

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis fungsional merupakan cabang matematika yang mengkaji hubungan antara struktur aljabar dan struktur topologi pada suatu ruang vektor. Salah satu objek kajian yang paling mendasar dalam bidang ini adalah ruang bernorma, yaitu sebuah ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norma untuk mengukur panjang dan jarak antar elemen. Sifat-sifat geometris dalam ruang bernorma seperti jarak dan lengkungan bola satuan diatur oleh aksioma norma yang ketat, termasuk homogenitas mutlak dan ketaksamaan segitiga. Struktur ini memberikan kerangka kerja yang memungkinkan dilakukannya analisis terhadap berbagai pemetaan atau transformasi antar ruang vektor [1].

Salah satu jenis transformasi yang menjadi pusat perhatian dalam geometri ruang Banach adalah Isometri. Secara geometris, isometri didefinisikan sebagai pemetaan yang mempertahankan jarak antara setiap pasangan titik di dalam ruang tersebut [2]. Meskipun definisi isometri murni bersifat metrik (geometris), muncul sebuah pertanyaan fundamental dalam sejarah matematika mengenai apakah sifat menjaga jarak tersebut secara otomatis memaksa pemetaan tersebut untuk menjadi struktur aljabar, yaitu linearitas [3]. Isometri dalam ruang metrik umum tidak harus bersifat linear, namun dalam konteks ruang bernorma, terdapat keterkaitan yang sangat kuat antara cara kita mengukur jarak dan bagaimana operasi penjumlahan vektor dilakukan.

Permasalahan ini dijawab secara elegan melalui Teorema Mazur-Ulam yang dikemukakan pada tahun 1932. Teorema ini menyatakan bahwa setiap isometri surjektif antara dua ruang bernorma real yang memetakan titik asal ke titik asal adalah pemetaan linear [4]. Hal ini menunjukkan bahwa struktur jarak dalam ruang bernorma sangat kaku sehingga mampu mendikte sifat aljabar dari pemetaan tersebut. Namun, tantangan muncul ketika syarat-syarat dalam teorema ini diubah, seperti pada kasus isometri yang tidak surjektif atau pada ruang bernorma kompleks dimana linearitas tidak selalu terjamin sepenuhnya.

Sifat afinitas pada pemetaan surjektif berkaitan erat dengan Teorema Mazur-Ulam dalam analisis fungsional. Teorema ini menyatakan bahwa setiap isometri surjektif antara dua ruang bernorma riil merupakan pemetaan afin (*affine*) [5]. Sifat afinitas tersebut sangat penting karena menjamin bahwa transformasi tidak merusak hubungan geometris antar titik dalam ruang vektor [6]. Dalam pembuktiannya, Mazur dan Ulam menunjukkan bahwa isometri surjektif selalu mengawetkan titik tengah (*midpoint preserving*), sehingga akhirnya dapat dibuktikan bahwa pemetaan tersebut bersifat afin. Teorema ini menjadi dasar penting dalam geometri *normed spaces*, teori Banach, serta berbagai pengembangan modern mengenai isometri dan transformasi linear [7][8].

Muncul pertanyaan krusial: *Apakah pemetaan yang mengawetkan n -jarak (isometri- n) secara otomatis merupakan pemetaan afinitas?* Di ruang norma biasa, isometri hanya melibatkan selisih dua titik ($X - Y$) [4]. Namun, dalam ruang norma- n , pemetaan harus mempertahankan hubungan multidimensional antara $n + 1$ titik. Beberapa peneliti seperti Yumei Ma [9], Hahng-Yun Chu & Se-Hyun Ku [10], dan Hahng-Yun Chu et. al [11], telah memulai eksplorasi mengenai isometri pada ruang n -norma, namun perumusan yang mencakup kondisi-kondisi khusus agar sifat afinitas tetap terjaga masih memerlukan analisis yang lebih mendalam, terutama pada struktur ruang yang lebih kompleks. Ketidakterikatan antara geometri dan aljabar dalam kondisi-kondisi khusus inilah yang membuat studi tentang Teorema Mazur-Ulam tetap menjadi topik penelitian yang dinamis hingga tahun 2025.

Penelitian terkait pendekatan Mazur-Ulam dan persamaan fungsional yang dilakukan oleh Krzysztof Cieplinski pada tahun 2025 dengan judul “*On Ulam Stability of Functional Equations in Non-Archimedean Spaces*”. Penelitian tersebut membahas perkembangan stabilitas persamaan fungsional yang pada dasarnya memperluas pendekatan Mazur-Ulam ke berbagai ruang norma yang lebih umum, serta bagaimana hasil-hasil klasik (Mazur-Ulam) berperan dalam memahami stabilitas fungsional yang lebih luas di ruang bernorma non-tradisional.

Kajian mengenai sifat afinitas pada pemetaan yang mengawetkan n -jarak memiliki signifikansi teoritis yang kuat dalam pengembangan analisis fungsional

dan geometri ruang norma. Penelitian ini tidak hanya memperluas pemahaman terhadap generalisasi Teorema Mazur-Ulam, tetapi juga memberikan kontribusi terhadap studi transformasi geometris pada struktur ruang berdimensi tinggi. Berdasarkan uraian permasalahan di atas, penulis ingin mengkaji lebih lanjut mengenai sifat afinitas muncul pada pemetaan isometri- n serta perumuman Teorema Mazur-Ulam di ruang norma- n dalam skripsi mengenai **“Analisis Sifat Afinitas pada Pemetaan yang Mengawetkan n -Jarak: Perumuman Teorema Mazur-Ulam di Ruang n -Bernorma”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah “Bagaimana sifat afinitas dari setiap pemetaan surjektif yang mengawetkan n -jarak pada ruang norma- n sebagaimana dalam Teorema Mazur-Ulam?”

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan skripsi tidak menyimpang dari sasaran yang dituju, maka perlu adanya batasan ruang lingkup permasalahan yang hendak dibahas. Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

Pembahasan difokuskan pada Teorema Mazur-Ulam klasik, yaitu pernyataan bahwa setiap isometri surjektif antara ruang bernorma real bersifat affine. Pembuktian teorema dilakukan dengan pendekatan mengawetkan titik tengah (*midpoint preservation*).

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang masalah dan rumusan masalah yang telah disampaikan sebelumnya, adapun tujuan dari penelitian ini adalah “Untuk mengetahui sifat afinitas dari setiap pemetaan surjektif yang mengawetkan n -jarak pada ruang norma- n sebagaimana Teorema Mazur-Ulam.”

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat teoretis dari penelitian ini adalah memperkaya pemahaman mengenai hubungan antara mengawetkan n -jarak, mengawetkan titik tengah, additivitas, linearitas, dan sifat afinitas sebagai tahapan dalam pembuktian perumusan Teorema Mazur-Ulam pada ruang norma- n .
2. Manfaat praktis dari penelitian ini adalah menjadi dasar bagi pengembangan penelitian yang mengkaji aplikasi pemetaan yang mempertahankan struktur geometri dalam berbagai cabang matematika yang berkaitan dengan mengawetkan jarak.

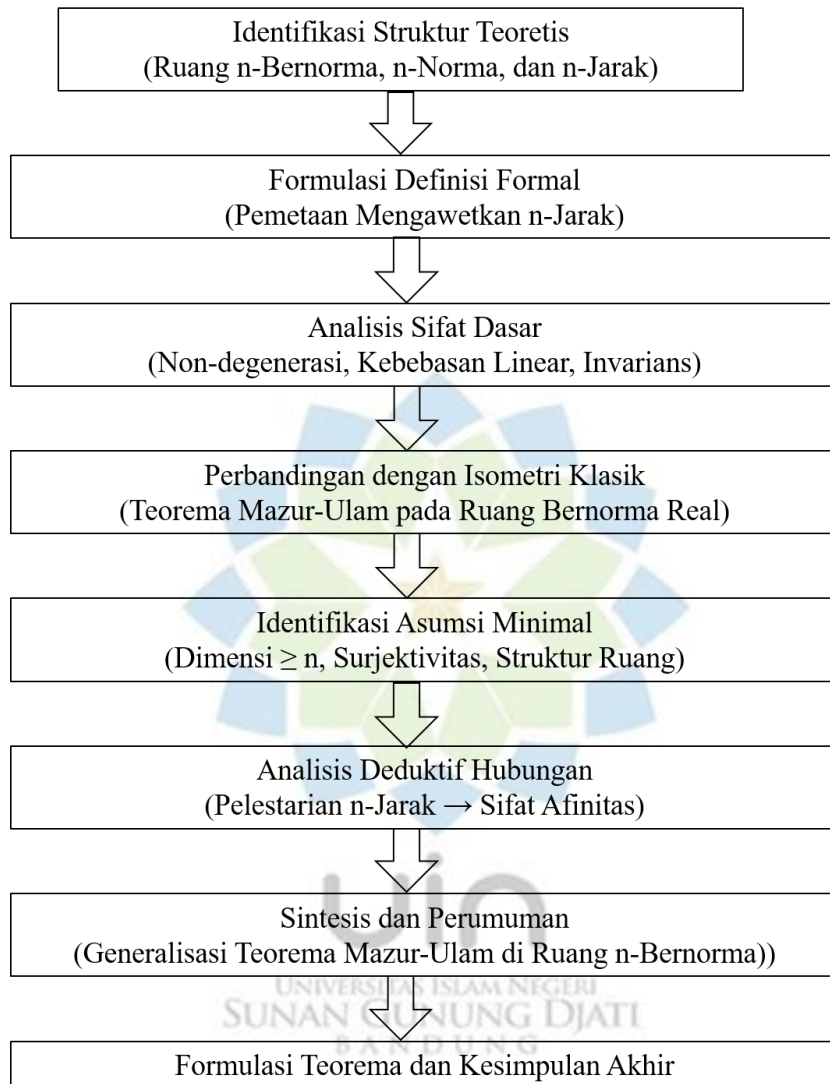
1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan pendekatan **studi literatur (*library research*)**. Penelitian dilakukan dengan mengkaji secara sistematis berbagai sumber ilmiah yang relevan dengan topik, meliputi buku teks, artikel jurnal internasional bereputasi, prosiding konferensi, serta disertasi yang berkaitan dengan teori ruang vektor, ruang bernorma, isometri, dan pemetaan yang mengawetkan n -jarak. Kajian terhadap literatur dilakukan untuk memahami perkembangan teori, mengidentifikasi asumsi-asumsi yang digunakan dalam penelitian terdahulu, serta menganalisis keterkaitan antara pelestarian n -jarak dan sifat afinitas.

Sumber utama dalam penelitian ini adalah artikel-artikel yang dipublikasikan pada jurnal internasional seperti *Linear Algebra and its Applications*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, dan *Banach Journal of Mathematical Analysis*, yang banyak membahas permasalahan preserver dan generalisasi Teorema Stanislaw Mazur–Stanislaw Ulam.

Analisis data dilakukan melalui pendekatan deduktif, yaitu dengan mengkaji definisi, lema, dan teorema yang relevan, kemudian menyusunnya secara sistematis untuk memperoleh kesimpulan mengenai sifat afinitas pemetaan yang mengawetkan n -jarak. Proses analisis meliputi tahap identifikasi konsep, klasifikasi

hasil penelitian terdahulu, evaluasi asumsi yang digunakan, serta sintesis teoretis untuk membangun kerangka pembuktian yang koheren dan logis.



Gambar 1.1 Alur Penelitian

1.7 Sistematika Penulisan

Berdasarkan sistematika penulisannya, skripsi ini terdiri dari lima bab. Adapun sistematika dari penyusunannya adalah sebagai berikut.

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini memaparkan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan teori-teori yang berkaitan dengan pemetaan isometri- n , pengawetan n -jarak, teorema Mazur-Ulam, dan ruang norma- n .

BAB III: ANALISIS SIFAT AFINITAS PADA PEMETAAN YANG MENGAWETKAN n -JARAK: PERUMUMAN TEOREMA MAZUR-ULAM DI RUANG n -BERNORMA

Berisi pembahasan mengenai analisis dan pembuktian sifat afinitas: perumuman Teorema Mazur-Ulam di ruang norma- n .

BAB IV: STUDI KASUS

Pembahasan mengenai kasus konkret untuk menguji, memverifikasi, dan mengilustrasikan hasil teoritis perumuman Teorema Mazur-Ulam pada ruang norma- n .

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi simpulan sebagai hasil dari rumusan masalah yang telah dipaparkan, juga berisi sarang untuk penelitian selanjutnya sebagai pengembangan dari topik yang dikaji tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

