

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang penting dalam kajian matematika diskrit yang sangat aplikatif dalam memodelkan berbagai struktur dan relasi matematis [1, 2]. Secara mendasar, graf merepresentasikan sekumpulan objek (simpul) beserta hubungan keterkaitan di antara objek-objek tersebut (sisi) [3]. Seiring berjalannya waktu, kajian teori graf berkembang pesat ke dalam berbagai sub-bidang spesifik, salah satunya adalah pelabelan graf. Pelabelan graf dapat dipahami sebagai pemetaan elemen-elemen graf, baik itu simpul, sisi, maupun keduanya, ke dalam suatu himpunan bilangan bulat dengan mematuhi aksioma atau batasan aljabar tertentu [4, 5].

Salah satu jenis pelabelan yang paling awal dipelajari dan memiliki kajian yang sangat luas adalah pelabelan *graceful* [4]. Secara formal, sebuah graf dengan ukuran m sisi dikatakan *graceful* apabila terdapat fungsi injektif dari himpunan simpulnya ke himpunan bilangan bulat $\{0, 1, \dots, m\}$, sedemikian sehingga nilai mutlak dari selisih label simpul yang bertetangga menghasilkan label sisi yang bijektif, yaitu mencakup seluruh bilangan asli $\{1, \dots, m\}$ [6]. Pelabelan ini menuntut tingkat keunikan mutlak pada struktur sisi graf.

Di sisi lain, terdapat pula konsep pelabelan yang berfokus pada penjumlahan sisi, yaitu pelabelan *antimagic* [7]. Konsep ini mewajibkan agar penjumlahan label sisi yang terhubung pada suatu simpul (yang disebut sebagai bobot simpul) memiliki nilai yang berbeda untuk setiap simpul di dalam graf. Konsep dasar ini kemudian dipersempit dan disesuaikan menjadi pelabelan *local antimagic*, di mana syarat ketaksamaan bobot simpul tersebut hanya diwajibkan bagi pasang simpul yang bertetangga langsung [8].

Menariknya, perbedaan bobot pada simpul yang bertetangga ini memiliki kemiripan dengan konsep pewarnaan simpul pada graf (*vertex coloring*). Dalam konteks ini, bobot simpul yang diinduksikan dari penjumlahan sisinya dipandang sebagai "warna" dari simpul tersebut. Karena dua simpul yang terhubung oleh sisi yang sama tidak boleh memiliki bobot yang kembar, hal ini secara otomatis membentuk pewarnaan graf lokal. Jumlah warna unik minimum yang dihasilkan dari pelabelan tersebut dikenal sebagai bilangan kromatik [8, 9].

Belakangan ini, kajian pelabelan berkembang ke arah penggabungan dua syarat secara simultan, yang salah satunya melahirkan *Graceful Local Antimagic Labeling* (GLAL) [10]. GLAL merupakan pelabelan yang sangat ketat karena menuntut sebuah fungsi pemetaan tunggal pada simpul graf untuk mampu menghasilkan induksi sisi yang bersifat *graceful* sekaligus menghasilkan bobot simpul yang memenuhi syarat *local antimagic*. Penelitian mengenai GLAL tidak hanya sebatas menemukan fungsi pelabelannya, melainkan juga menelusuri bilangan kromatik mutlak (χ_{gla}) yang terbentuk dari induksi bobotnya [10].

Salah satu keluarga graf yang menarik untuk dikaji dalam pelabelan ini adalah graf *caterpillar*. Graf *caterpillar* adalah graf pohon yang apabila seluruh simpul berderajat satu (simpul daun atau kaki) dieliminasi, maka graf bagian yang tersisa murni membentuk sebuah lintasan tunggal [11, 12]. Graf ini sangat sering dijadikan objek penelitian pelabelan karena memiliki struktur simetri yang dinamis antara lintasan utama dan cabang-cabangnya [13, 14].

Dalam penelitian terdahulu, telah dilakukan kajian pelabelan *super graceful* pada graf *caterpillar* dan *centipede* dengan hasil yang menunjukkan eksistensi fungsi pemetaan yang valid [15]. Namun, formulasi fungsi aljabar yang secara spesifik mengonstruksi pelabelan *Graceful Local Antimagic* (GLAL) beserta penentuan nilai eksak bilangan kromatiknya pada graf *caterpillar* seragam belum banyak dirumuskan secara analitis murni.

Berdasarkan permasalahan tersebut, penelitian ini memfokuskan kajian pada konstruksi fungsi pelabelan GLAL dan penentuan nilai bilangan kromatik (χ_{gla}) pada dua struktur graf *caterpillar* seragam, yaitu graf tanpa kepala dan ekor (Cp_n) serta graf perluasan dengan kepala dan ekor (Cp_n^*). Penelitian ini menggunakan pendekatan deduktif-analitis untuk merumuskan fungsi pelabelan graf, serta membuktikan keabsahannya melalui analisis pemenuhan sifat (GLAL).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi fungsi pelabelan *Graceful Local Antimagic* (GLAL) pada graf *caterpillar* seragam Cp_n tanpa kepala dan ekor, serta graf Cp_n^* dengan kepala dan ekor?
2. Berapakah nilai bilangan kromatik GLAL (χ_{gla}) pada kedua variasi graf tersebut untuk graf berorde kecil?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Objek penelitian dibatasi pada graf *caterpillar* seragam, di mana setiap simpul pada lintasan badan utama mengikat secara eksak dua buah simpul kaki.
2. Kajian topologi difokuskan pada dua variasi graf, yaitu graf *caterpillar* tanpa kepala (Cp_n) dan graf *caterpillar* dengan kepala (Cp_n^*) untuk parameter bilangan bulat $n \geq 2$.
3. Penentuan bilangan kromatik GLAL (χ_{gla}) dibatasi pada evaluasi kardinalitas bobot lokal unik dari kedua variasi graf tersebut menggunakan orde kecil, yaitu $n = 3, 4, 5$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan dan batasan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengonstruksi formulasi fungsi aljabar dan membuktikan secara deduktif eksistensi pelabelan *Graceful Local Antimagic* (GLAL) pada graf *caterpillar* seragam Cp_n dan Cp_n^* .
2. Mengevaluasi dan menetapkan nilai bilangan kromatik GLAL (χ_{gla}) pada kedua variasi graf tersebut menggunakan parameter n berorde kecil.

1.5 Metode Penelitian

Metodologi yang diaplikasikan dalam penelitian ini bersandar pada pendekatan deduktif analitis matematika murni yang mencakup tahapan-tahapan berikut:

1. Studi Literatur

Penelitian skripsi ini diawali dengan tahap studi literatur, di mana teori-teori yang berkaitan dengan pelabelan graceful local antimagic dan teori-teori dasar dalam ilmu graf dikumpulkan dari berbagai sumber, seperti buku, jurnal, media online, dan skripsi.

2. Analisis

Tahap ini melibatkan eksperimen matematis untuk menggali pola rumusan

GLAL pada graf *caterpillar* seragam. Prosesnya diawali dengan menggenerasi sampel graf skala kecil, dilanjutkan pencarian partisi angka secara heuristik-komputasional. Pola empiris tersebut kemudian dikonstruksi menjadi fungsi pelabelan umum, lalu dibuktikan keabsahannya secara deduktif yang mencakup aksioma injektif, graceful, dan local antimagic.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika pelaporan dalam draf skripsi ini dibagi ke dalam empat bab utama, dengan rincian penjelasan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat komponen-komponen dasar yang melandasi urgensi pelaksanaan penelitian. Struktur pembahasannya mencakup latar belakang masalah, perumusan fokus kajian, penegasan batasan masalah, penjabaran tujuan penelitian, rincian metode penelitian matematis, serta sistematika penulisan skripsi.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini mengumpulkan teori-teori dasar, definisi formal, dan tinjauan literatur yang menjadi landasan pada bahasan skripsi ini. Teori-teori yang dibedah meliputi konsep himpunan, fungsi, graf, dan jenis-jenis pelabelan.

BAB III ANALISIS GLAL DAN BILANGAN KROMATIK χ_{gla} PADA GRAF CATERPILLAR SERAGAM

Bab ini merupakan pusat penemuan dari penelitian yang memuat konstruksi matematis murni. Pembahasan dipecah secara sistematis untuk merumuskan fungsi pemetaan GLAL, membuktikan validitas teoremanya secara deduktif, dan menghitung bilangan kromatik pada dua varian struktural graf *caterpillar* seragam, yaitu graf Cp_n tanpa kepala dan ekor, serta Cp_n^* dengan kepala dan ekor.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini merupakan konklusi akhir dari seluruh proses riset matematis yang telah dilalui. Bab ini merangkum seluruh hasil pembahasan berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian ini, serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Himpunan

Definisi 2.1 (Himpunan [1, 2]). Himpunan adalah sekumpulan objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek di dalam himpunan disebut elemen atau anggota himpunan. Jika x merupakan elemen dari himpunan A , maka dinotasikan dengan $x \in A$. Sebaliknya, jika x bukan elemen dari A , dinotasikan dengan $x \notin A$.

Beberapa notasi himpunan bilangan baku yang digunakan adalah:

- Himpunan bilangan bulat positif: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan bilangan asli: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Himpunan bilangan bulat: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Definisi 2.2 (Subhimpunan [1, 2]). Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan A dikatakan subhimpunan (himpunan bagian) dari B , dinotasikan $A \subseteq B$, jika dan hanya jika setiap elemen di A juga merupakan elemen di B . Secara formal:

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in A \implies x \in B) \quad (2.1)$$

Definisi 2.3 (Himpunan Kosong [1, 2]). Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen, dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$.

Definisi 2.4 (Kardinalitas Himpunan [1, 2]). Kardinalitas dari suatu himpunan A , dinotasikan dengan $|A|$, adalah banyaknya elemen yang berbeda di dalam himpunan A .

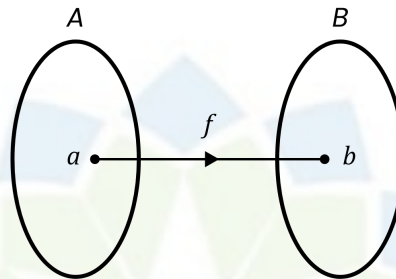
Definisi 2.5 (Himpunan Saling Asing [1, 2]). Dua himpunan A dan B dikatakan saling asing (*disjoint*) jika irisan kedua himpunan tersebut merupakan himpunan kosong. Secara formal:

$$A \cap B = \emptyset \quad (2.2)$$

Definisi 2.6 (Partisi Himpunan [1, 2]). Suatu himpunan semesta S dikatakan terpartisi oleh himpunan-himpunan bagian $A_1, A_2, \dots, A_k$ jika dan hanya jika $\bigcup_{i=1}^k A_i = S$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$.

2.2 Fungsi

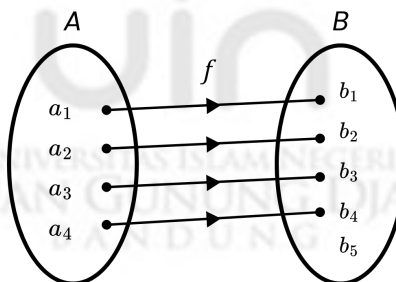
Definisi 2.7 (Fungsi [1, 2]). Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Fungsi f dari A ke B , dinotasikan $f : A \rightarrow B$, adalah relasi yang memetakan setiap elemen $x \in A$ ke tepat satu elemen $y \in B$. Himpunan A disebut domain, B disebut kodomain, dan $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ disebut *range*.



Gambar 2.1: Fungsi $f : A \rightarrow B$

Definisi 2.8 (Fungsi Injektif [1, 2]). Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (satu-ke-satu) jika dan hanya jika tidak ada dua elemen berbeda di domain A yang dipetakan ke elemen yang sama di kodomain B . Secara formal:

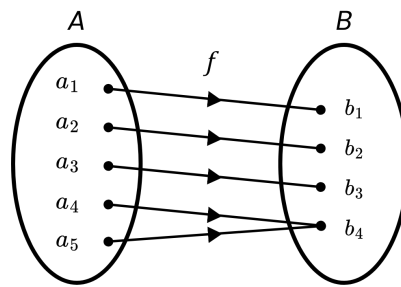
$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y \quad (2.3)$$



Gambar 2.2: Fungsi Injektif

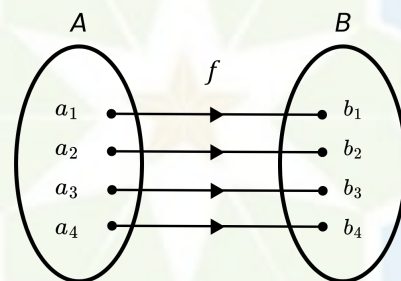
Definisi 2.9 (Fungsi Surjektif [1, 2]). Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif (pada) jika dan hanya jika setiap elemen di kodomain B merupakan bayangan dari sekurang-kurangnya satu elemen di domain A . Secara formal:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \quad \text{sedemikian sehingga} \quad f(x) = y \quad (2.4)$$



Gambar 2.3: Fungsi Surjektif

Definisi 2.10 (Fungsi Bijektif [1, 2]). Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) jika dan hanya jika f bersifat injektif dan surjektif.



Gambar 2.4: Fungsi Bijektif

Definisi 2.11 (Kekongruenan Modulo [1, 2]). Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$. Bilangan a dikatakan kongruen dengan b modulo m , dinotasikan $a \equiv b \pmod{m}$, jika dan hanya jika m membagi habis $(a - b)$, yaitu $m \mid (a - b)$.

2.3 Graf

Definisi 2.12 (Graf [1, 3]). Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dinotasikan $G = (V, E)$, di mana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari simpul (*vertices*) dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen $V(G)$ yang disebut sisi (*edges*).

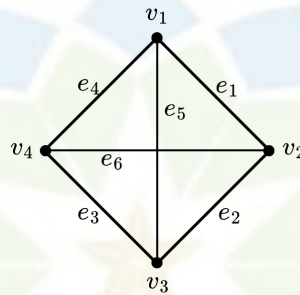
Definisi 2.13 (Ketetanggaan dan Keterkaitan [3]). Dua simpul $u, v \in V(G)$ dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika $uv \in E(G)$. Sisi $e = uv$ dikatakan insiden (*incident*) dengan simpul u dan simpul v .

Definisi 2.14 (Orde dan Ukuran [3]). Orde dari graf G adalah kardinalitas himpunan simpulnya, $|V(G)|$. Ukuran dari graf G adalah kardinalitas himpunan sisinya, $|E(G)|$.

Definisi 2.15 (Derajat Simpul [3]). Derajat dari suatu simpul $v \in V(G)$, dinotasikan $\deg(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang insiden dengan simpul v . Simpul v dengan $\deg(v) = 1$ disebut simpul *pendant*.

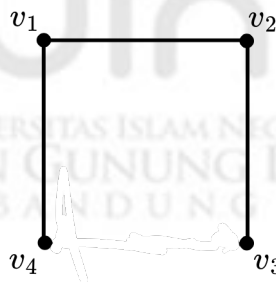
2.4 Jenis-jenis Graf

Definisi 2.16 (Graf Sederhana [3]). Graf G disebut graf sederhana (*simple graph*) jika G tidak memuat sisi ganda (*multiple edges*) dan gelang (*loop*).



Gambar 2.5: Contoh Graf Sederhana

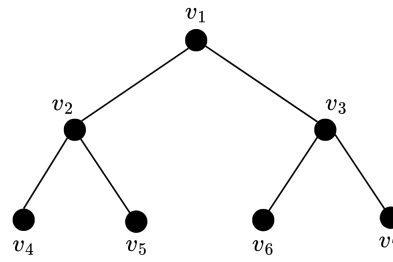
Definisi 2.17 (Graf Tak Berarah [3]). Graf G disebut graf tak berarah (*undirected graph*) jika setiap sisi $uv \in E(G)$ merupakan pasangan simpul tak berurutan, sehingga $uv = vu$.



Gambar 2.6: Contoh Graf Tak Berarah

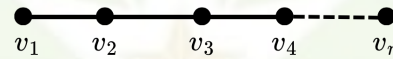
Definisi 2.18 (Graf Terhubung [3]). Graf G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang simpul $u, v \in V(G)$ terdapat sekurang-kurangnya satu lintasan yang menghubungkan u dan v .

Definisi 2.19 (Graf Pohon [3]). Graf pohon (*tree*) adalah graf sederhana tak berarah yang terhubung dan tidak memuat siklus. Suatu graf pohon berorde n memiliki ukuran $|E| = n - 1$.



Gambar 2.7: Contoh Graf Pohon

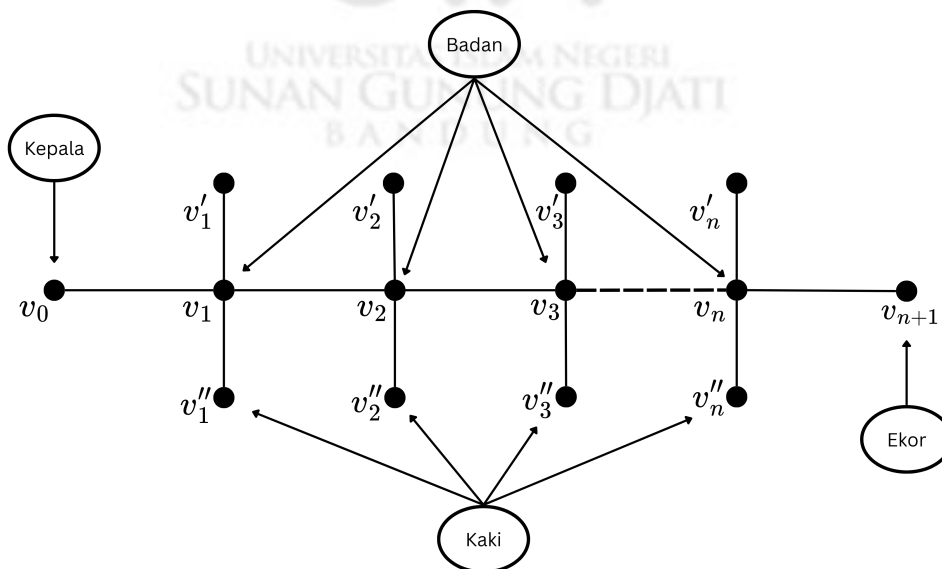
Definisi 2.20 (Graf Lintasan [3]). Graf lintasan P_n untuk $n \geq 2$ adalah graf pohon dengan himpunan simpul $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$.



Gambar 2.8: Contoh Graf Lintasan P_n

2.5 Graf Caterpillar

Definisi 2.21 (Graf Caterpillar [11, 12]). Graf *caterpillar* adalah graf pohon yang apabila seluruh simpul berderajat satu dihapus, maka sisa graf bagiannya membentuk sebuah graf lintasan [14]. Lintasan sisa tersebut disebut lintasan badan utama (*spine*).



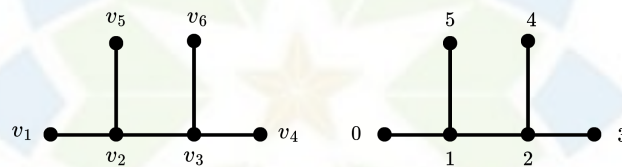
Gambar 2.9: Contoh Graf Caterpillar

Definisi 2.22 (Graf Caterpillar Seragam Cp_n [13, 15]). Graf *caterpillar* seragam Cp_n untuk $n \geq 2$ adalah graf *caterpillar* dengan panjang lintasan badan utama n , di mana setiap simpul pada lintasan badan utama tersebut bertetangga dengan tepat dua buah simpul kaki (*pendant*).

2.6 Pelabelan Graf

Definisi 2.23 (Pelabelan Graf [4, 5]). Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat.

Definisi 2.24 (Pelabelan Simpul [4]). Pelabelan simpul (*vertex labeling*) adalah fungsi pelabelan graf dengan domain himpunan simpul, $f : V(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.



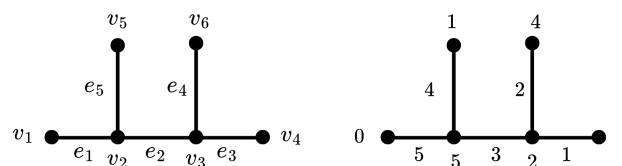
Gambar 2.10: Pelabelan Simpul

Definisi 2.25 (Pelabelan Sisi [4]). Pelabelan sisi (*edge labeling*) adalah fungsi pelabelan graf dengan domain himpunan sisi, $f : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$.



Gambar 2.11: Pelabelan Sisi

Definisi 2.26 (Pelabelan Total [4]). Pelabelan total (*total labeling*) adalah fungsi pelabelan graf dengan domain gabungan himpunan simpul dan sisi, $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$.



Gambar 2.12: Pelabelan Total

Definisi 2.27 (Label Sisi Terinduksi [4]). Misalkan G memuat fungsi pelabelan simpul f . Label sisi terinduksi dari sisi $uv \in E(G)$, dinotasikan $f^*(uv)$, adalah hasil evaluasi fungsi aljabar tertentu terhadap label simpul $f(u)$ dan $f(v)$.

Definisi 2.28 (Bobot Simpul [7, 8]). Misalkan G memuat fungsi pelabelan sisi terinduksi f^* . Bobot simpul $u \in V(G)$, dinotasikan $wt(u)$, didefinisikan sebagai jumlahan dari seluruh label sisi yang insiden dengan u :

$$wt(u) = \sum_{v \in N(u)} f^*(uv) \quad (2.5)$$

dengan $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ adalah himpunan tetangga dari u .

2.7 Graceful Local Antimagic Labeling

Definisi 2.29 (Pelabelan *Graceful* [4, 6]). Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dengan $|E(G)| = m$. Suatu fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$ disebut pelabelan *graceful* jika fungsi label sisi terinduksinya:

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \quad \forall uv \in E(G) \quad (2.6)$$

bersifat bijektif terhadap himpunan $\{1, 2, \dots, m\}$.

Definisi 2.30 (Pelabelan *Local Antimagic* [8]). Suatu pemetaan pada graf G disebut pelabelan *local antimagic* jika untuk setiap pasang simpul $u, v \in V(G)$ yang bertetangga berlaku:

$$wt(u) \neq wt(v), \quad \forall uv \in E(G) \quad (2.7)$$

Definisi 2.31 (*Graceful Local Antimagic Labeling / GLAL* [10]). Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dengan $|E(G)| = m$. Suatu fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ disebut *Graceful Local Antimagic Labeling* (GLAL) jika f memenuhi kedua kondisi berikut secara simultan:

1. Label sisi terinduksi $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ memetakan $E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, \dots, m\}$ secara bijektif (*graceful*).
2. Bobot simpul terinduksinya, $wt(u) = \sum f^*(uv)$, memenuhi $wt(u) \neq wt(v)$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ (*local antimagic*).

2.8 Bilangan Kromatik GLAL

Definisi 2.32 (Bilangan Kromatik GLAL [10]). Misalkan G adalah graf yang memuat pelabelan *Graceful Local Antimagic* (GLAL). Karena sifat *local antimagic* mutlak menjamin ketaksamaan bobot untuk setiap pasang simpul yang bertetangga, himpunan bobot simpul terinduksi bertindak secara langsung sebagai pewarnaan simpul yang sah. Bilangan kromatik GLAL, dinotasikan dengan $\chi_{gla}(G)$, didefinisikan sebagai kardinalitas minimum dari himpunan bobot simpul unik yang dapat dicapai di bawah seluruh kemungkinan fungsi pemetaan GLAL pada graf G . Secara formal direpresentasikan melalui:

$$\chi_{gla}(G) = \min_{f \in \text{GLAL}} |\{\text{wt}(u) \mid u \in V(G)\}| \quad (2.8)$$

