

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori ring merupakan salah satu cabang utama dalam aljabar abstrak yang mempelajari himpunan serta dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian, yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu [1]. Perkembangan teori ring tidak hanya berfokus pada sifat-sifat dasar suatu ring, tetapi juga pada pembentukan struktur baru yang dapat memperluas kajian terhadap karakteristik aljabarnya. Salah satu topik yang berkembang dalam teori ring adalah unit additive, yaitu ring komutatif yang memiliki sifat bahwa penjumlahan setiap unit selalu menghasilkan elemen unit atau nilpoten [2].

Dalam perkembangannya, kajian mengenai sifat unit additive tidak hanya dilakukan pada ring secara umum, tetapi juga pada struktur ring yang dibangun dari objek aljabar lain, salah satunya adalah ring monoid. Pembentukan ring monoid ini menghasilkan suatu ring yang menghubungkan karakteristik ring dasar dengan sifat-sifat monoid yang digunakan dalam pembentukannya. Selain memiliki struktur ring, ring monoid secara alami merupakan monoid graded ring atau dapat ditulis M -graded ring, yaitu ring yang dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung $R = \bigoplus R_x$ dengan memenuhi sifat bahwa hasil kali elemen pada komponen berderajat x dan y berada pada komponen berderajat xy [2]. M -graded ring ini menjadi salah satu kerangka penting dalam mempelajari sifat-sifat aljabar pada ring monoid.

Hubungan antara struktur monoid dan sifat-sifat ring monoid menjadi salah satu fokus utama penelitian ini. Penelitian ini akan membuktikan bahwa karakteristik monoid, seperti positif, *cancellative*, dan bebas torsi, berpengaruh langsung terhadap unit additive pada ring monoid. Selain itu, hubungan ini menunjukkan bahwa sifat unit additive pada ring monoid tidak hanya ditentukan oleh ring dasar, tetapi juga oleh struktur monoid yang mendasarinya.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji struktur ring monoid melalui pendekatan monoid graded ring dan ring monoid itu sendiri. Fokus utama penelitian ini adalah menentukan karakterisasi ring monoid yang bersifat unit additive berdasarkan hubungan antara sifat-sifat monoid dengan sifat-sifat aljabar

pada ring yang dibangunnya. Karakterisasi ini dilakukan dengan menganalisis kriteria pada monoid yang mempengaruhi terbentuknya ring monoid yang bersifat unit additive. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai pembentukan dan karakterisasi ring monoid yang bersifat unit additive, serta menjadi landasan bagi pengembangan teori ring komutatif, khususnya pada kajian monoid graded ring dan ring monoid. Selain itu, penelitian ini dirancang untuk pembahasan yang belum dibahas secara mendalam pada jurnal utama, seperti dengan mengonstruksi contoh-contoh aljabar pada ring monoid yang bersifat unit additive.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan sebelumnya, penulis merumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Bagaimana kriteria yang harus dipenuhi oleh ring monoid agar membentuk unit additive?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penyelesaian masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Penelitian ini dibatasi pada ring dan monoid yang bersifat komutatif.
2. Pembahasan penelitian ini difokuskan pada konsep monoid graded ring dan ring monoid.
3. Analisis dalam penelitian ini difokuskan pada ring monoid yang bersifat unit additive dan monoid graded ring sebagai materi pendukung.

1.4 Tujuan Penelitian

Dalam penelitian ini, tujuan dan manfaat yang diharapkan adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis kriteria yang harus dipenuhi oleh ring monoid agar dapat membentuk unit additive, serta mengonstruksi contoh konkrit ring monoid yang memenuhi kriteria tertentu.

2. Memberikan kontribusi terhadap pengembangan kajian mengenai unit additive pada ring monoid serta menjadi rujukan bagi penelitian selanjutnya.

1.5 Metodologi Penelitian

Mengidentifikasi permasalahan mengenai hubungan antara sifat-sifat monoid dengan sifat-sifat aljabar pada ring monoid melalui pendekatan monoid graded ring. Penulis mengkaji referensi yang relevan, termasuk buku struktur aljabar untuk membangun bagaimana landasan teori mengenai ring, monoid, monoid graded ring, ring monoid, unit additive, serta jurnal ilmiah sebagai sumber utama pembahasan, khususnya pada jurnal Epstein dan Shapiro (2025) [2].

Pada tahap ini penulis mempelajari pembangun ring monoid $A[M]$ serta mengkaji struktur M -graded ring yang dimiliki oleh ring monoid. Selanjutnya dilakukan analisis terhadap karakteristik monoid serta hubungannya dengan sifat unit additive pada ring monoid. Selain itu, analisis dilakukan melalui pembuktian proposisi serta teorema yang berkaitan dengan monoid graded ring dan ring monoid sehingga diperoleh kriteria-kriteria yang menyebabkan suatu ring monoid bersifat unit additive.

Berdasarkan analisis yang dilakukan, penulis dapat menarik kesimpulan mengenai karakterisasi ring monoid yang bersifat unit additive berdasarkan sifat-sifat ring dasar dan monoid penyusunnya. Selain itu, penulis juga memberikan rekomendasi mengenai hal-hal yang berada diluar batas penelitian ini.

1.6 Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini terdapat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi mengenai teori-teori dasar yang melandasi pembahasan skripsi ini. Secara garis besar, mencakup ring, ring komutatif, ring unit additive, monoid graded ring, ring monoid, serta konsep-konsep lain yang berkaitan dengan karakterisasi ring monoid yang bersifat unit additive.

BAB III RING MONOID YANG BERSIFAT UNIT ADDITIVE

Bab ini berisi pembahasan yang meliputi hubungan antara sifat monoid dengan sifat

unit additive pada ring monoid, lalu menganalisis syarat-syarat yang menyebabkan ring monoid bersifat unit additive berdasarkan karakteristik ring dasar dan monoid penyusunnya, disertai pembuktian proposisi, teorema serta contoh-contoh yang mendukung hasil analisis.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi mengenai kesimpulan dari pembahasan yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya. Dan selain itu diberikan juga saran mengenai pengembangan yang bisa dilakukan untuk kajian selanjutnya.

