

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar ring merupakan himpunan yang dilengkapi dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian[1] yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berdasarkan sifat perkaliannya, ring diklasifikasikan menjadi ring komutatif dan ring nonkomutatif. Pada ring komutatif, urutan perkalian elemen tidak memengaruhi hasil operasi, sedangkan pada ring nonkomutatif urutan perkalian dapat menghasilkan nilai yang berbeda. Salah contoh ring nonkomutatif adalah ring matriks atas suatu lapangan, $M_n(F)$.

Dalam ring, terdapat subhimpunan yang berperan dalam membentuk struktur faktor, yang dikenal sebagai ideal. Ideal ini kemudian mengalami perluasan jika dihubungkan dengan ring polinomial yang koefisiennya matriks, $M_n(F)[x]$ melalui konstruksi ideal nol, $N(S)$ yaitu himpunan seluruh polinomial koefisien matriks yang bernilai nol ketika dievaluasi pada setiap elemen dalam suatu subhimpunan matriks, $S \subseteq M_n(F)$ [2, 3].

Karakteristik dari $N(S)$ ini sangat penting ketika tidak berlakunya sifat komutatif pada ring koefisiennya yaitu ring matriks, $M_n(F)[x]$. Aturan evaluasi polinomial tidak lagi sederhana karena variabel x tidak dapat bertukar secara bebas dengan koefisien matriksnya[3]. Oleh karena itu, evaluasi polinomial ditetapkan secara konsisten menggunakan aturan evaluasi kanan, di mana variabel ditempatkan di sebelah kanan koefisiennya[2].

Ketidakpastian $N(S)$ untuk menjadi ideal dua sisi menjadi landasan bagi Nicholas J. Werner (2022)[2] dalam mengklasifikasikan himpunan *core*, yaitu subhimpunan matriks yang ideal nolnya, $N(S)$ sebagai ideal dua sisi (ideal kiri sekaligus ideal kanan) di dalam $M_n(F)[x]$. Pembuktian kriteria *core* yang disajikan oleh Werner masih bersifat umum untuk matriks berukuran $n \times n$ atas lapangan sembarang.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji karakterisasi himpunan *core* secara khusus pada hasil-hasil di matriks 2×2 atas lapangan, $M_2(F)$. Dengan fokus utama penelitian ini adalah pada penentuan kriteria himpunan *core* berdasarkan pendekatan polinomial minimal $\mu_A(x)$, dimana polinomial minimal akan dikelompokkan

menjadi subhimpunan matriks berdasarkan kesamaan polinomial minimal atau disebut kelas kelas polinomial minimal, $\mathcal{C}_2(m)$. Selain itu menganalisis bagaimana gabungan dari kelas-kelas polinomial tersebut dapat mempengaruhi pembentukan ideal dua sisi. Melalui spesialisasi dimensi 2×2 , pada matriks blok vandermonde dan syarat matriks selisih memiliki invers. Terakhir, penelitian ini dirancang untuk pembahasan yang belum dibahas secara mendalam dalam jurnal utama, seperti dengan mengonstruksi contoh-contoh eksplisit pada lapangan bilangan riil ($\mathbb{R}$).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan sebelumnya, penulis merumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Bagaimana karakteristik struktur $N(S)$ pada $M_2(F)[x]$ ditinjau dari polinomial pembangun $(\phi_S(x))$?
2. Bagaimana penerapan matriks blok Vandermonde dalam menentukan sifat *core* pada subhimpunan matriks berukuran 2×2 ?
3. Syarat apa yang diperlukan agar gabungan dari kelas-kelas polinomial minimal pada $M_2(F)$ dapat membentuk himpunan *core*?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penyelesaian masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Ring matriks berukuran 2×2 dari lapangan (F) sembarang yang diuji dengan menggunakan contoh eksplisit pada matriks berukuran 2×2 atas bilangan riil, $M_2(\mathbb{R})$.
2. Evaluasi polinomial menggunakan aturan evaluasi kanan.
3. Karakterisasi kriteria himpunan *core* dibatasi pada pendekatan matriks blok Vandermonde.
4. Kriteria himpunan *core* dibatasi pada pendekatan berbasis polinomial minimal dan koprima dari $(\phi_S(x))$

1.4 Tujuan Penelitian

Dalam penelitian ini, tujuan dan manfaat yang diharapkan adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan dan mengkaji karakterisasi himpunan *core* secara khusus dan eksplisit terkait kriteria himpunan *core* pada $M_2(F)$ melalui pendekatan polinomial minimal, $\mu_A(x)$.
2. Menurunkan syarat perlu dan syarat cukup kriteria himpunan *core* pada $M_2(F)$
3. Membuktikan sifat *core* pada operasi gabungan subhimpunan yang saling koprima, serta menganalisis kondisi batas kegagalannya.
4. Memberikan referensi praktis bagi pembaca untuk mengklasifikasikan himpunan matriks nonkomutatif yang memiliki sifat ideal dua sisi.

1.5 Metodologi Penelitian

Mengidentifikasi permasalahan dengan struktur ideal nol dan himpunan *core* pada ring matriks yang sifatnya nonkomutatif. Penulis mengkaji referensi yang relevan, termasuk buku struktur aljabar untuk membangun bagaimana landasan teori mengenai ring, ideal ring, polinomial minimal, serta jurnal ilmiah sebagai sumber utama pembahasan pembahasan, khususnya pada jurnal Werner (2022)[2].

Pada tahap ini penulis mengklasifikasikan elemen yang ada pada Matriks 2×2 atas lapangan, $M_2(F)$ berdasarkan polinomial minimal. Lalu menjabarkan bagaimana kriteria himpunan *core* dari derajat polinomial pembangun, serta kondisi koprima pada gabungan dua atau lebih suatu subhimpunan. Selain itu juga menyajikan contoh eksplisit pada matriks 2×2 atas bilangan riil sebagai hasil analisis.

Berdasarkan analisis yang dilakukan, penulis dapat menarik kesimpulan mengenai kriteria apa saja yang dapat menentukan suatu subhimpunan yang sifatnya *core* ditinjau dari pendekatan polinomial minimalnya. Selain itu penulis juga memberikan rekomendasi mengenai hal-hal yang berada diluar batas penelitian ini.

1.6 Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini terdapat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi mengenai teori-teori dasar yang melandasi pembahasan skripsi ini. Secara garis besar, mencakup ring, ideal ring, polinomial minimal pada suatu matriks, polinomial ring dengan koefisien matriks.

BAB III HIMPUNAN *CORE* PADA RING MATRIKS 2×2 ATAS LAPANGAN BERDASARKAN POLINOMIAL MINIMAL

Bab ini berisi pembahasan yang meliputi bagaimana struktur $N(S)$ yang berkaitan dengan polinomial pembangunnya yang berasal dari Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) polinomial minimal pada suatu matriks dalam subhimpunan di $M_2(F)$, lalu mengklasifikasikan kelas-kelas polinomial minimal yang sama di $M_2(F)$ dan bagaimana kondisi yang menyebabkan hal tersebut menjadi himpunan *core*.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi mengenai kesimpulan dari pembahasan yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya. Selain itu diberikan juga saran mengenai pengembangan yang bisa dilakukan untuk kajian selanjutnya.

