

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang digunakan untuk merepresentasikan hubungan antarobjek melalui himpunan titik dan himpunan sisi. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, teori graf tidak hanya dipelajari sebagai konsep matematika, tetapi juga telah diterapkan pada berbagai bidang, seperti jaringan komunikasi, ilmu komputer, sistem transportasi, desain rangkaian elektronik, serta kimia [1], [2]. Salah satu topik yang terus berkembang dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu proses pemberian label berupa bilangan bulat pada titik, sisi, maupun keduanya berdasarkan aturan tertentu [3].

Salah satu jenis pelabelan yang banyak dikembangkan dalam teori graf adalah pelabelan tak teratur. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [12] untuk mengukur tingkat ketakteraturan suatu graf melalui pemberian label. Pengembangan berikutnya dilakukan oleh Bača, Jendrol', Miller, dan Ryan [8] dengan memperkenalkan konsep pelabelan total tak teratur sisi. Pada pelabelan tersebut, setiap sisi diwajibkan memiliki bobot total yang berbeda. Nilai label terbesar minimum yang memenuhi kondisi tersebut dinamakan nilai total ketakteraturan sisi yang dinotasikan dengan $tes(G)$. Selain itu, Bača dkk. juga menunjukkan batas bawah nilai $tes(G)$ yang berlaku untuk setiap graf yaitu

$$\left\lceil \frac{|E(G)| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E(G)|.$$

Kajian mengenai nilai total ketakteraturan sisi terus mengalami perkembangan pada berbagai kelas graf. Ahmad dkk. [6] meneliti nilai ketakteraturan sisi pada beberapa jenis graf, sedangkan Rajendran dkk. [13] mengembangkan penelitian tersebut pada graf-graf yang berkaitan dengan siklus. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa karakteristik setiap kelas graf

menghasilkan konstruksi pelabelan yang berbeda sehingga masih banyak kelas graf lain yang menarik untuk dikaji.

Selain pelabelan tak teratur konvensional, berkembang pula konsep pelabelan modular yang memanfaatkan operasi modulo dalam perhitungan bobot. Konsep nilai ketakteraturan modular diperkenalkan oleh Bača dkk. [9], kemudian dikembangkan lebih lanjut menjadi nilai total ketakteraturan titik modular oleh Bača dkk. [10], [11]. Penelitian mengenai pelabelan modular juga dilakukan oleh Koam dkk. [13] pada beberapa kelas graf, seperti graf ulat, graf siklus, dan graf persahabatan. Hasil penelitian tersebut memperlihatkan bahwa penggunaan operasi modulo menghasilkan karakteristik pelabelan yang berbeda dibandingkan pelabelan tak teratur biasa..

Sejalan dengan perkembangan tersebut, kajian mengenai nilai total ketakteraturan sisi modular menjadi salah satu topik yang masih terbuka untuk dikembangkan. Pada pelabelan ini, bobot setiap sisi dihitung menggunakan operasi modulo sehingga setiap sisi harus memiliki bobot modular yang berbeda. Semakin kompleks struktur suatu graf, semakin menantang pula proses penyusunan konstruksi pelabelan yang memenuhi syarat tersebut.

Salah satu operasi graf yang banyak digunakan dalam penelitian pelabelan adalah hasil kali *comb*. Operasi ini membentuk graf baru dengan menghubungkan setiap titik pada suatu graf dengan salinan graf lain melalui satu titik tertentu [4]. Struktur graf hasil operasi tersebut memiliki jumlah titik dan sisi yang lebih kompleks sehingga menarik untuk dikaji dalam penentuan nilai ketakteraturan maupun konstruksi pelabelannya.

Di sisi lain, graf layang-layang $K_{n,t}$ merupakan graf yang dibentuk dari gabungan graf lengkap dan graf lintasan [5]. Karakteristik tersebut menghasilkan pola pelabelan yang berbeda dibandingkan banyak kelas graf lainnya. Oleh karena itu, ketika graf layang-layang dikombinasikan dengan graf lintasan melalui operasi hasil kali *comb*, diperoleh struktur graf yang lebih kompleks sehingga menarik untuk dikaji dari sudut pandang pelabelan total tak teratur sisi maupun pelabelan total tak teratur sisi modular.

Berdasarkan penelusuran berbagai literatur yang digunakan dalam penelitian ini, belum ditemukan penelitian yang membahas nilai total ketakteraturan sisi maupun nilai total ketakteraturan sisi modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan dan graf layang-layang. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai $tes(G)$ dan $mtes(G)$ melalui konstruksi pelabelan yang memenuhi syarat ketakteraturan sisi pada graf tersebut. Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik melakukan penelitian dengan judul “Nilai Total Ketakteraturan Sisi Modular pada Graf Hasil Kali *Comb* antara Graf Lintasan P_m dengan Graf Layang-Layang $K_{n,t}$.”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana pelabelan total tak teratur sisi pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$?
2. Bagaimana nilai total ketakteraturan sisi dari graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$?
3. Bagaimana pelabelan total tak teratur sisi modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$?
4. Bagaimana nilai total ketakteraturan sisi modular dari graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$?

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan lebih terarah, penelitian ini dibatasi pada beberapa ketentuan berikut.

1. Graf yang di kaji adalah graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$, yang disimbolkan dengan $(P_m \triangleright_{u_1} K_{n,t})$ dengan $m \geq 2, n \geq 3, t \geq 1$.
2. Pelabelan yang digunakan adalah pelabelan total tak teratur sisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menjawab rumusan masalah yang telah ditetapkan. Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan pelabelan total tak teratur sisi pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$.
2. Menentukan nilai total ketakaturan sisi dari graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$.
3. Menentukan pelabelan total tak teratur sisi modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$.
4. Menentukan nilai total ketakaturan sisi modular dari graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$.

1.5 Metode Penelitian

Pada tahap Studi Literatur, dilakukan identifikasi permasalahan dengan mempelajari teori-teori yang berhubungan dengan nilai total ketakaturan sisi dan nilai total ketakaturan sisi modular pada graf yang diperoleh dari berbagai sumber, seperti buku, jurnal, media online, dan skripsi. Selanjutnya, dilakukan analisis dan pembuktian teorema untuk menentukan pelabelan serta nilai total ketakaturan sisi dan nilai total ketakaturan sisi modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$. Hasil pembuktian kemudian diterapkan pada beberapa contoh graf untuk menunjukkan kesesuaian hasil yang diperoleh.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, ruang lingkup penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini, berisi tentang teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini. Bab ini mencakup konsep dasar seperti, himpunan, fungsi, definisi graf, aritmetika modulo, dan pelabelan pada graf.

BAB III NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SISI MODULAR PADA GRAF HASIL KALI *COMB* ANTARA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LAYANG-LAYANG.

Pada bab ini, berisi pembahasan utama yang di kaji, yaitu bagaimana cara menentukan nilai ketakteraturan sisi modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf layang-layang $K_{n,t}$.

BAB IV PENUTUP

Pada bab penutup, yang merupakan bagian akhir dari skripsi ini. Berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dikaji pada bab sebelumnya. Pada bab ini juga terdapat saran dari penulis untuk pembahasan yang lebih baik dan berkembang.