasil kali antara entri-entri pada baris ke- i dari matriks A^T dengan entri-entri pada kolom ke- j dari matriks A . Sementara itu, v_{i1} adalah hasil kali antara entri-entri pada baris ke- i dari matriks A^T dengan entri-entri pada kolom pertama dari vektor kolom $\mathbf{b}$.

Karena terdapat terdapat n vektor kolom yang bebas linear, maka $\det(A^T A) \neq 0$. Dengan demikian, berdasarkan reduksi aturan Cramer untuk sistem persamaan linear berukuran $n \times n$ dalam Teorema (2.4.2), maka solusi dari $\hat{x}_1$ dari persamaan normal (3.43) diperoleh melalui:

$$\hat{x}_1 = \frac{b_1 B_{11} + a_{12} B_{12} + a_{13} B_{13} + \cdots + a_{1n} B_{1n}}{a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + \cdots + a_{1n} A_{1n}},$$

dan solusi $\hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots, \hat{x}_n$ diperoleh melalui rumus berikut:

$$x_2 = \frac{x_1 A_{12} - B_{12}}{A_{11}}, x_3 = \frac{x_1 A_{13} - B_{13}}{A_{11}}, \dots, x_n = \frac{x_1 A_{1n} - B_{1n}}{A_{11}}$$

Solusi tersebut tunggal dan merupakan solusi kuadrat terkecil dari persamaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dengan demikian, Teorema (3.3.2) terbukti.

Berikut adalah contoh numerik dari penyelesaian sistem persamaan linear *overdetermined* menggunakan Teorema (3.3.2).

Contoh 3.3.2

Misalkan sistem persamaan linear berukuran 5×4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Sistem pada persamaan (3.44) dapat dituliskan dalam persamaan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

Karena terdapat sembarang matriks bagian berukuran 4×4 dengan $\det(M_{4 \times 4}) \neq 0$, maka matriks koefisien A memiliki *full rank* dengan $\text{rank}(A) = 4$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.2.2), solusi dari persamaan (3.44) dapat didekati melalui persamaan normal $A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$ berikut:

$$A^T A \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b} \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 15 & 20 \\ 13 & 19 & 15 & 20 \\ 15 & 15 & 19 & 21 \\ 20 & 20 & 21 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \\ 27 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan Teorema (3.3.2) definisikan $|A|$ dan $|B|$ sebagai berikut:

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 13 & 15 & 20 \\ 13 & 19 & 15 & 20 \\ 15 & 15 & 19 & 21 \\ 20 & 20 & 21 & 32 \end{vmatrix} \quad \text{dan} \quad |B| = \begin{vmatrix} 26 & 13 & 15 & 20 \\ 26 & 19 & 15 & 20 \\ 27 & 15 & 19 & 21 \\ 34 & 20 & 21 & 32 \end{vmatrix}$$

Dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dari $|A|$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |A| &= u_{11}A_{11} + u_{12}A_{12} + u_{13}A_{13} + u_{14}A_{14} \\ &= 14 \begin{vmatrix} 19 & 15 & 20 \\ 15 & 19 & 21 \\ 20 & 21 & 32 \end{vmatrix} + 13 \left(- \begin{vmatrix} 13 & 15 & 20 \\ 15 & 19 & 21 \\ 20 & 21 & 32 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + 15 \begin{vmatrix} 13 & 19 & 20 \\ 15 & 15 & 21 \\ 20 & 20 & 32 \end{vmatrix} + 20 \left(- \begin{vmatrix} 13 & 19 & 15 \\ 15 & 15 & 19 \\ 20 & 20 & 21 \end{vmatrix} \right) \\ &= 14(973) + 13(-(-29)) + 15(-360) + 20(-390) = 799. \end{aligned}$$

Diperoleh nilai kofaktor A_{11} , A_{12} , A_{13} dan A_{14} , yaitu:

$$A_{11} = 973, A_{12} = 29, A_{13} = -360, \text{ dan } A_{14} = -390.$$

Selanjutnya, dengan melakukan ekspansi kofaktor terhadap baris pertama dari $|B|$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 |B| &= v_1 B_{11} + u_{12} B_{12} + u_{13} B_{13} + u_{14} B_{14} \\
 &= 26 \begin{vmatrix} 19 & 15 & 20 \\ 15 & 19 & 21 \\ 20 & 21 & 32 \end{vmatrix} + 13 \left(- \begin{vmatrix} 26 & 15 & 20 \\ 27 & 19 & 21 \\ 34 & 21 & 32 \end{vmatrix} \right) \\
 &\quad + 15 \begin{vmatrix} 26 & 19 & 20 \\ 27 & 15 & 21 \\ 34 & 20 & 32 \end{vmatrix} + 20 \left(- \begin{vmatrix} 26 & 19 & 15 \\ 27 & 15 & 19 \\ 34 & 20 & 21 \end{vmatrix} \right) \\
 &= 26(973) + 13(-512) + 15(-690) + 20(-261) = 3072.
 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai kofaktor B_{11} , B_{12} , B_{13} dan B_{14} , yaitu:

$$B_{11} = 973, B_{12} = -512, B_{13} = -690, \text{ dan } B_{14} = -261.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema (3.3.2) maka solusi variabel $\hat{x}_1$ dari sistem pada persamaan (3.45) adalah sebagai berikut:

$$\hat{x}_1 = \frac{|B|}{|A|} = \frac{-104}{-100} = \frac{3072}{799},$$

serta solusi dari variabel $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ dan $\hat{x}_4$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_2 &= \frac{x_1 A_{12} - B_{12}}{A_{11}} & \hat{x}_3 &= \frac{x_1 A_{13} - B_{13}}{A_{11}} \\
 &= \frac{(\frac{3072}{799})(29) - (-512)}{973} = \frac{512}{799} & &= \frac{(\frac{3072}{799})(-360) - (-690)}{973} = -\frac{570}{799} \\
 \hat{x}_4 &= \frac{x_1 A_{14} - B_{14}}{A_{11}} = \frac{(\frac{3072}{799})(-390) - (-261)}{973} = -\frac{1017}{799}.
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh vektor $A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ sebagai berikut:

$$A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \left(-\frac{324}{799}, \frac{297}{799}, \frac{54}{799}, \frac{351}{799}, -\frac{513}{799} \right),$$

dengan $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = 0.95519$ dan $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2 = 0.9124$. Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ dapat dianggap sebagai pendekatan yang baik terhadap solusi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Solusi pada Contoh (3.3.2) hanya memerlukan 8 determinan berukuran 3×3 . Hasil yang sama dengan menggunakan Teorema (3.2.2), diperlukan perhitungan 20 determinan berukuran sama.