

FI19104

Pengantar Fisika

Matematika

Materi Minggu ke-11

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si

UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.1 Fungsi Logaritma Natural

- Menentukan turunan dari fungsi **logaritma natural** dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari $1/u$ dan variannya.
- Menurunkan fungsi secara **logaritmik**.

6.2 Fungsi Invers dan Turunannya

Menentukan **invers** dari suatu fungsi & turunannya.

The Missing Link

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \right) = x^1$$

$$\frac{d}{dx} (x) = x^0$$

$$\frac{d}{dx} (?) = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx} (-x^{-1}) = x^{-2}$$

Fungsi Logaritma Natural (ln)

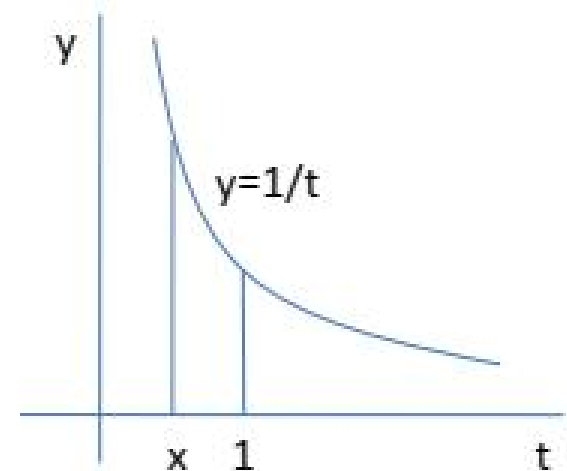
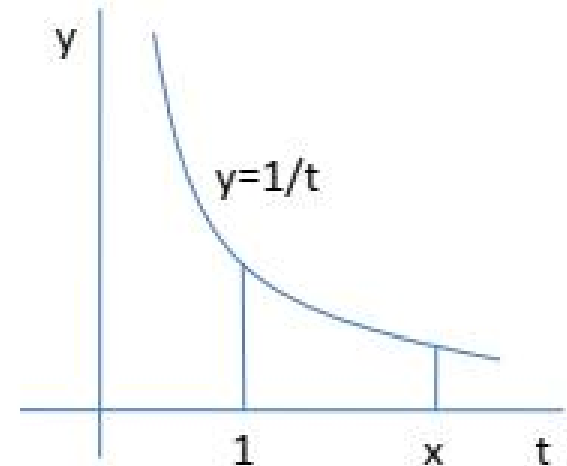
Definisi: $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$

Ctn. Nilai $\ln x$ menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = 1/t$, $1 \leq t \leq x$. Karena itu,

$\ln x < 0$ jika $0 < x < 1$

$= 0$ jika $x = 1$

> 0 jika $x > 1$.



Turunan dari $\ln x$

Menurut **Teorema Dasar Kalkulus**,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Contoh

1. Tentukan $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$.

Jawab:
$$\frac{d}{dx} \ln(x^2) = \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

2. Tentukan $\frac{d}{dx} \ln |x|$.

Jawab:

Integral Tak Tentu dari $1/u$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C.$$

Contoh:

1. Tentukan $\int \frac{dx}{x+1}$.

Jawab: Misal $u = x + 1$. Maka $du = dx$, shg

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |x+1| + C.$$

Contoh

2. Tentukan $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Jawab:

3. Hitung $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

Jawab:

Teorema (Sifat-Sifat Logaritma)

- $\ln 1 = 0$
- $\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$
- $\ln a/b = \ln a - \ln b$
- $\ln a^r = r \ln a$

Contoh

Tentukan dy/dx jika $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Jawab: Menggunakan Teorema sebelumnya

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x+1)]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Penurunan Logaritmik

Tentukan dy/dx bila $y = \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$.

Jawab: Ambil \ln dari kedua ruas, lalu turunkan terhadap x :

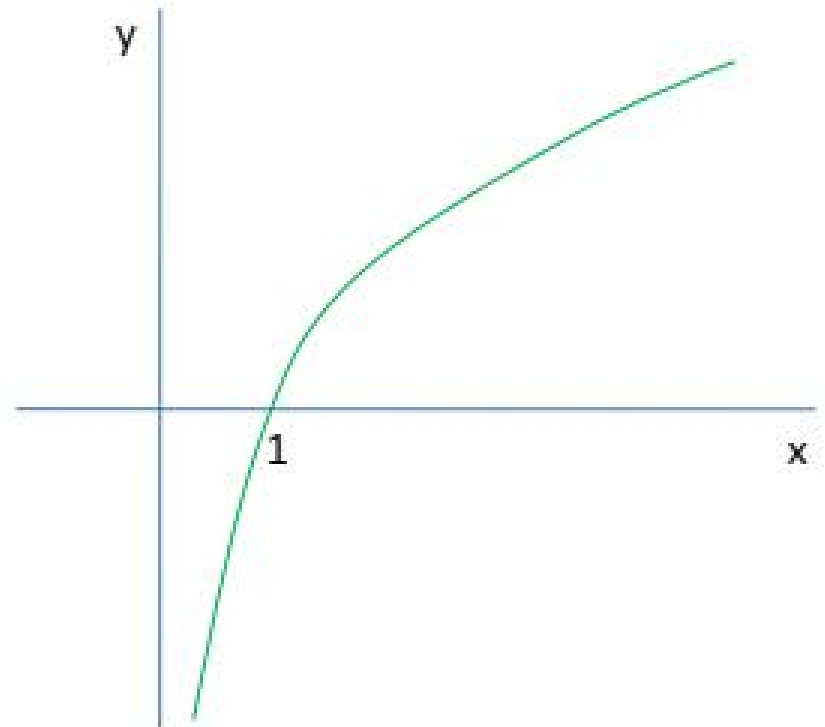
$$\ln y = \ln(x+11) - \frac{1}{2} \ln(x^3-4)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+11} - \frac{1}{2} \frac{3x^2}{x^3-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+11} - \frac{3x^2}{2(x^3-4)} \right) \frac{x+11}{\sqrt{x^3-4}}$$

Grafik Fungsi $y = \ln x$

Catat bahwa $\ln 1 = 0$,
 $dy/dx = 1/x > 0$ dan
 $d^2y/dx^2 = -1/x^2 < 0$
sehingga grafik $y = \ln x$
monoton naik dan
cekung ke bawah.



Latihan

1. Tentukan $\int \tan(2x) dx$.

2. Tentukan semua nilai ekstrim dari

$$f(x) = 2x^2 \ln x - x^2$$

pada daerah asalnya.

3. Tentukan dy/dx jika $y = \frac{(x+1)^{3/2} (x^2-1)^2}{\sqrt{x-2}}$.

Fungsi Invers

Dalam hal tertentu, dari persamaan fungsi $y = f(x)$ kita dapat memperoleh x sebagai fungsi dari y , sebutlah $x = g(y)$. Fungsi g disebut **invers** dari f , ditulis

$$g = f^{-1}.$$

Jadi: $y = f(x)$ jika dan hanya jika $x = f^{-1}(y)$.

Contoh:

$$y = 2x + 3 \text{ jika dan hanya jika } x = \frac{1}{2}(y - 3).$$

Cttn. Grafik $y = f^{-1}(x)$ merupakan **pencerminan** grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.

Teorema (Eksistensi Invers)

Jika f fungsi 1-1, maka f mempunyai invers.

Akibatnya,

jika f monoton sejati, maka f mempunyai invers.

Turunan dari Fungsi Invers

Jika $y = f(x)$ dan $f'(x) \neq 0$, maka

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dalam notasi Leibniz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Contoh

Diketahui $y = x^5 + x + 1 = f(x)$. Tentukan $(f^{-1})'(3)$.

Jawab: $3 = f(1)$. Lalu, f monoton naik karena $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ untuk setiap x . Jadi, f^{-1} ada.

Menurut Teorema tadi,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5 \cdot 1^4 + 1} = \frac{1}{6}.$$

Latihan

1. Hitung $(f^{-1})'(2)$ apabila $f(x) = 3x^5 + x - 2$.
2. Buktikan bahwa $y = f(x) = \ln x$ mempunyai invers, sebutlah $y = g(x)$. Kemudian buktikan bahwa $g'(x) = g(x)$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.3 Fungsi Eksponen Natural

- Menentukan turunan dari **fungsi eksponen natural** dan variannya.
- Menentukan integral tak tentu dari e^u dan variannya.

6.4 Fungsi Eksponen dan Logaritma Umum

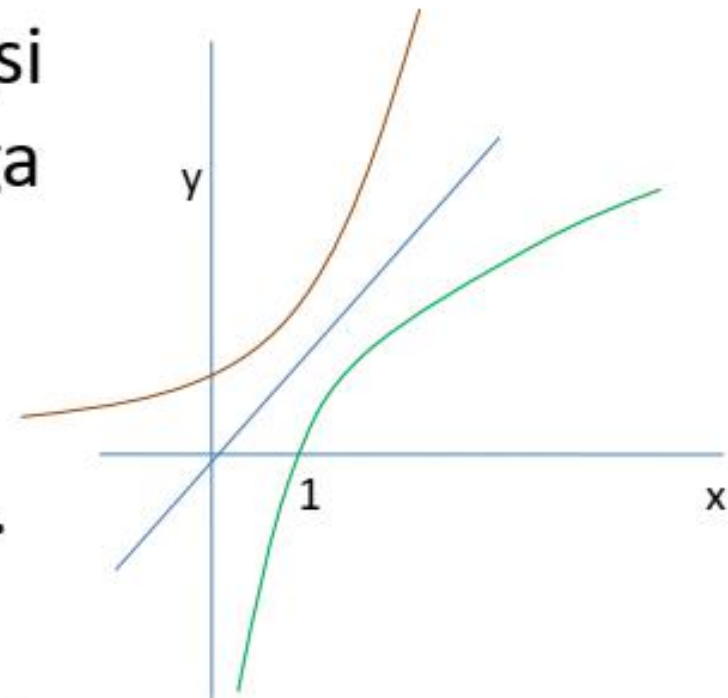
- Menentukan turunan dan integral dari **fungsi eksponen umum**.
- Menentukan turunan dari **fungsi logaritma umum**.

Fungsi Eksponen Natural (exp)

Dari soal latihan terakhir, fungsi $y = \ln x$ monoton naik, sehingga mempunyai invers.

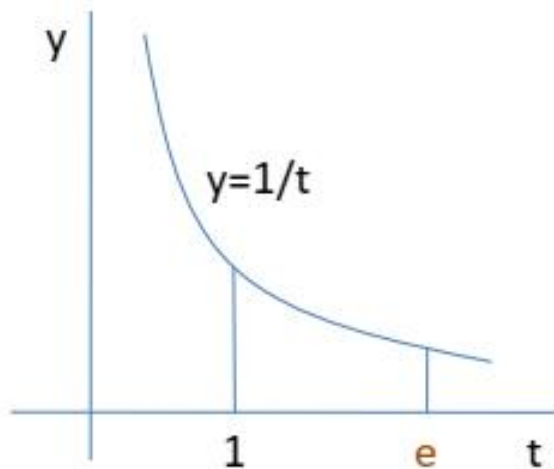
Definisi: $x = \exp y$ j.h.j. $y = \ln x$.

Sifat: $\exp(\ln x) = x$ utk tiap $x > 0$
 $\ln(\exp y) = y$ utk tiap $y \in \mathbf{R}$.



Bilangan e

Definisi: Bilangan e adalah bilangan real positif yang memenuhi $\ln e = 1$.



$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Catatan. $e \approx 2,718281828459045\dots$

Fungsi exp adalah fungsi eksponen!

Perhatikan bahwa untuk tiap $r \in \mathbb{Q}$ berlaku:

$$e^r = \exp(\ln e^r) = \exp(r \ln e) = \exp r$$

Ini menunjukkan bahwa fungsi **exp** merupakan **fungsi eksponen**, dengan eksponen **e**.

Catatan. Fungsi eksponen berbeda dengan **fungsi pangkat**. Pada fungsi pangkat, yang merupakan peubah adalah bilangan yang dipangkatkan. Pada fungsi eksponen, yang merupakan peubah adalah pangkatnya.

Jadi ...

$$e^{\ln x} = x, \quad \forall x > 0$$

$$\ln(e^y) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Juga:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.$$

Bagaimana membuktikan sifat terakhir di atas?

[Gunakan sifat-sifat logaritma!]

Turunan dari $y = e^x$

Dari $x = \ln y$, kita peroleh

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}.$$

sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Integral Tak Tentu dari $y = e^x$

Dari hasil sebelumnya, kita peroleh

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Contoh

1. Tentukan dy/dx bila $y = e^{x^2}$.

Jawab: Dengan Aturan Rantai, kita peroleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{x^2}) = e^{x^2} \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Contoh

2. Tentukan $\int xe^{x^2} dx$.

Jawab: Misalkan $u = x^2$. Maka, $du = 2x \cdot dx$,
sehingga

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Latihan

1. Tentukan dy/dx bila $y = xe^{2x}$.

2. Tentukan $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

3. Hitunglah $\int_0^1 e^{2x} dx$.

4. Gambar grafik fungsi $y = xe^{-x}$, $x \geq 0$.

Fungsi Eksponen a^x

Jika $a > 0$ dan r rasional, maka

$$a^r = \exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a) = e^{r \ln a}.$$

Definisi: Untuk $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$, kita definisikan

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Catatan: Jika $a = e$, maka $a^x = e^{x \cdot \ln e} = e^x$. [konsisten]

Sifat-Sifat Fungsi Eksponen

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = a^x \div a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Teorema

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1.$$

Contoh

1. Tentukan dy/dx jika $y = 2^{\sqrt{x}}$.

Jawab:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (2^{\sqrt{x}}) = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2\sqrt{x}}.$$

2. Tentukan $\int x^2 5^{x^3} dx$.

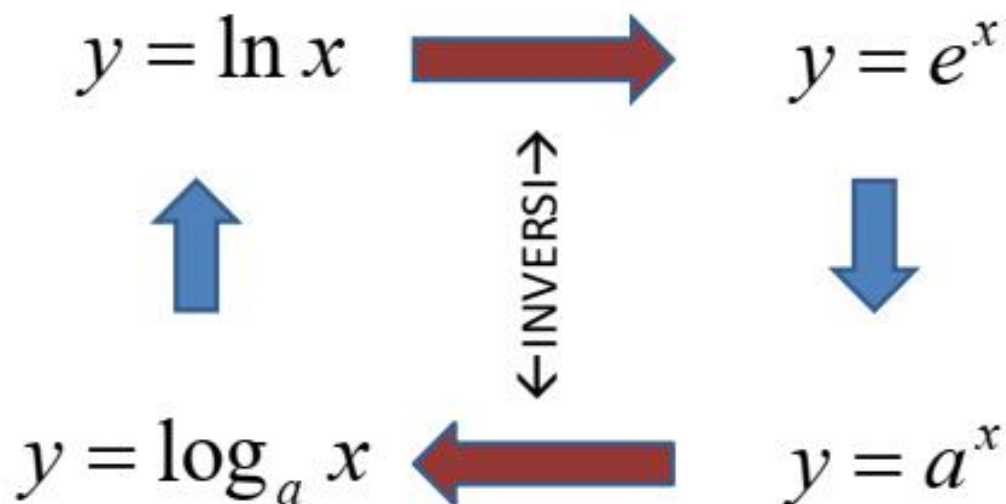
Jawab:

Fungsi Logaritma Umum $\log_a x$

Definisi: Misal $a > 0, a \neq 1$. Kita definisikan

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Catat jika $a = e$, maka $\log_a x = \ln x$.



Catatan

Jika $y = \log_a x$, maka $x = a^y$, sehingga

$$\ln x = \ln a^y = y \ln a.$$

Karena itu,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

sehingga

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

Contoh

Tentukan dy/dx jika $y = \log_{10}(x^2 + 1)$.

Jawab: Misalkan $u = x^2 + 1$. Maka $y = \log_{10} u$,
sehingga ...

Latihan

1. Tentukan $\frac{d}{dx}(10^{x^2})$.

2. Hitunglah $\int_0^1 5^{3x} dx$.

3. Buktikan bahwa $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$, $a \neq 1$, monoton.
Tentukan inversnya.

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan