FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-12

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.5 Pertumbuhan dan Peluruhan Ekponensial

- Menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah pertumbuhan dan peluruhan eksponensial.

6.6 Fungsi Trigonometri Invers

- Menentukan turunan fungsi trigonometri invers (dan integral yang bersesuaian).

Pertumbuhan Eksponensial

Misalkan pertambahan suatu populasi sebesar Δy dalam waktu Δt, **sebanding** dengan banyak-nya penduduk pada waktu itu dan dengan lebar selang waktu Δt, yakni

$$\Delta y = k\, y\, \Delta t.$$

Dalam hal ini

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k.dt$$

(c) Hendra Gunawan

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$\ln y = kt + C$$

$$y = e^{kt+C} = Ae^{kt}$$

Misalkan diketahui jumlah populasi awal $y(0) = y_0$.
Maka $y_0 = Ae^0 = A$, sehingga

$$y = y_0 e^{kt}.$$

Nilai k dapat ditentukan apabila kita mempunyai informasi tambahan, misalnya $y(10) = 2y_0$ (**waktu melipat ganda** = 10 satuan waktu).

Contoh

Misalkan suatu koloni bakteri berkembang biak dengan laju sebanding dengan banyaknya bakteri pada saat itu. Bila pada awal pengamatan terdapat 10.000 bakteri dan setelah 10 hari terdapat 24.000 bakteri, berapa banyaknya bakteri setelah 25 hari?

Jawab: Misalkan y = y(t) menyatakan banyaknya bakteri pada saat t. Maka (seperti tadi)

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y = Ae^{kt}$$

Pada saat t = 0, diketahui y = 10.000. Jadi

$$10.000 = A.e^0 = A,$$

sehingga $y = 10.000e^{kt}$.

Pada saat t = 10, diketahui y = 24.000. Jadi

$$24.000 = 10.000e^{10k},$$

sehingga

$$e^{10k} = 2{,}4$$

$$10k = \ln 2{,}4$$

$$k = \tfrac{1}{10} \ln 2{,}4.$$

Pada saat t =25,

$$y = 10.000e^{(2{,}5)\ln 2{,}4} = 10.000(2{,}4)^{2{,}5}.$$

Peluruhan Eksponensial

Mirip dengan pertumbuhan eksponensial yang terjadi pada suatu populasi, peluruhan eksponensial terjadi pada zat radioaktif.

Zat radioaktif meluruh dengan laju sebanding dengan banyaknya zat yang tersisa pada saat itu.

Jika $y = y(t)$ menyatakan banyaknya zat yang tersisa pada saat t, maka

$$\frac{dy}{dt} = -ky; \quad \therefore y = Ae^{-kt} \quad (k > 0)$$

Latihan

Misalkan suatu zat radioaktif meluruh dengan laju sebanding dengan banyaknya zat yang tersisa pada saat itu. Diketahui pada awal pengamatan terdapat 20 gram dan setelah 1 tahun tersisa 15 gram. Tentukan **waktu paruh** zat tsb.

Jawab: Misalkan $y = y(t)$ menyatakan banyaknya zat pada saat t. Maka ...

Hukum Pendinginan Newton

Suatu objek dgn suhu awal T_0 dimasukkan ke dalam ruangan dgn **suhu ruang** T_1 (konstan).

Jika $T_0 > T_1$, maka suhu benda akan turun dgn laju sebanding dgn selisih suhunya dgn suhu ruang.

Jika diketahui setelah 10 menit, suhu benda turun menjadi $(T_0+T_1)/2$, berapa suhu benda tsb setelah t menit?

Hukum Pendinginan Newton

Jawab: Misal $T = T(t)$ menyatakan suhu benda tsb setelah t menit. Maka

$$dT/dt = k(T - T_1) \text{ atau } dT/(T - T_1) = k\,dt.$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$\ln(T - T_1) = kt + C,$$

sehingga $$T = T_1 + Ae^{kt}.$$

Nilai A dan k dapat dicari dari informasi suhu awal dan suhu pd saat $t = 10$.

Fungsi Trigonometri Invers

Fungsi $y = \sin x$ naik pada $[-\pi/2, \pi/2]$, karena itu mempunyai invers $x = \sin^{-1} y$ pada $[-1, 1]$.

$$x = \sin^{-1} y \text{ j.h.j. } y = \sin x, -\pi/2 \le x \le \pi/2.$$

Fungsi $y = \cos x$ turun pada $[0, \pi]$, karena itu mempunyai invers $x = \cos^{-1} y$ pada $[-1, 1]$.

$$x = \cos^{-1} y \text{ j.h.j. } y = \cos x, 0 \le x \le \pi.$$

Fungsi Trigonometri Invers

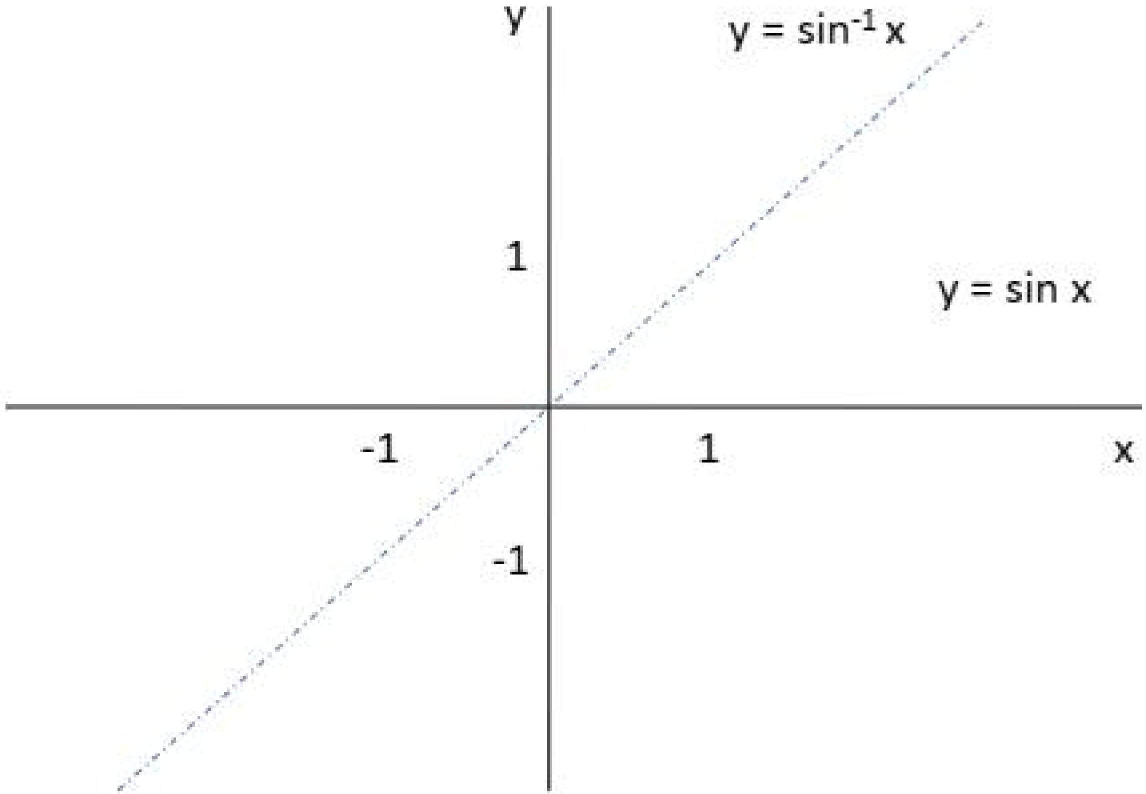
Fungsi $y = \tan x$ naik pada $(-\pi/2, \pi/2)$, karena itu mempunyai invers $x = \tan^{-1} y$ pada $(-\infty, \infty)$.

$$x = \tan^{-1} y \text{ j.h.j. } y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Fungsi $y = \sec x$ 1-1 pada $[0, \pi] - \pi/2$, karena itu mempunyai invers $x = \sec^{-1} y$ pada $\{y : |y| > 1\}$.

$$x = \sec^{-1} y \text{ j.h.j. } y = \sec x,\ 0 \le x \le \pi,\ x \ne \pi/2.$$

Grafik Fungsi Trigonometri Invers



Contoh

$$\sin^{-1}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sec^{-1}(-1) = \pi.$$

Beberapa Kesamaan

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\tan(\sec^{-1} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

$$(+\,jika : x > 1; -\,jika : x < -1)$$

Contoh

$$1.\ \sin(2\cos^{-1}\tfrac{2}{3}) = 2\sin(\cos^{-1}\tfrac{2}{3})\cos(\cos^{-1}\tfrac{2}{3})$$

$$= 2\sqrt{1-(\tfrac{2}{3})^2}\,.\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$2.\ \tan(\sin^{-1}x) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Turunan Fungsi Trigonometri Invers

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

Bukti bahwa $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Misal $y = \sin^{-1} x$. Maka $x = \sin y$. Turunkan kedua ruas secara implisit terhadap x, diperoleh

$$1 = \cos y.(dy/dx).$$

Jadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integral yang Menghasilkan Fungsi Trigonometri Invers

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + D$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} |\,x\,| + C$$

Contoh

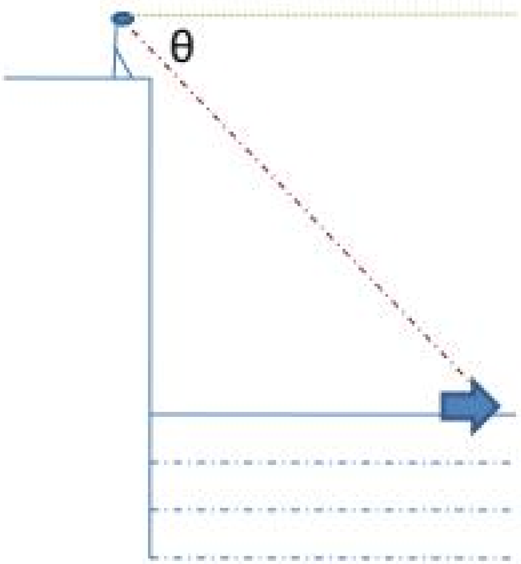
Hitung $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

<u>Jawab</u>: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x\Big|_{-1}^{1} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(1)$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Latihan

Seseorang yg tingginya ~1,60 m berdiri di tepi atas tebing, melihat ke laut yang berada ~18,40 m di bawahnya. Pada saat itu terdapat perahu yang menjauhi tebing dengan laju 5 m/det. Bila θ menyatakan besar sudut pandang-nya (terhadap garis horisontal), berapakah besarnya **laju perubahan θ terhadap waktu**, pada saat perahu tsb berjarak 50 m dari tebing?



Sepeda Beroda Persegi

Dapatkah Anda menentukan persamaan lintasannya?

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.7 Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

- Menentukan turunan fungsi hiperbolik dan inversnya.

6.8 Persamaan Diferensial Linear Orde 1

- Menyelesaikan persamaan diferensial linear orde 1 dan permasalahan yang relevan.

Fungsi Hiperbolik & Invers-nya

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

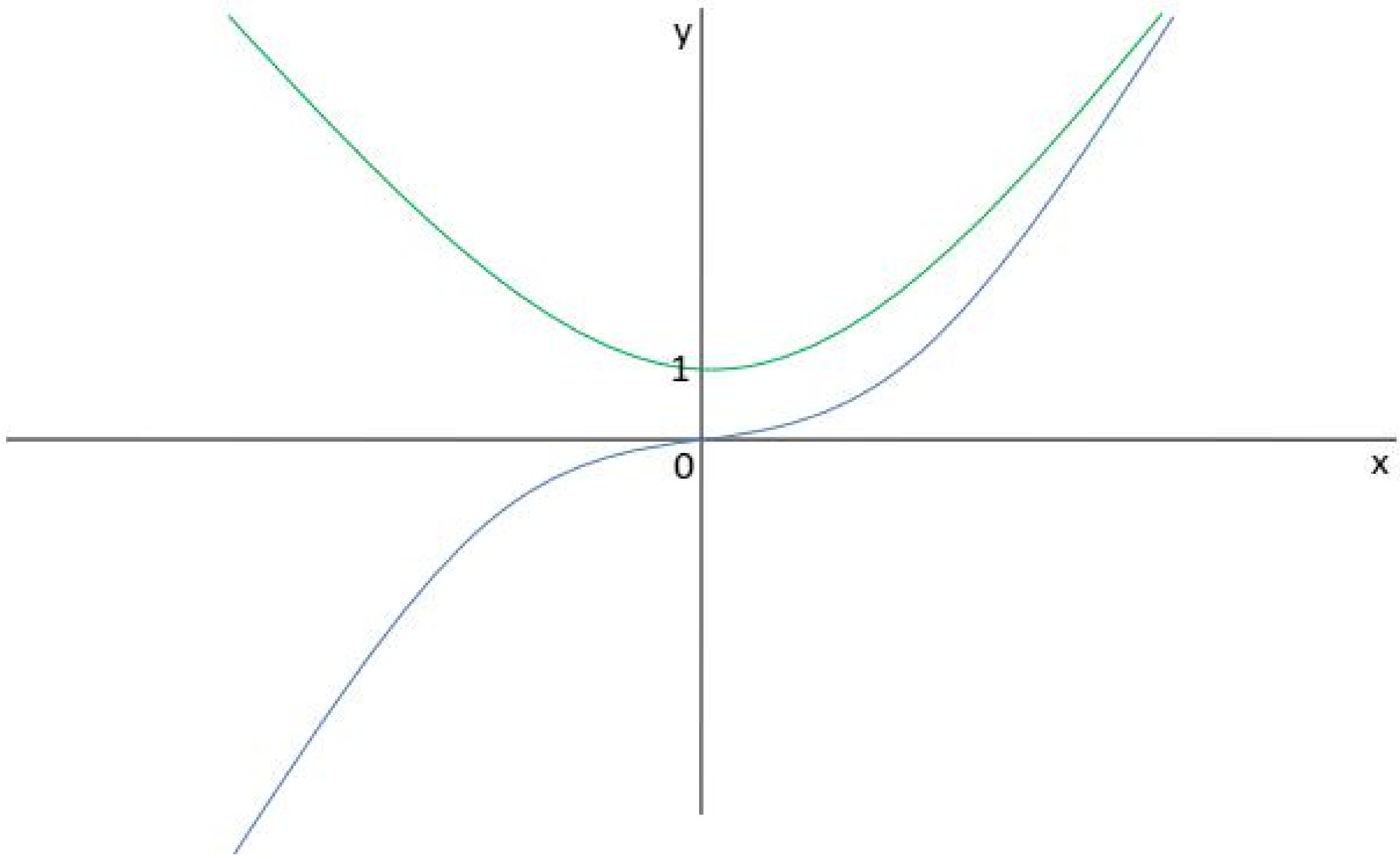
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

sech x = 1/cosh x

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

csch x = 1/sinh x

Grafik Fungsi y = sinh x dan y = cosh x



Kesamaan Hiperbolik

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$

Bukti:

$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2\, x.$

Bukti:

Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = ?$$

$$\frac{d}{dx}\text{sech } x = ?$$

Menentukan Invers dari y = sinh x

y = sinh x monoton naik, jadi mempunyai invers.

x = $\sinh^{-1}$ y j.h.j. y = sinh x.

Dapat dibuktikan bahwa $\sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

sbb:
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Invers dari Fungsi Hiperbolik

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad -1 < x < 1$$

sech^{-1} x = ?

Turunan dari Invers Fungsi Hiperbolik

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in \Re$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad x > 1$$

Buktinya?

Latihan

Tentukan dy/dx bila:

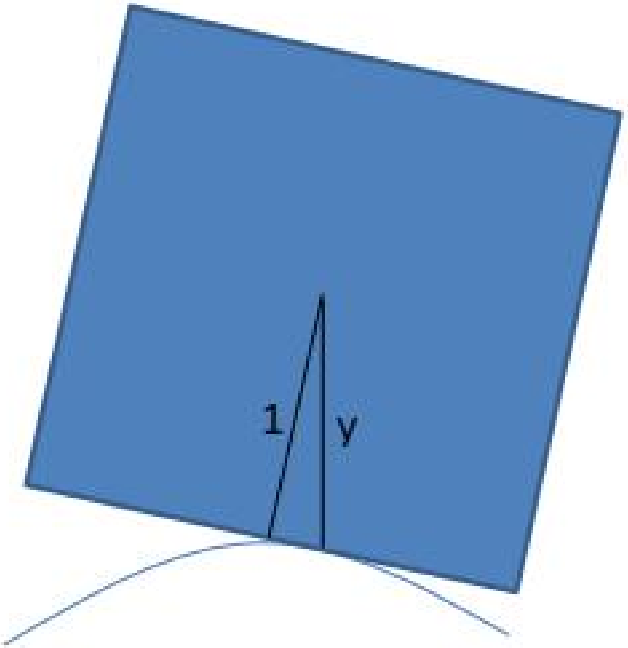
1. $y = \tanh^{-1} x$.
2. $y = \text{sech}^{-1} x$.

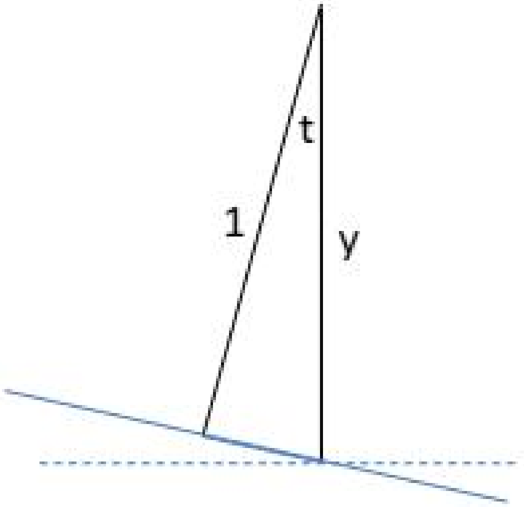
Sepeda Beroda Persegi

Pernahkah anda melihat sepeda beroda persegi? Bagaimana sepeda tsb bergerak di atas jalan yang rata? Ia akan bergerak naik-turun, ya 'kan?

Nah, bila kita menghendaki sepeda tsb bergerak mendatar **tidak** naik-turun, maka jalannya harus dibuat khusus.. Tapi seperti apa?

Sepeda Beroda Persegi





$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$$

Persamaan Diferensial Orde 1

Kita telah berhadapan dengan persamaan diferensial orde 1 yang sederhana, yang dapat diselesaikan dengan **metode pemisahan peubah**. Sebagai contoh:

1. $dy/dt = ky$
2. $dy/dx = x/y$
3. $dT/dt = k(T - T_1)$
4. $dy/dx = (y^2 - 1)^{½}$

Bagaimana dengan persamaan diferensial ini:

5. $dy/dx + y = x$
6. $y' + y \tan x = \sec x$

Persamaan Diferensial Linear Orde 1

Persamaan diferensial orde 1 yang berbentuk

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (*)$$

disebut **persamaan diferensial linear orde 1**.

Persamaan bentuk ini dapat diselesaikan dengan mencari terlebih dahulu **faktor pengintegral**-nya, yaitu $F(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Kalikan kedua ruas dengan $F(x)$, persamaan (*) menjadi

$$F(x)y' + F(x)P(x)y = F(x)Q(x).$$

Perhatikan bahwa ruas kiri merupakan turunan dari $F(x)y$; sehingga persamaan di atas menjadi

$$(F(x)y)' = F(x)Q(x).$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$F(x)y = \int F(x)Q(x)\,dx.$$

Jadi

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int F(x)Q(x)\,dx.$$

Contoh

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y' + xy = x.$$

Jawab: Faktor pengintegralnya adalah $e^{\int x\,dx} = \exp(\tfrac{1}{2}x^2)$.

Jadi kita kalikan kedua ruas dengan faktor ini,

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y' + e^{\frac{1}{2}x^2} xy = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2} y\right) = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y = \int e^{\frac{1}{2}x^2} x\,dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Latihan

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

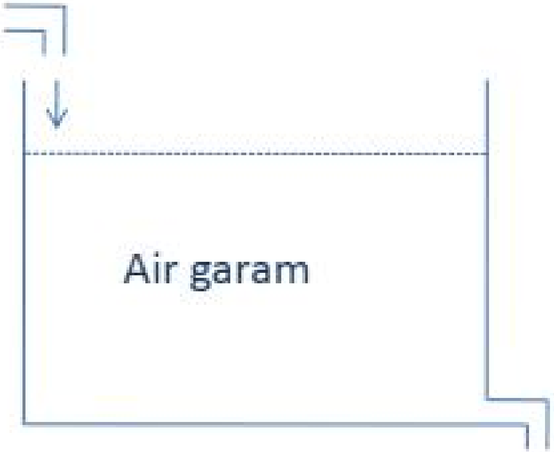
$$y' + y \tan x = \sec x.$$

Jawab: Faktor pengintegralnya adalah $e^{\int \tan x \, dx}$ = ...

Kalikan kedua ruas dengan faktor tsb, ...

Aplikasi PD Linear Orde 1

Bila tanki dialiri air garam dan pada saat yang sama larutan mengalir ke luar dari tanki tsb, berapakah kadar garam pada larutan tsb setelah sekian lama?



Diketahui: volume awal tanki = 120 liter air garam, dengan kandungan 75 gram garam.

Air yang mengandung 1,2 gram garam per liter mengalir masuk ke dalam tanki dgn laju 2 liter/menit.

Air yang teraduk rata keluar dari tanki dengan laju yang sama.

Jawab:

Misalkan y = y(t) menyatakan banyaknya garam yang terkandung dalam tanki setelah t menit.

Maka

$$\frac{dy}{dt} = 2{,}4 - \frac{y}{60} \qquad (garam.masuk - garam.keluar)$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{60} = 2{,}4$$

Solusinya adalah $y = 144 + Ce^{-\frac{1}{60}t}$.

Pada t = 0, y = 75; jadi C = -69, sehingga

$$y = 144 - 69e^{-\frac{1}{60}t}.$$

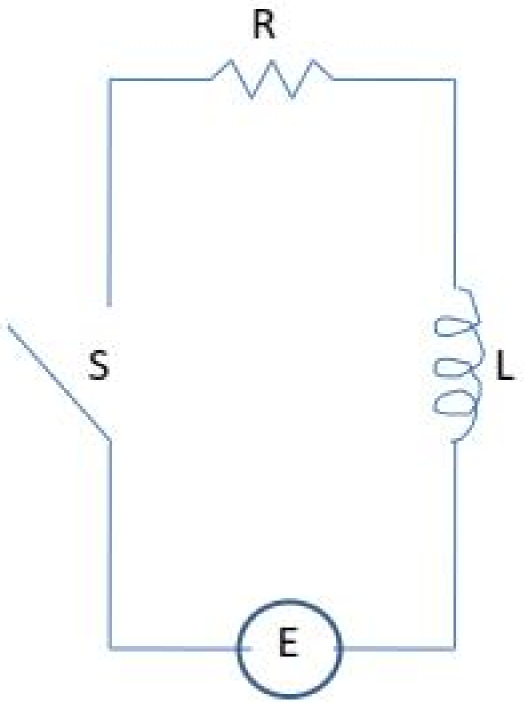
Latihan

Rangkaian listrik *R-L* dengan sumber tenaga *E*(t) akan dialiri arus *I* = *I*(t), yang memenuhi persamaan diferensial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

dengan *L* = induktansi (henry) dan *R* = resistansi (ohm).

Selesaikan PD ini, jika $L = 1$ H, $R = 10^6\ \Omega$, dan $E(t) = 1$ V.



Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan