

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep fungsi dengan variasi dalam karya Dirichlet ditemukan oleh Jordan pada tahun 1881 [1]. Temuan Jordan tersebut mendorong perkembangan penelitian lebih lanjut mengenai konsep fungsi dengan variasi ini. Wijaya [2], membahas sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas dengan menjelaskan definisi, menganalisis, dan membuktikan teorema-teorema yang berlaku. Jamil [3], mengkaji fungsi bervariasi terbatas dengan fokus pada partisi dan variasi fungsi pada interval tertutup $[a, b]$.

Selanjutnya, konsep fungsi variasi terbatas dikaji dalam konteks ruang-ruang tertentu. Dalam konteks tersebut, Dewi [4], memperluas kajian fungsi bervariasi terbatas ke dimensi yang lebih tinggi dengan menganalisis kekontinuan fungsi bervariasi terbatas pada ruang Euclidean $\mathbb{R}^n$. Selain itu, Chistyakov [5], membahas fungsi variasi terbatas pada pemetaan bernilai metrik serta membahas kasus khusus ketika ruang nilai tersebut merupakan ruang bernorma.

Di sisi lain, konsep ruang bernorma-2 diperkenalkan oleh Gähler pada tahun 1963. Ruang bernorma-2 ini sebagai generalisasi dari ruang bernorma klasik [6]. Konsep ruang bernorma-2 dikembangkan oleh sejumlah peneliti seperti White dalam jurnal berjudul “*2-Banach Spaces*” memperkenalkan ruang bernorma-2 yang lengkap dan disebut ruang 2-Banach, Diminnie dalam jurnal berjudul “*Strictly Convex Linear 2-Normed Spaces*” dan “*Remarks on Strictly Convex and Strictly 2-Convex 2-Normed Spaces*” yang mengembangkan berbagai hasil teoritis di dalam ruang bernorma-2, dan Lewandowska dalam jurnal berjudul “*Bounded 2-linear operators on 2-normed sets*” yang mengkaji sifat operator 2-linear terbatas pada suatu himpunan bernorma-2 [1].

Dalam analisis fungsional, salah satu konsep yang berkaitan dengan ruang bernorma adalah konsep ruang Banach, yaitu ruang bernorma yang lengkap. Beberapa penelitian telah mengkaji sifat kelengkapan pada berbagai ruang dalam

konteks norma maupun norma-2. Penelitian Faisal dkk. [7], membuktikan kelengkapan ruang fungsi kontinu $C[a, b]$ dalam ruang bernorma-2. Selain itu, Sumarni [8], dalam skripsinya mengkaji kelengkapan ruang bernorma-2 pada ruang ℓ^p dengan cara mendefinisikan norma baru yang ekuivalen dengan norma pada ruang ℓ^p , kemudian menunjukkan kelengkapannya melalui pembuktian teorema kelengkapan ruang ℓ^p . Penelitian lain dilakukan oleh Muslim Ansori dan Y. D. Sumanto [9], yang mengkaji syarat perlu dan cukup bagi kernel operator Carleman K dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ ke ruang Lebesgue $\mathcal{L}_2([a, b])$ bersifat linear dan kontinu, serta membuktikan bahwa ruang linear bernorma $[C_{ESS}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_2([a, b])), \|\cdot\|_{C_{ESS}}]$ merupakan ruang Banach.

Berdasarkan berbagai penelitian yang telah dilakukan, kajian mengenai ruang Banach telah banyak dikembangkan pada berbagai ruang, baik pada ruang fungsi maupun ruang barisan. Namun belum terdapat kajian ruang Banach pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2. Fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas merupakan penggabungan dari konsep fungsi variasi terbatas dan ruang bernorma-2. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tugas akhir skripsi dengan mengangkat judul “Konstruksi Ruang Banach pada Himpunan Fungsi Variasi $(2, k)$ -Terbatas dalam Ruang Bernorma-2”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disampaikan, penulis merumuskan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana struktur ruang vektor pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2?
2. Bagaimana pembentukan ruang faktor melalui relasi ekuivalensi pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2?
3. Bagaimana pendefinisian norma pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2?
4. Bagaimana konstruksi ruang Banach pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Fungsi yang dikaji adalah fungsi $f : [a, b] \rightarrow X$ yang memiliki variasi $(2, k)$ -terbatas pada interval tertutup $[a, b]$, dengan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ merupakan ruang bernorma-2 dan $k \in X$ sebagai vektor tetap.
2. Pembentukan ruang faktor dari himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas diperoleh melalui relasi ekuivalensi $f \sim g \Leftrightarrow f - g = \alpha k$, dengan $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. Ruang faktor $BV_k^\sim[a, b]$ dilengkapi dengan norma $\|[f]\|_{BV_k^\sim[a, b]} = \|f(a), k\| + \|f(b), k\| + V_a^b(f, X, k)$.
4. Pembahasan mencakup struktur ruang vektor, pembentukan ruang faktor, pendefinisian norma, dan analisis kelengkapan terhadap norma yang telah didefinisikan.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan struktur ruang vektor pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2.
2. Menjelaskan pembentukan ruang faktor melalui relasi ekuivalensi pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2.
3. Menjelaskan kembali definisi norma pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2.
4. Menunjukkan konstruksi ruang Banach pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan dan mempelajari referensi yang berkaitan dengan ruang vektor, ruang bernorma, ruang bernorma-2, fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas, relasi ekuivalensi, ruang faktor, dan ruang Banach sebagai landasan teori penelitian.

Jurnal yang menjadi sumber utama digunakan sebagai acuan dalam mengkaji konstruksi ruang Banach pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas.

Pada penelitian ini, penulis menguraikan secara lebih rinci konstruksi ruang Banach pada ruang faktor himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas yang telah dibahas dalam literatur. Alur pembahasan disusun berdasarkan hubungan antara ruang vektor, ruang bernorma, dan ruang Banach. Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma, sedangkan ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap. Oleh karena itu, pembahasan diawali dengan struktur ruang vektor pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas yang dilanjutkan dengan pembentukan ruang faktor melalui relasi ekuivalensi dan pendefinisian norma pada ruang faktor sehingga diperoleh ruang bernorma. Kelengkapan ruang bernorma tersebut dikaji dengan memanfaatkan asumsi bahwa $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang $(2, k)$ -Banach.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini disusun dalam lima bab. Setiap bab dapat dijelaskan sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini memuat teori-teori yang mendasari pembahasan dalam skripsi ini, meliputi ruang vektor, ruang bernorma dan ruang bernorma-2, konsep dasar integral Riemann, variasi $(2, k)$ -terbatas, relasi ekuivalensi, dan ruang Banach.

BAB III KONSTRUKSI RUANG BANACH PADA HIMPUNAN FUNGSI VARIASI $(2, k)$ -TERBATAS DALAM RUANG BERNORMA-2

Bab ini membahas konstruksi ruang Banach pada himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas dalam ruang bernorma-2. Pembahasan diawali dengan pembuktian bahwa himpunan fungsi variasi $(2, k)$ -terbatas membentuk suatu ruang vektor serta pengkajian sifat fungsi pada subinterval. Selanjutnya, dibahas pembentukan ruang

faktor melalui relasi ekuivalensi, pendefinisian norma pada ruang faktor, hingga pembuktian bahwa ruang yang dikonstruksi merupakan ruang Banach.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini memuat kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan, serta menyajikan saran yang dapat dipertimbangkan untuk penelitian selanjutnya.

