# FI19104
# Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-15

**Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si**
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

# Integral Tak Wajar

Dalam definisi integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ terdapat dua asumsi:

(i) selang pengintegralannya, yaitu [a,b], merupakan selang **terhingga**;

(ii) fungsi integrannya (yang diintegralkan) merupakan fungsi **terbatas**.

Namun, dalam aplikasinya, ada kalanya salah satu atau kedua asumsi ini tidak dipenuhi. Dalam hal demikian kita berhadapan dengan **integral tak wajar**.

# Integral Tak Wajar dengan Batas Tak Terhingga

Pada sub-bab ini kita akan membahas terlebih dahulu integral tak wajar dengan **batas tak terhingga**, misalnya integral berikut ini:

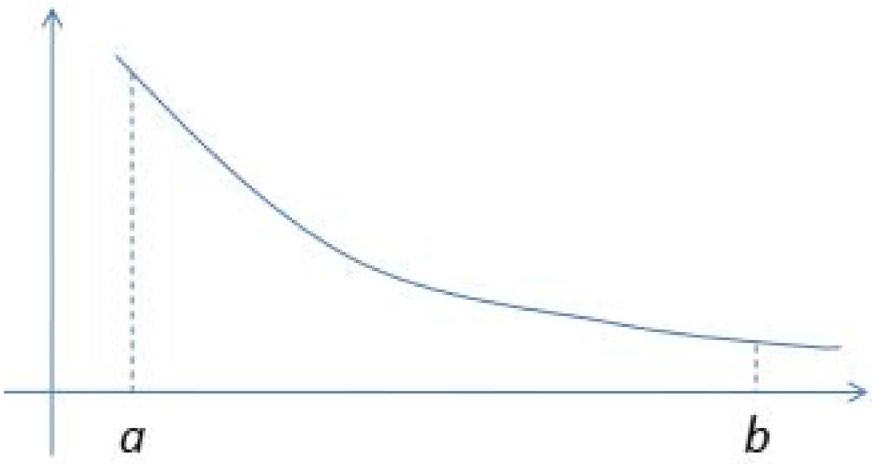
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^3}\,dx.$$

Kita akan mulai dengan bentuk yang pertama terlebih dahulu.

# Bagaimana Menghitung $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Untuk setiap *b* > *a*, kita dapat meng-hitung integral tentu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

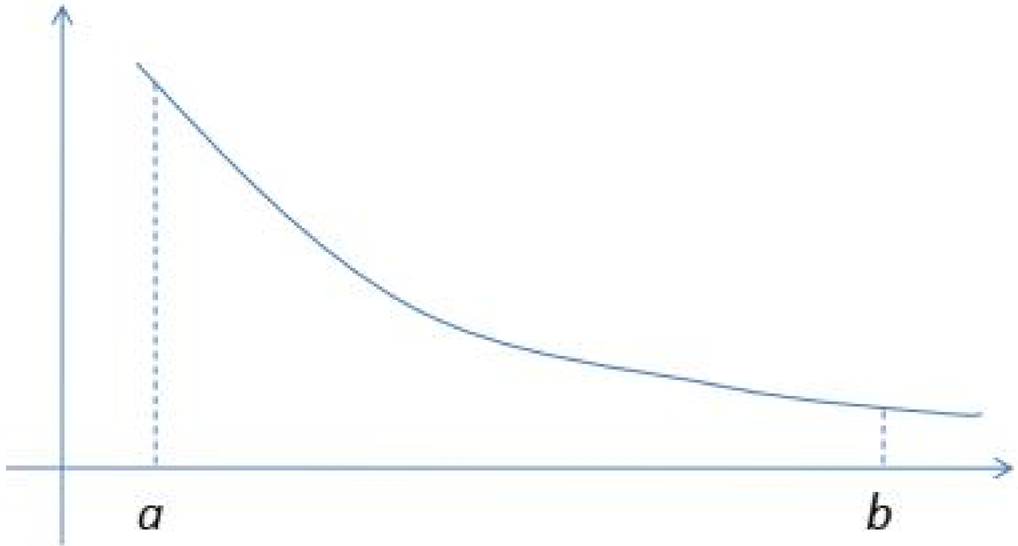



Integral tak wajar

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

dapat didefinisikan sebagai limit dari integral tentu di atas, untuk $b \rightarrow \infty$.

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^{\infty} f(x)dx$




$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$ bila limit ini ada.

<u>Catatan</u>. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen.**

# Contoh/Latihan

1. Hitung $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx,$ bila konvergen.

<u>Jawab</u>:

Untuk setiap $b$ > 0, kita hitung

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x\Big|_0^b = \tan^{-1} b - \tan^{-1} 0 = \tan^{-1} b.$$

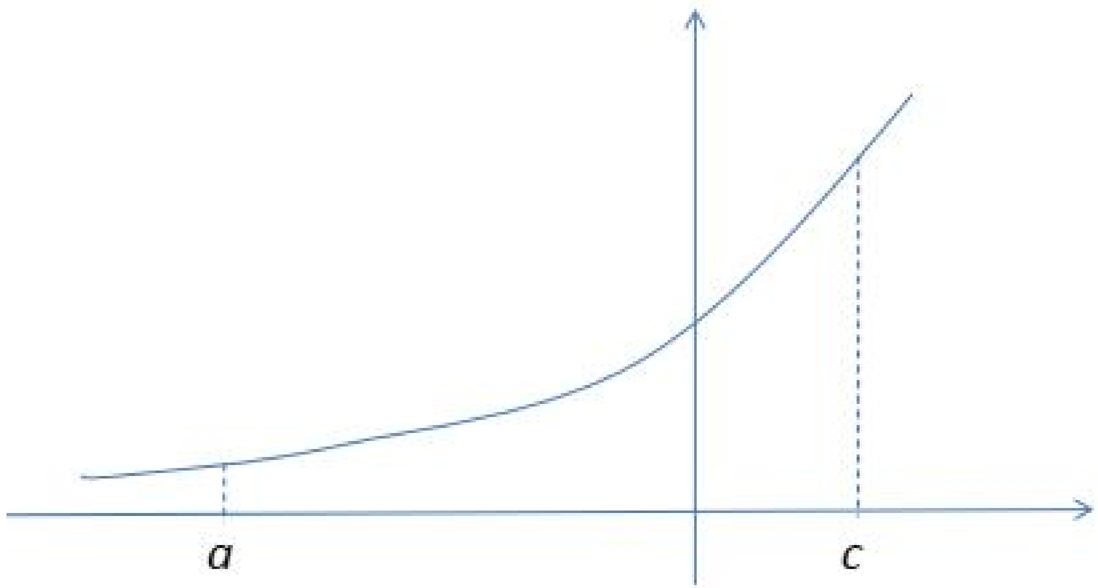
Jadi

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\tan^{-1} b = \frac{\pi}{2}.$$

2. Hitung $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$.

Jawab:

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$




$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx,$$ bila limit ini *ada*.

<u>Catatan</u>. Bila limit tsb ada, integral dikatakan **konvergen**; bila tidak, integral **divergen.**

3. Hitung $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

Jawab:

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx,$$

bila kedua integral di ruas kanan konvergen.

4. Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, bila konvergen.

Jawab:

5. Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$, bila konvergen.

<u>Jawab</u>:

# Meluncurkan Roket ke Angkasa

Menurut Hukum Newton, gaya gravitasi yang dialami oleh roket berbanding terbalik dgn jarak kuadrat, yakni $-k/x^2$, dengan $x$ = jarak dari pusat Bumi. Karena itu, gaya yang diperlukan utk mengangkat roket tsb adalah $F(x) = k/x^2$. Berapakah kerja yang diperlukan untuk meluncurkan roket dgn berat 500 N ke luar angkasa?

# Bahan Diskusi

Untuk nilai *p* berapakah integral tak wajar ini

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{p}}\, dx$$

konvergen?

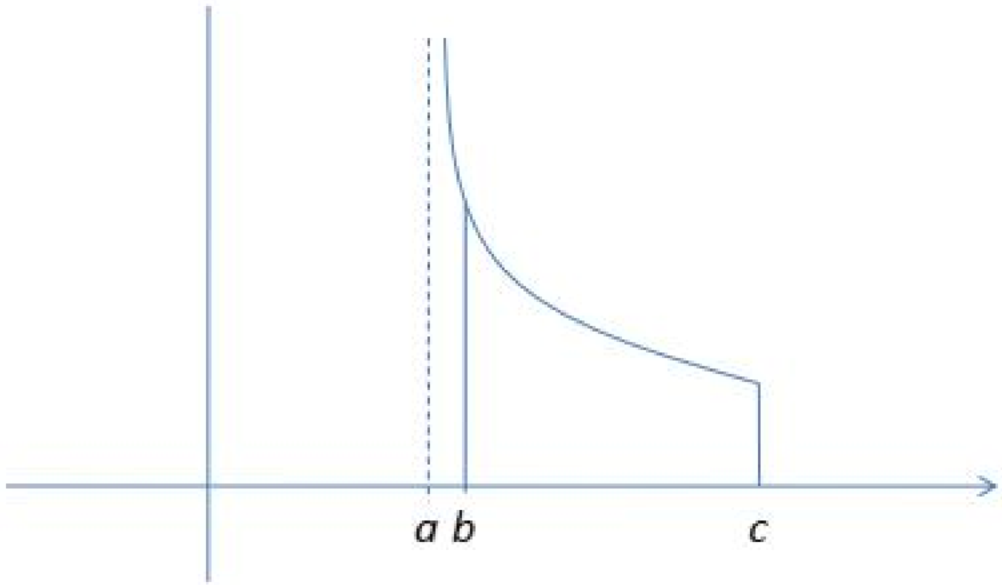
# Integral Tak Wajar dengan Integran Tak Terbatas

Sekarang kita akan membahas integral tak wajar dengan **integran tak terbatas**, misalnya integral berikut ini:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \tan x.dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Pada integral pertama, integran tak terbatas di ujung kiri; sedangkan pada integral kedua, integran tak terbatas di ujung kanan. *Apa yang membuat integral ketiga tak wajar*?

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^c f(x)dx$ dengan *f* tak terbatas di *a*




$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{b\to a^+} \int_b^c f(x)dx,$$ bila limit ini ada.

# Contoh/Latihan

1. Hitung $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, bila konvergen.

<u>Jawab</u>:

Untuk setiap *b* > 0, dengan *b* < 1, kita hitung

$$\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_b^1 = 2-2\sqrt{b}.$$

Jadi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to 0^+}(2-2\sqrt{b}) = 2.$$

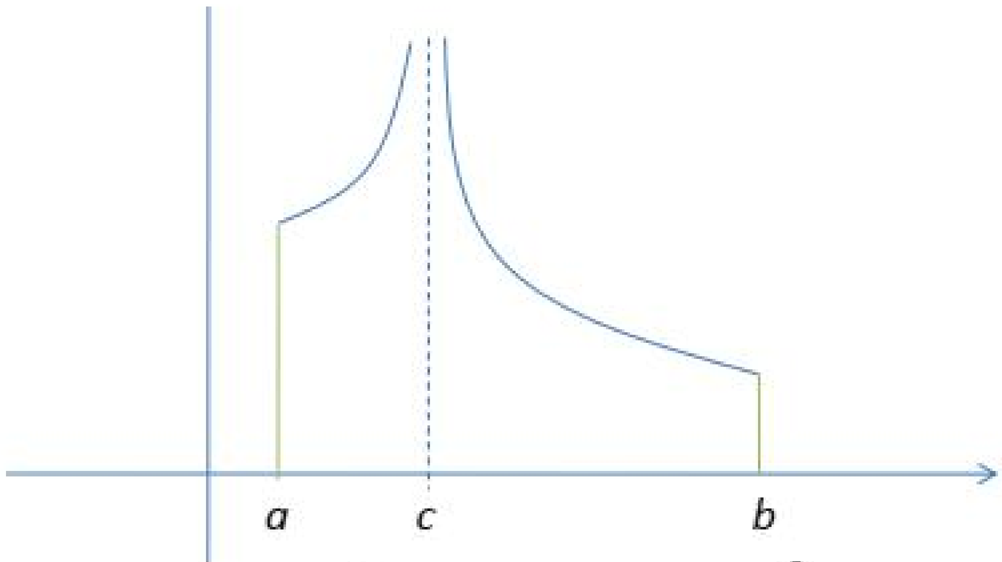
2. Hitung $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$, bila konvergen.

Jawab:

3. Hitung $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x \ln x}$, bila konvergen.

Jawab:

# Definisi Integral Tak Wajar $\int_a^b f(x)dx$ dgn *f* tak terbatas di *c* ϵ (*a*,*b*)




$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

# Contoh/Latihan

4. Hitung $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$, bila konvergen.

<u>Jawab</u>:

Integran tak terbatas di x = 1. Kita hitung dahulu:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big|_0^c = 3.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big|_c^2 = 3.$$

Jadi: $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3=6.$

5. Hitung $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx.$

<u>Jawab</u>:

# Bahan Diskusi

Untuk nilai *p* berapakah integral tak wajar ini

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergen?

Apakah ada bilangan *p* yang membuat integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

konvergen? [*Integral tak wajar jenis apa ini*?]

# Sasaran Kuliah Hari Ini

**9.1 Barisan Tak Terhingga**

Memeriksa kekonvergenan suatu barisan dan, bila mungkin, menghitung limitnya

# Mengapa Barisan Tak Terhingga

Masih ingatkah **Metode Bagi Dua** untuk mendapatkan hampiran akar dari suatu persamaan $f(x) = 0$ pada suatu selang?

Pada setiap langkah, kita membagi dua selang dan menaksir akar persamaan itu dengan titik tengah selang tersebut.

Dengan metode ini, kita dapatkan barisan titik-titik tengah selang $x_1, x_2, x_3, \ldots$ yang merupakan hampiran akar persamaan.

# Apa itu Barisan Tak Terhingga

Barisan tak terhingga, atau singkatnya **barisan** (dari bilangan real) adalah suatu fungsi dengan daerah asal **N** dan daerah nilai **R**, yang biasanya disajikan sebagai $\{a_n\}$ atau

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

**Contoh 1**: Barisan $\{2n - 1\}$ adalah barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ... .

# Contoh Lagi

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ adalah barisan bilangan -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...

   Catatan: Barisan $\{(-1)^n\}$ tidak sama dengan himpunan $\{(-1)^n : n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$.

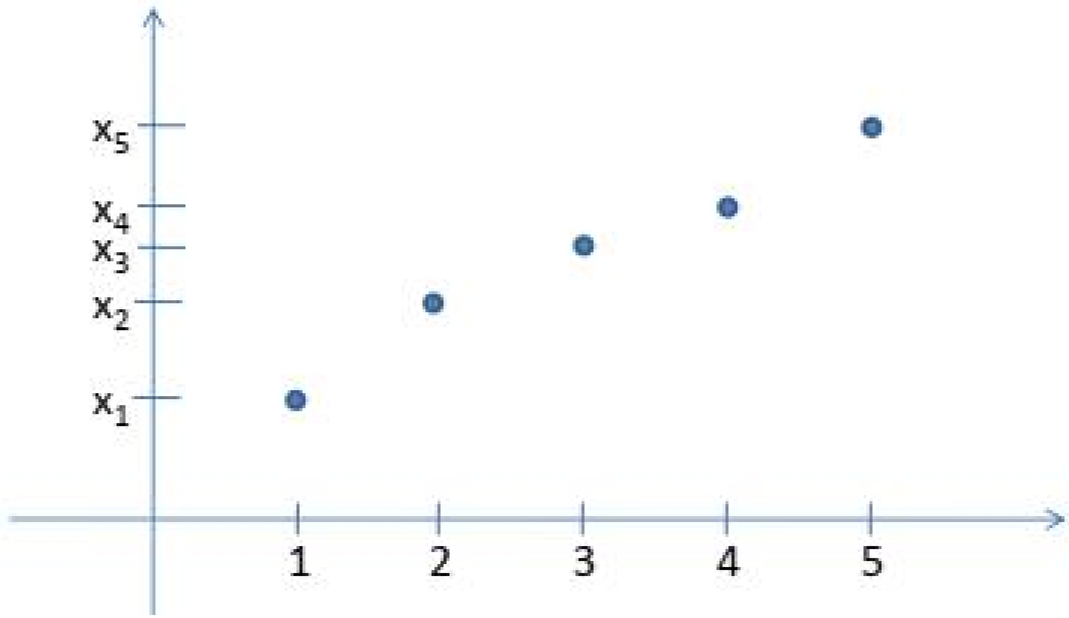
3. Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif**: $a_1 = 1$ dan

   $$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2), \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

   adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75, ...

# “Grafik” Barisan (1)

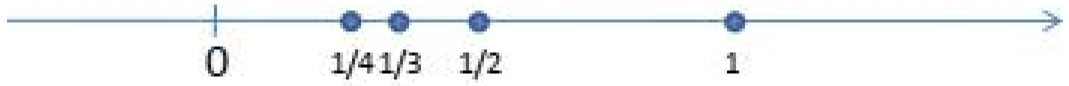
Barisan dapat kita plot pada bidang koordinat



# “Grafik” Barisan (2)

Barisan dapat kita plot pada garis bilangan real


Contoh: $\{1/n\}$



# Kekonvergenan Barisan

Diberikan suatu barisan $\{a_n\}$, apa yang terjadi bila $n \to \infty$?

**Definisi**: Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **konvergen** ke suatu bilangan $L$, ditulis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

apabila untuk tiap ε > 0 terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

**Catatan**. Tidak semua barisan konvergen. Barisan yang tidak konvergen disebut **divergen**.

**Contoh**:

1. Barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergen ke 0, yakni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   Untuk tiap ε > 0, dapat dipilih *N* > 1/ε sehingga jika *n* ≥ *N*, maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ merupakan barisan yang divergen, yakni: untuk tiap $L \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq L.$$

Sebagai contoh, untuk $L = 1$, ada $\varepsilon = 1$ sehingga berapapun $N \in \mathbf{N}$ yang kita pilih, selalu ada bilangan ganjil $n \geq N$ sehingga

$$\left|(-1)^n - 1\right| = 2 > \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n \neq 1.$$

## **9.1b** Beberapa Teorema Bantuan untuk Memeriksa Kekonvergenan Barisan dan Menghitung Limitnya

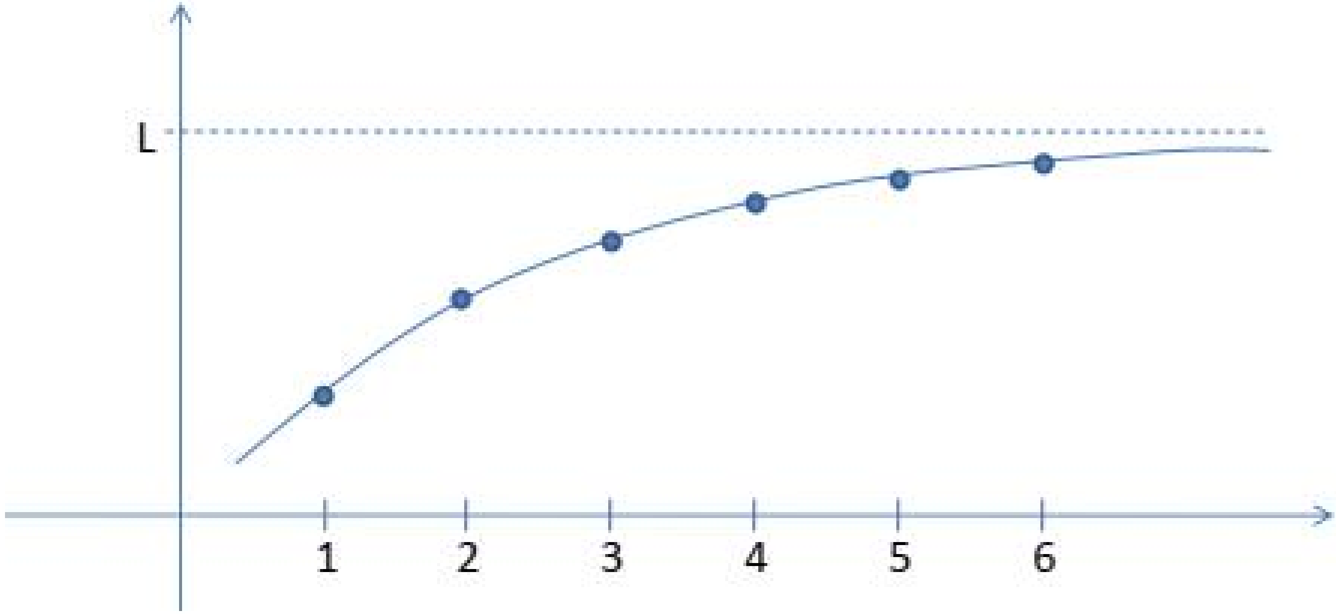
# Teorema Limit Barisan

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan yang konvergen, dan $k$ konstanta. Maka

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, asalkan \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0.$

# Teorema Limit Barisan

*Jika* $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, *maka* $\lim_{n \to \infty} f(n) = L$.



**Contoh**:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+3/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}2+3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}1/n}=\frac{1}{2+3\cdot 0}=\frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^3+3n-1}=\ldots$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\ldots$$

# Teorema Apit untuk Barisan

*Jika* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *untuk* $n \geq K$ ($K \in \mathbf{N}$ *tertentu*) *dan*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L, \quad \textit{maka} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

**Contoh**:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0, karena -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

   dan $\pm \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

2. *Jika* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0, maka \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

   karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \forall n \in$ **N**.

# Barisan Monoton

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **naik** apabila $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **turun** apabila $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan naik atau turun disebut barisan **monoton**.

**Contoh**: $\{1/n\}$ turun, sedangkan $\{2^n\}$ naik.

# Latihan

Selidiki apakah barisan berikut monoton (naik atau turun) atau tidak.

1. $\{1 - 2^{-n}\}$
2. $\{(-1)^n\}$
3. $\{\ln n\}$
4. $\{n \cdot \ln n\}$
5. $\{(\ln n)/n\}$

# Teorema Barisan Monoton

*Jika barisan* $\{a_n\}$ *naik dan* **terbatas di atas***, yakni terdapat* $M \in \mathbf{R}$ *sehingga* $a_n \leq M$ *untuk tiap* $n \in \mathbf{N}$*, maka* $\{a_n\}$ *konvergen.*

*Jika barisan* $\{a_n\}$ *turun dan* **terbatas di bawah***, yakni terdapat* $m \in \mathbf{R}$ *sehingga apabila* $m \leq a_n$ *untuk tiap* $n \in \mathbf{N}$*, maka* $\{a_n\}$ *konvergen.*

# Contoh/Latihan

Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif**: $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2),\text{ untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75, … .

Dengan **Prinsip Induksi Matematika***, dapat dibuktikan bahwa barisan ini naik dan terbatas di atas. Karena itu, menurut Teorema Barisan Monoton, barisan $\{a_n\}$ konvergen.

Ke manakah barisan $\{a_n\}$ konvergen?

# *Prinsip Induksi Matematika

Misalkan P($n$) adalah pernyataan atau kalimat matematika yang berkenaan dengan $n \in \mathbf{N}$. [Sebagai contoh, P($n$) adalah kalimat "$n < 2^n$".]

***Jika***:

(i) P(1) benar, dan

(ii) P($k$) benar mengakibatkan P($k$+1) benar,

***maka***:

P($n$) benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan