

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskrit yang mempelajari struktur yang terdiri atas bagian himpunan titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik tersebut. Teori graf telah banyak diterapkan dalam berbagai bidang kehidupan, seperti transportasi, kimia, rangkaian listrik, jaringan komunikasi, serta pengujian program. Perkembangan teori graf dimulai pada tahun 1736 ketika Leonhard Euler berhasil menyelesaikan masalah tujuh jembatan Königsberg dengan merepresentasikan wilayah dan jembatan ke dalam bentuk graf. Melalui pendekatan tersebut, Euler menunjukkan bahwa tidak terdapat lintasan yang dapat melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke titik awal apabila graf tersebut tidak memenuhi syarat tertentu terkait derajat titik [1].

Salah satu kajian yang berkembang dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan yang memberikan label berupa bilangan pada elemen-elemen graf, seperti titik maupun sisi. Berdasarkan elemen yang diberikan label, pelabelan graf dibedakan menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total [2]. Berbagai penelitian mengkaji beragam jenis pelabelan pada berbagai kelas graf sehingga pelabelan graf tetap menjadi salah satu topik penelitian yang menarik untuk dikaji dalam teori graf.

Seiring dengan perkembangan penelitian mengenai pelabelan graf, berbagai jenis aturan pelabelan terus dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive labeling*). Pelabelan ini bertujuan untuk memberikan label pada titik dan sisi suatu graf sehingga setiap sisi memiliki bobot yang berbeda. Berbagai penelitian mengenai nilai ketakaturan refleksif sisi telah dilakukan pada beberapa kelas graf. Indriati dkk. [3] mengkaji nilai ketakaturan refleksif sisi pada *pentagonal snake graph* serta korona dari *open triangular ladder graph* dan graf nol, yang menunjukkan bahwa konsep pelabelan refleksif dapat diterapkan pada kombinasi beberapa struktur graf yang berbeda.

Selanjutnya, Zalzabila dkk. [4] mengkaji pelabelan tak teratur refleksif sisi pada *alternate triangular snake graph* dan *double alternate quadrilateral snake graph* untuk menentukan nilai ketakaturan refleksif sisi pada kedua kelas graf

tersebut. Novelia dkk. [5] melakukan penelitian pada graf pohon pisang (*banana tree graph*) yang menunjukkan penerapan pelabelan refleksif tak teratur sisi pada kelas graf berbentuk pohon.

Selain itu, Setiawan dkk. [6] mengkaji pelabelan tak teratur refleksif sisi pada graf matahari (*sun graph*) serta korona dari graf siklus dan graf nol dengan dua titik sehingga memperluas penerapan konsep pelabelan refleksif pada graf hasil operasi korona. Yoong dkk. [7] meneliti pelabelan refleksif tak teratur sisi pada korona suatu graf dengan lintasan (*corona product of graphs with path*) yang menunjukkan bahwa konsep ini dapat diterapkan pada graf hasil operasi korona yang lebih umum. Basher mengkaji nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf pangkat lintasan (*r-th power of path*) dan berhasil menentukan nilai kekuatan sisi refleksif untuk kelas graf tersebut [8]. Wijaya dkk. [9] juga meneliti nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf lobster yang memperlihatkan bahwa pelabelan tersebut dapat diterapkan pada kelas graf pohon yang lebih kompleks. Penelitian lainnya dilakukan oleh Indriati dkk. [10] pada *Mongolian tent graph* dan *double quadrilateral snake graph* untuk menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi dari kedua jenis graf tersebut.

Berdasarkan berbagai penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa kajian mengenai nilai ketakteraturan refleksif sisi telah berkembang pada banyak kelas graf. Namun, masih terdapat beberapa kelas graf yang belum dikaji secara menyeluruh. Salah satunya adalah graf *dumbbell*. Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Zalsa dkk. [11] telah menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ dengan $m = n$ pada kondisi $m \geq 3$ dan $q = 3$.

Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa kajian mengenai pelabelan pada graf *dumbbell* masih dapat dikembangkan, khususnya pada panjang lintasan. Oleh karena itu, penelitian ini akan mengkaji nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,n,q}$ dengan $m = n$, dalam penelitian ini kondisi $m = n$ dapat dinotasikan dengan $D_{m,n,q}$ untuk $m \geq 3$ dan $q \geq 2$. Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat memperluas hasil penelitian sebelumnya serta memberikan kontribusi terhadap perkembangan kajian pelabelan tak teratur refleksif sisi pada teori graf.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan di atas, maka penelitian ini memiliki beberapa rumusan masalah yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan pelabelan refleksif tak teratur sisi pada suatu graf

dumbbell $D_{m,m,q}$?

2. Bagaimana menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi dari graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini, yaitu:

1. Pelabelan yang digunakan adalah *edge irregular reflexive labeling* atau pelabelan refleksif tak teratur sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$.
2. Graf yang dikaji adalah *dumbbell* $D_{m,m,q}$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang ada, tujuan dari penulisan penelitian ini yaitu:

1. Menentukan pelabelan refleksif tak teratur sisi pada suatu graf.
2. Menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi dari graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan yang lebih luas mengenai pelabelan refleksif tak teratur sisi dari suatu graf.
2. Menambah pengetahuan dan wawasan mengenai penentuan nilai ketakteraturan refleksif sisi dari graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$.

1.5 Metodologi Penelitian

Pada tahap Studi Literatur, dilakukan pengumpulan teori-teori yang berhubungan dengan nilai ketakteraturan refleksif sisi pada suatu graf yang diperoleh dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, media online, dan skripsi.

Pada tahap penelitian skripsi, dilakukan proses analisis untuk membuktikan teorema, kemudian dilakukan percobaan secara manual dan dalam bahasa pemrograman *python*, disimulasikan ke dalam contoh kasus pada sebuah graf untuk menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi menggunakan graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian skripsi ini terbagi menjadi lima bab. Adapun rincian sistematika penulisan yaitu sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, ruang lingkup penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini, berisi tentang teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji dalam skripsi ini. Bab ini mencakup konsep dasar seperti himpunan, fungsi, definisi graf, aritmetika modulo, dan pelabelan pada graf.

BAB III NILAI KETAKTERATURAN REFLEKSIF SISI PADA GRAF DUMBBELL $D_{m,m,q}$

Pada bab ini, berisi pembahasan utama yang dikaji, yaitu bagaimana cara menentukan nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$.

BAB IV ILUSTRASI NILAI KETAKTERATURAN REFLEKSIF SISI PADA GRAF DUMBBELL $D_{m,m,q}$

Pada bab ini akan diberikan contoh penerapan nilai ketakteraturan refleksif sisi pada graf *dumbbell* $D_{m,m,q}$. Penentuan nilai tersebut dilakukan secara manual dan dilakukan menggunakan program Python untuk memastikan bahwa hasil yang diperoleh telah sesuai.

BAB V PENUTUP

Pada bab penutup, yang merupakan bagian akhir dari skripsi ini. Berisi kesimpulan dari pembahasan yang telah dikaji pada bab sebelumnya. Pada bab ini juga terdapat saran dari penulis untuk pembahasan yang lebih baik dan berkembang.