

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ketidakpastian merupakan aspek yang selalu menyertai kehidupan manusia, termasuk dalam aktivitas ekonomi dan pasar keuangan. Tidak seorang pun mampu mengetahui dengan pasti apa yang akan terjadi pada masa depan. Prinsip tersebut ditegaskan oleh Allah Swt. dalam Al-Qur'an Surah Luqman ayat 34. Ayat tersebut mengingatkan bahwa masa depan sepenuhnya berada dalam pengetahuan Allah Swt., sedangkan manusia diperintahkan untuk berikhtiar melalui pemanfaatan ilmu pengetahuan. Dalam konteks keilmuan di UIN Sunan Gunung Djati Bandung, hal ini sejalan dengan prinsip *Wahyu Memandu Ilmu* (WMI), yaitu menjadikan wahyu sebagai landasan moral dalam pengembangan ilmu pengetahuan. Salah satu disiplin ilmu yang berperan dalam memahami ketidakpastian tersebut adalah matematika, yang mampu memodelkan dan menganalisis berbagai fenomena, termasuk pergerakan harga aset di pasar keuangan.

Salah satu instrumen keuangan yang digunakan untuk mengelola risiko adalah opsi (*option*), yaitu kontrak derivatif yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli atau menjual aset acuan pada harga yang telah ditentukan dalam jangka waktu tertentu tanpa kewajiban untuk melaksanakan hak tersebut [1]. Selain sebagai instrumen lindung nilai (*hedging*), opsi juga banyak dimanfaatkan untuk investasi dan spekulasi sehingga penentuan harga opsi yang akurat menjadi permasalahan penting dalam matematika keuangan.

Di antara berbagai jenis opsi, opsi put Amerika memiliki tingkat kompleksitas yang lebih tinggi dibandingkan opsi Eropa karena dapat dieksekusi kapan saja sebelum jatuh tempo. Hak pelaksanaan dini (*early exercise*) menyebabkan proses penentuan harga opsi tidak hanya bergantung pada penyelesaian persamaan diferensial parsial, tetapi juga memerlukan penentuan batas pelaksanaan optimal (*free boundary*) yang memisahkan daerah pelaksanaan dan daerah mempertahankan opsi. Karena posisi *free boundary* tidak diketahui sebelumnya dan harus ditentukan secara bersamaan dengan harga opsi, hingga saat ini belum tersedia solusi analitik tertutup untuk permasalahan tersebut sehingga metode numerik menjadi pendekatan yang paling efektif [2].

Perkembangan penelitian mengenai opsi Amerika masih terus berlangsung. Penelitian oleh mengkaji regularitas solusi dan kondisi *smooth-fit* pada model volatilitas stokastik, sedangkan mengembangkan pendekatan analitik numerik yang lebih efisien untuk menentukan batas pelaksanaan optimal [3, 4]. Penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa penentuan *free boundary* pada model volatilitas stokastik masih menjadi tantangan dalam penentuan harga opsi Amerika.

Meskipun demikian, penelitian terdahulu masih berfokus pada analisis teoritis dan pendekatan analitik numerik, bukan pada konstruksi skema beda hingga kompak berorde tinggi. Penerapan metode numerik berakurasi tinggi pada model Heston masih relatif terbatas, khususnya yang mengombinasikan transformasi *Front-Fixing* dengan skema beda hingga kompak orde empat [2–5]. Selain itu, sebagian penelitian yang telah disebutkan masih menggunakan parameter model berdasarkan asumsi teoritis sehingga belum sepenuhnya merepresentasikan kondisi pasar yang sebenarnya.

Berdasarkan kesenjangan tersebut, penelitian ini mengembangkan metode numerik untuk menentukan harga opsi put Amerika pada model Heston dengan volatilitas stokastik dan pembayaran *dividend yield* kontinu. Kombinasi transformasi *Front-Fixing*, skema beda hingga kompak orde empat, dan metode Runge-Kutta orde empat dipilih karena secara bersama-sama mampu menangani batas bebas yang bergerak, dimensi tambahan akibat volatilitas stokastik v , suku difusi silang akibat korelasi ρ , serta koefisien difusi tidak konstan yang dimodifikasi oleh dividen q . Parameter model Heston diperoleh melalui proses kalibrasi terhadap data pasar sehingga simulasi menggunakan parameter yang lebih representatif. Selain menghasilkan estimasi harga opsi, penelitian ini juga menganalisis evolusi batas bebas $s_f(\tau)$, bentuk permukaan harga opsi, serta mengevaluasi konsistensi, kestabilan, dan indikasi konvergensi metode numerik terhadap suku konveksi tambahan $\alpha(\tau)$ yang timbul dari transformasi *front-fixing*. Oleh karena itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan metode numerik berakurasi tinggi untuk penentuan harga opsi Amerika pada model Heston.

1.2 Rumusan Masalah

Penentuan harga opsi jual Amerika secara matematis dirumuskan sebagai PDP parabolik dengan batas bebas $s_f(\tau)$ yang tidak diketahui dan harus ditentukan bersamaan dengan solusi harga opsi. Ketika volatilitas dimodelkan sebagai proses stokastik $v(\tau)$ mengikuti kerangka Heston, dimensi permasalahan meningkat dari satu menjadi dua peubah ruang (S, v) , dan korelasi ρ antara proses Wiener yang

menggerakkan S dan v memunculkan suku difusi silang $\partial^2 U / \partial S \partial v$ pada PDP. Selain itu, koefisien difusi $\frac{1}{2}vS^2$ dan $\frac{1}{2}\sigma^2v$ bergantung pada peubah v sehingga PDP memiliki koefisien tidak konstan dan mengalami degenerasi saat $v \rightarrow 0$. Penambahan dividen kontinu q turut memodifikasi suku konveksi $(r - q)S \partial U / \partial S$ dan memengaruhi posisi $s_f(\tau)$ melalui syarat *smooth-pasting*. Kombinasi faktor-faktor tersebut batas bebas yang bergerak, dimensi tambahan, difusi silang, koefisien tidak konstan, dan modifikasi *drift* akibat dividen menyebabkan permasalahan tidak dapat diselesaikan secara analitik maupun dengan skema numerik standar berorde rendah.

Pendekatan *front-fixing* menangani faktor pertama (batas bebas bergerak) dengan memetakannya ke domain tetap, namun transformasi ini memunculkan suku konveksi tambahan $\alpha(\tau) = s'_f(\tau)/s_f(\tau)$ yang berpotensi memengaruhi kestabilan numerik. Empat faktor berikutnya (dimensi tinggi, difusi silang, koefisien tidak konstan, dan degenerasi) memerlukan skema diskretisasi ruang yang mampu mengakomodasi seluruhnya tanpa memperluas ukuran stensil secara berlebihan, sehingga skema beda hingga kompak 9-titik dipilih; sementara integrasi waktu terhadap sistem semi-diskrit yang dihasilkan, termasuk pembaruan posisi $s_f(\tau)$ pada setiap langkah, dilakukan dengan metode Runge-Kutta orde empat.

Berdasarkan uraian di atas, permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana batas bebas $s_f(\tau)$ yang timbul akibat hak *early exercise*, ditransformasikan melalui pendekatan *front-fixing* menjadi domain tetap yang konsisten secara matematis, termasuk penanganan suku konveksi tambahan $\alpha(\tau)$ yang muncul akibat transformasi tersebut?
2. Bagaimana mengonstruksi skema beda hingga kompak 9-titik untuk mendiskretisasi PDP dua dimensi (x, v) yang mengandung suku difusi silang akibat korelasi ρ dan koefisien difusi tidak konstan (bergantung pada v), serta bagaimana metode Runge-Kutta orde empat digunakan untuk mengintegrasikan sistem semidiskrit yang dihasilkan terhadap waktu?
3. Bagaimana karakteristik kekonsistenan dan kestabilan skema numerik yang diusulkan terhadap suku konveksi tambahan $\alpha(\tau)$ dan koefisien tidak konstan tersebut, serta bagaimana konvergensinya diverifikasi secara empiris?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini berfokus pada rumusan masalah yang telah dirumuskan. Agar penelitian ini tidak meluas, maka disusun batasan-batasan masalah penelitian sebagai berikut:

1. Jenis opsi yang dikaji adalah opsi jual (*put option*) tipe Amerika dengan satu aset dasar (saham).
2. Dividen dimodelkan sebagai dividen kontinu dengan tingkat pembayaran tetap (*dividend yield*) q .
3. Masalah penentuan harga opsi dirumuskan dalam bentuk Persamaan Diferensial Parsial (PDP) parabolik dua dimensi (S, v) dengan batas bebas (*free boundary*), termasuk suku difusi silang akibat korelasi ρ antara proses Wiener yang menggerakkan S dan v .
4. Penanganan batas bebas dilakukan menggunakan transformasi *front-fixing* dengan pendekatan logaritmik $x = \ln(S/s_f(\tau))$, sehingga domain yang bergerak ditransformasikan menjadi domain tetap, dengan kondisi *value matching* dan *smooth-pasting* digunakan untuk menentukan posisi batas eksekusi optimal.
5. Diskretisasi ruang dilakukan menggunakan Skema Beda Hingga Kompak orde empat anisotropik berbasis stensil 9-titik, sedangkan integrasi waktu dilakukan menggunakan metode Runge–Kutta orde empat (RK4). Penanganan khusus diberlakukan pada batas degenerate $v = 0$ sebagai kasus batas terpisah dari domain utama.
6. Analisis difokuskan pada aspek kestabilan numerik, konvergensi, dan perilaku solusi terhadap perubahan parameter model. Kalibrasi parameter terhadap data pasar tidak menjadi fokus utama penelitian ini; parameter yang digunakan diperoleh dari hasil kalibrasi yang dilakukan secara terpisah.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengembangkan dan menganalisis pendekatan numerik dalam penentuan harga opsi jual Amerika dengan volatilitas stokastik dan dividen. Secara khusus, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan transformasi *front-fixing* untuk memetakan batas bebas $s_f(\tau)$ yang timbul akibat hak *early exercise* menjadi domain tetap yang konsisten

secara matematis, termasuk menangani suku konveksi tambahan $\alpha(\tau)$ yang muncul akibat transformasi tersebut.

2. Mengonstruksi skema beda hingga kompak 9-titik untuk mendiskretisasi PDP dua dimensi (x, v) yang mengandung suku difusi silang akibat korelasi ρ dan koefisien difusi tidak konstan (bergantung pada v), serta menerapkan metode Runge-Kutta orde empat untuk mengintegrasikan sistem semi-diskrit yang dihasilkan terhadap waktu.
3. Menganalisis kekonsistenan dan kestabilan skema numerik yang diusulkan terhadap suku konveksi tambahan $\alpha(\tau)$ dan koefisien tidak konstan tersebut, serta memverifikasi konvergensinya secara empiris.

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat teoretis dalam bidang analisis numerik Persamaan Diferensial Parsial dengan batas bebas, khususnya melalui kajian penentuan harga opsi jual Amerika dengan volatilitas stokastik dan dividen. Secara metodologis, penelitian ini menyediakan kerangka numerik yang sistematis melalui kombinasi metode *front-fixing*, skema beda hingga kompak orde empat, dan metode Runge-Kutta orde empat, sehingga dapat menjadi referensi dalam pengembangan dan evaluasi skema numerik untuk masalah semi-diskrit yang kompleks. Secara akademik, hasil penelitian ini diharapkan memperkaya literatur matematika terapan dan matematika keuangan, serta menjadi dasar bagi penelitian lanjutan terkait analisis kestabilan, konvergensi, dan perluasan model terhadap struktur volatilitas yang lebih kompleks.

1.5 Metodologi Penelitian

Penelitian ini bersifat analitik-numerik yang dilakukan melalui serangkaian tahapan yang saling berkaitan. Tahapan pertama adalah studi literatur, yaitu kajian mendalam terhadap teori opsi Amerika dan konsep batas bebas, model volatilitas stokastik Heston, metode *front-fixing* yang pertama kali diperkenalkan untuk masalah batas bebas opsi Amerika, skema beda hingga kompak berorde tinggi, serta metode Runge-Kutta orde empat dalam kerangka *front-fixing* [2, 6, 7]. Kajian ini juga mencakup literatur lima tahun terakhir mengenai pengembangan skema kompak dan integrator adaptif untuk masalah batas bebas, untuk memastikan posisi dan celah penelitian ini terhadap perkembangan terkini [8–11].

Tahapan kedua adalah formulasi model matematis. Pada tahap ini, PDP Heston dengan dividen kontinu diturunkan dari kerangka portofolio bebas-risiko dan prinsip no-arbitrage di bawah ukuran martingale ekuivalen [6]. Kondisi batas dan kondisi

awal untuk opsi jual Amerika dirumuskan secara lengkap, mencakup kondisi *value matching* dan *smooth-pasting* pada batas bebas yang menyatakan kontinuitas nilai opsi dan gradiennya di titik eksekusi optimal [2, 12].

Tahapan ketiga adalah penerapan transformasi *front-fixing*. Transformasi logaritmik $x = \ln(S/s_f(\tau))$ diterapkan untuk memetakan batas bebas bergerak $S = s_f(\tau)$ ke posisi tetap $x = 0$, mengikuti kerangka *front-fixing* yang dikembangkan oleh Wu dan Kwok dan dijelaskan secara sistematis dalam [2]. Seluruh turunan parsial dalam PDP Heston ditulis ulang dalam variabel baru menggunakan aturan rantai, dan besaran laju perubahan relatif batas bebas $\alpha(\tau) = s'_f(\tau)/s_f(\tau)$ diidentifikasi secara eksplisit sebagai suku konveksi tambahan dalam PDP hasil transformasi.

Tahapan keempat adalah konstruksi skema beda hingga kompak. Diskritisasi ruang dilakukan menggunakan skema beda hingga kompak 9-titik berdasarkan kerangka Düring dan Fournié [5]. Relasi bantu diperoleh dengan mendiferensiasikan PDP utama terhadap variabel ruang, kemudian digunakan untuk menggantikan turunan orde tiga dan empat dalam galat pemotongan sehingga akurasi dapat ditingkatkan ke orde empat tanpa memperluas ukuran stensil [5]. Koefisien matriks massa $\{\gamma_l\}$ dan koefisien operator spasial $\{\alpha_l\}$ untuk seluruh sembilan titik stensil diturunkan secara analitik, menghasilkan sistem semi-diskrit dalam bentuk $M dU/d\tau = KU + F(\tau)$.

Tahapan kelima adalah integrasi waktu menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Sistem semi-diskrit yang dihasilkan pada tahap sebelumnya diintegrasikan terhadap waktu mundur τ menggunakan RK4 eksplisit standar melalui pendekatan *Method of Lines*, yaitu pendekatan yang pertama kali diterapkan untuk masalah batas bebas opsi Amerika oleh Meyer dan van der Hoek dan diadaptasikan pada kerangka *front-fixing*-RK4 oleh Nwankwo dan Dai [7, 13]. Setiap tahap RK4 melibatkan penyelesaian satu sistem linear dengan matriks massa M , dan pembaruan posisi batas bebas $s_f(\tau)$ dilakukan pada setiap langkah waktu menggunakan kondisi *smooth-pasting* yang didiskritisasi dengan stensil satu sisi orde dua [7].

Tahapan keenam adalah analisis kekonsistenan, kestabilan, dan konvergensi skema. Kekonsistenan dikaji melalui analisis galat pemotongan lokal (LTE) pada setiap komponen skema secara terpisah, mengikuti kerangka baku analisis galat pemotongan pada skema beda hingga [14]. Kestabilan dikaji menggunakan pendekatan Von Neumann lokal dengan pembekuan koefisien nonlinier $\alpha(\tau)$ pada setiap langkah waktu, menghasilkan syarat CFL yang harus dipenuhi oleh ukuran langkah waktu $\Delta\tau$ [15]. Konvergensi global disimpulkan dari Teorema Ekuivalensi Lax [16] atas dasar kekonsistenan dan kestabilan yang telah dibuktikan, dan

diverifikasi secara empiris melalui analisis penghalusan grid dengan perhitungan orde konvergensi empiris (EOC) menggunakan ekstrapolasi Richardson [14].

Tahapan terakhir adalah implementasi numerik dan simulasi. Seluruh skema diimplementasikan menggunakan bahasa pemrograman python. Parameter model diestimasi dari data historis harga saham Indonesia. Hasil simulasi yang disajikan mencakup permukaan harga opsi $U(x, v, \tau)$ pada berbagai kombinasi harga aset dan volatilitas, evolusi batas eksekusi optimal $s_f(\tau)$ terhadap waktu hingga jatuh tempo, serta verifikasi empiris orde konvergensi skema pada beberapa tingkat kerapatan grid.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini disusun dalam lima bab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab 1 Pendahuluan memuat latar belakang yang menjelaskan motivasi penelitian terkait penentuan harga opsi jual Amerika dengan volatilitas stokastik dan dividen, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab 2 Landasan Teori menyajikan teori-teori yang menjadi fondasi penelitian, meliputi konsep dasar opsi dan klasifikasinya, pengertian dividen dan pengaruhnya terhadap harga opsi, model volatilitas stokastik Heston dan penurunan PDE-nya, serta penjelasan konseptual metode *front-fixing*, skema beda hingga kompak, dan metode Runge-Kutta orde empat.

Bab 3 Metodologi menyajikan derivasi lengkap kerangka numerik yang dikembangkan. Bab ini mencakup formulasi model matematis dan kondisi batas untuk opsi jual Amerika, transformasi *front-fixing* beserta turunan-turunan dalam koordinat baru, konstruksi skema beda hingga kompak 9-titik dengan relasi bantu untuk eliminasi galat, algoritma RK4 dengan penyelesaian sistem matriks massa, serta analisis kekonsistenan, kestabilan, dan perkiraan konvergensi skema.

Bab 4 Implementasi dan Simulasi menyajikan hasil implementasi numerik skema yang dikembangkan menggunakan python. Bab ini membahas prosedur estimasi parameter model dari data historis, hasil simulasi permukaan harga opsi dan batas eksekusi optimal, verifikasi empiris orde konvergensi, serta analisis sensitivitas terhadap parameter model.

Bab 5 Kesimpulan dan Saran merangkum temuan utama penelitian dan

menyampaikan saran untuk penelitian lanjutan, termasuk kemungkinan perluasan ke model volatilitas yang lebih kompleks atau penanganan dividen diskret.

