

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah salah satu cabang dari matematika diskrit yang telah berkembang secara luas dan digunakan dalam berbagai ilmu, terutama dalam ilmu komputer, jaringan dan pemodelan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss, Leonhard Euler yang berhasil menyelesaikan suatu masalah mengenai tujuh buah jembatan yang menghubungkan pulau kecil dengan daratan yang dibelah oleh sungai. Dalam permasalahan ini, jembatan-jembatan yang menghubungkan wilayah-wilayah Königsberg dianggap sebagai sisi, sedangkan daratan yang dihubungkan menjadi titik. Euler membuktikan bahwa orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap. Derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan titik [1].

Teori graf mencakup berbagai topik, seperti pewarnaan, pelabelan, pencarian lintasan, hingga struktur jaringan. Graf sangat penting dalam perangkat lunak pengambilan keputusan, linguistik komputasional, teori pengkodean, serta penentuan jalur jaringan dalam ilmu komputer. Penelitian terkini menunjukkan bahwa penambahan dimensi waktu terhadap berbagai fitur dan permasalahan graf seperti pelabelan graf dapat menyebabkan perubahan besar. Kondisi ini mendorong para peneliti untuk mengkaji jenis-jenis graf baru, pelabelannya, serta kebutuhan untuk mengembangkan algoritma dalam menghadapi bentuk graf yang semakin beragam [2], [3].

Salah satu kajian penting dalam teori graf adalah pelabelan (*labeling*), yaitu proses pemberian bilangan tertentu pada titik, sisi atau keduanya, dengan aturan dan tujuan tertentu. Pelabelan disebut *vertex labeling* jika diterapkan pada titik, *edge la-*

beling jika pada sisi dan *total labeling* jika melibatkan keduanya. Tujuan pelabelan ini beragam seperti untuk membedakan struktur, mengatur bobot, atau memenuhi sifat unik dalam graf. Beberapa jenis pelabelan diantaranya yaitu pelabelan tak teratur sisi (*irregular labeling*), pelabelan lucky, pelabelan proper, pelabelan ajaib (magic labeling), pelabelan harmonis dan pelabelan refleksif tak teratur sisi. Salah satu jenis pelabelan khusus yang banyak dikembangkan adalah pelabelan tak teratur, yang muncul karena dalam graf sederhana tidak selalu memungkinkan setiap titik memiliki derajat berbeda [2].

Perkembangan konsep pelabelan tak teratur dimulai ketika diperkenalkan *irregular assignment* dengan melabeli sisi graf sederhana menggunakan bilangan bulat positif sehingga bobot setiap titik yaitu jumlah label sisi yang bersisian dengannya berbeda satu sama lain, dimana nilai k terkecil yang memungkinkan pelabelan tersebut disebut *irregularity strength* dilambangkan dengan $s(G)$. Konsep ini kemudian berkembang menjadi *edge irregular total labeling* yang melabeli seluruh elemen graf yaitu titik dan sisi dengan bilangan bulat positif sedemikian sehingga bobot setiap sisi didefinisikan sebagai jumlah label kedua titik ujung dan label sisi itu sendiri berbeda, dengan nilai k terkecilnya disebut *total edge irregularity strength* dilambangkan dengan $tes(G)$. Inovasi terbaru diajukan oleh Tanna dkk. (2017) melalui *edge irregular reflexive labeling* atau dalam penelitian ini disebut pelabelan refleksif tak teratur sisi yang membatasi label titik hanya pada bilangan genap non-negatif $\{0, 2, 4, \dots\}$ untuk merepresentasikan kontribusi loop dalam multigraf, sementara label sisi tetap menggunakan bilangan bulat positif, dengan tujuan agar semua bobot sisi berbeda dan nilai k terkecil yang mencapainya disebut *reflexive edge strength* dilambangkan dengan $res(G)$ [4].

Nilai *reflexive edge strength* atau kekuatan ketakaturan refleksif sisi telah menjadi topik penelitian yang cukup banyak dikaji dalam beberapa tahun terakhir. Dapat dilihat pada penelitian karya Diari dkk.[5] yang membahas pelabelan ketakaturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona yang melibatkan graf lintasan. Penelitian lain yang terkait pelabelan ketakaturan refleksif sisi dilakukan pada graf pangkat ke- r dari graf lintasan P_n^r . Penelitian tersebut berfokus pada konstruksi pelabelan refleksif yang menghasilkan bobot sisi berbeda untuk setiap sisi sehingga diperoleh nilai *edge irregular reflexive strength* dari graf P_n^r [6].

Sementara itu, penelitian mengenai nilai ketakaturan refleksif sisi pada graf yang dibentuk melalui operasi hasil kali korona (corona product) juga telah mulai dikembangkan. Karya Yoong dkk. [7] meneliti nilai ketakaturan refleksif sisi pada graf politop konveks serta graf hasil kali korona antara graf lingkaran den-

gan graf lintasan. Kemudian Yoong dkk. [2] meneliti nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dan graf bintang.

Dengan perkembangan penelitian nilai ketakteraturan refleksif sisi, belum dikaji nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dengan graf roda. Pemilihan graf hasil kali korona antara graf lintasan dan graf roda didasarkan pada karakteristik struktur kedua graf yang menghasilkan beberapa jenis hubungan antartitik dan antarsisi. Pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dengan graf roda, setiap titik pada graf lintasan (P_n) dikaitkan dengan satu salinan graf roda (W_m), sehingga terbentuk sisi-sisi yang berasal dari graf lintasan, sisi yang menghubungkan titik pada lintasan dengan titik-titik pada graf roda, serta sisi-sisi yang terdapat pada graf roda. Struktur tersebut menyebabkan penentuan pelabelan perlu mempertimbangkan keterkaitan antara beberapa kelompok sisi secara bersamaan.

Dalam pelabelan ketakteraturan refleksif sisi, kompleksitas tersebut berkaitan dengan tuntutan bahwa setiap sisi harus memiliki bobot yang berbeda, sedangkan label titik dibatasi pada bilangan genap non-negatif dan label sisi pada bilangan bulat positif. Dengan demikian, label yang diberikan pada suatu bagian graf dapat memengaruhi bobot sisi-sisi lain yang bersisian dengannya. Selain itu, perubahan struktur dari graf bintang menjadi graf roda menambahkan struktur siklik pada graf yang menghubungkan titik-titik di sekitar titik pusat, sehingga pola pelabelan yang diperoleh pada penelitian sebelumnya untuk graf hasil kali korona antara graf lintasan dan graf bintang tidak dapat langsung diterapkan pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dan graf roda. Oleh karena itu, diperlukan konstruksi dan analisis pola pelabelan secara khusus untuk menentukan nilai minimum k yang memungkinkan seluruh sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dengan graf roda memiliki bobot yang berbeda.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis tertarik untuk mengkaji tugas akhir skripsi dengan judul “Nilai Ketakteraturan Refleksif Sisi pada Graf Hasil Kali Korona antara Graf Lintasan (P_n) dengan Graf Roda (W_m)”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana pelabelan refleksif tak teratur sisi dari suatu graf?

2. Bagaimana nilai ketakteraturan sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan (P_n) dan graf roda (W_m)?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menjawab rumusan masalah dalam penelitian ini, ditetapkan batasan masalah sebagai berikut.

1. Pelabelan yang dikaji adalah pelabelan refleksif tak teratur sisi pada graf.
2. Graf yang dikaji adalah graf hasil kali korona antara graf lintasan (P_n) dengan graf roda (W_m).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui pelabelan refleksif tak teratur sisi pada suatu graf.
2. Untuk mengetahui nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan (P_n) dan graf roda (W_m).

1.5 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini melalui beberapa tahapan sebagai berikut.

1. Studi Literatur Penelitian diawali dengan studi literatur yang mendalam untuk mengumpulkan landasan teoritis mengenai nilai ketakteraturan refleksif sisi dan beberapa teori yang dapat menunjang penelitian. Referensi diperoleh dari berbagai sumber seperti buku teks, jurnal ilmiah, publikasi daring, dan penelitian sebelumnya.
2. Analisis Tahap selanjutnya melibatkan analisis dan pembuktian teorema terkait nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan dan graf roda. Proses ini dimulai dengan menggambar beberapa graf dengan nilai n dan m yang telah ditentukan, melakukan pelabelan pada graf, menghitung bobot setiap sisi berbeda, dan membuat rumus sesuai dengan pola pelabelan yang telah ditentukan, dilanjutkan dengan penerapan pada contoh konkret. Teorema yang telah dibuktikan kemudian diuji melalui

simulasi pada sebuah contoh kasus pada graf untuk menentukan nilai ketak-teraturan refleksif sisi dengan menerapkan operasi hasil kali korona antara graf lintasan (P_n) dengan graf roda (W_m).

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

2. BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini berisi teori-teori yang mendukung pembahasan masalah pada penelitian yang dilakukan. Teori yang dibahas diantaranya graf, terminologi dasar, jenis-jenis graf, dan pelabelan graf.

3. BAB III NILAI KETAKTERATURAN REFLEKSIF SISI PADA GRAF HASIL KALI KORONA ANTARA GRAF LINTASAN (P_n) DENGAN GRAF RODA (W_m)

Pada bab ini dijelaskan mengenai nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf hasil kali korona antara graf lintasan (P_n) dengan graf roda (W_m), ilustrasi hasil konstruksi, serta implementasi program sebagai verifikasi hasil penelitian.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini merupakan penutup yang berisi kesimpulan yang diperoleh dari penelitian yang dilakukan dan saran penulis untuk penelitian-penelitian selanjutnya.