

FI19104

Pengantar Fisika

Matematika

Materi Minggu ke-14

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si

UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

7.5 Integral Fungsi Rasional

Menghitung **integral fungsi rasional** dengan menggunakan pecahan parsial

7.6 Strategi Pengintegralan

Memiliki **strategi** apa yang harus dilakukan bila dihadapkan pada suatu bentuk integral

Menghitung Integral Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinom. Secara umum, fungsi rasional dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dengan P , Q dan R polinom, dan derajat $R <$ derajat Q .

Integral dari $P(x)$ dapat diperoleh dengan mudah. Karena itu, untuk menghitung integral dari $f(x)$, kita perlu mengetahui bagaimana menghitung integral dari $R(x)/Q(x)$.

Contoh/Latihan

1. Tentukan $\int \frac{x+1}{x^2+1} dx$

Jawab:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x + C.\end{aligned}$$

2. Tentukan

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

Jawab:

Dekomposisi atas Faktor Linear

3. Misalkan kita hendak menghitung $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$.

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C. \end{aligned}$$

4. Tentukan $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

Petunjuk: Tuliskan $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ dan carilah nilai A dan B yang memenuhinya.

5. Tentukan $\int \frac{2x-2}{x(x+1)(x+2)} dx$

Jawab:

6. Tentukan $\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$

Petunjuk: Tuliskan $\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$ dan carilah nilai A , B dan C yang memenuhinya.

7. Tentukan $\int \frac{1}{x(x^2 + 2x + 5)} dx$

Jawab:

8. Tentukan $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

Petunjuk: Tuliskan

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

carilah nilai A , B dan C yang memenuhinya.

9. Tentukan $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$

Petunjuk: Faktorkan dahulu $x^3 - 1$.

Persamaan Diferensial Logistik

Pada Semester I, kita membahas persamaan diferensial $y' = ky$ yang terkait dgn pertumbuhan suatu populasi $y = y(t)$. Di sini kita mengasumsikan bahwa ruang tidak terbatas, sehingga populasi dapat bertumbuh terus (tak terbatas). Bila ruang terbatas, maka ada kapasitas maksimum L , dan persamaan diferensialnya menjadi $y' = ky(L - y)$, yang dikenal sebagai **persamaan diferensial logistik**.

10. Suatu populasi bertumbuh sesuai dgn persamaan logistik $y' = 0.01y(250 - y)$. Populasi awal diketahui 100. Tentukan populasi pada saat $t = 5$.

Jawab:

7.6 STRATEGI PENGINTEGRALAN

Memiliki *strategi* apa yang harus dilakukan bila dihadapkan pada suatu bentuk integral

Berbeda dengan turunan, tidak ada aturan pengintegralan yang berlaku secara umum.

Bila kita dihadapkan pada suatu bentuk integral tak tentu maka yang dapat kita lakukan adalah:

0. Bila mungkin, sederhanakan dulu bentuk integrannya.
1. Coba hitung integral tsb dgn **teknik substitusi**, bila ada substitusi yg dpt mengubah integral tsb ke salah satu bentuk baku yang kita kenal.
2. Bila teknik substitusi gagal, coba hitung integral tsb dengan **pengintegralan parsial**.
3. Bila integral mengandung bentuk akar, coba **substitusi yang merasionalkan**.
4. Jika integrannya merupakan fungsi rasional, hitunglah integralnya dengan **mendekomposisi integrannya atas faktor-faktor linear dan/atau kuadratnya**.

Contoh/Latihan

1. Tentukan $\int xe^{2x} dx$

Jawab:

2. Tentukan $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Jawab:

3. Tentukan $\int x\sqrt{x+2}.dx$

Jawab:

4. Tentukan $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx$

Jawab:

5. Tentukan $\int \frac{dx}{9-16x^2}$

Jawab:

6. Tentukan $\int \frac{x}{9x^4 - 4} dx$

Jawab:

Sasaran Kuliah Hari Ini

8.1 Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Menghitung limit bentuk tak tentu 0/0 dengan menggunakan Aturan l'Hopital

8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

Menghitung limit bentuk tak tentu tipe ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , dan 1^∞

Bentuk Tak Tentu Tipe 0/0

Di Semester I, kita pernah membahas limit-limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ketiga bentuk limit ini mempunyai kemiripan: baik pembilang maupun penyebutnya sama-sama menuju 0. Ketiga limit tsb merupakan limit **bentuk tak tentu tipe 0/0**.

Catatan

- Ketika kita membahas sistem bilangan real, $0/0$ **tidak didefinisikan**.
- Yang sedang kita bahas adalah limit “**bentuk tak tentu $0/0$** ”, bukan $0/0$.
- Limit tsb disebut “bentuk tak tentu”, karena nilainya memang **tak tentu** (bisa ada, bisa tidak; dan walaupun ada, bisa berbeda antara satu bentuk $0/0$ dan bentuk $0/0$ lainnya).

Aturan L'Hôpital

Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$. *Jika*

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada (terhingga) atau tak terhingga,*

maka $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Catatan. Di sini c dapat digantikan dgn c^+ , c^- , ∞ atau $-\infty$.

Contoh/Latihan

1. Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

Jawab:

Bentuk limit di atas merupakan bentuk 0/0.
Dengan Aturan L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = \frac{3 \cdot 1^2}{1} = 3.$$

Catatan: (L) berarti bhw kita menggunakan Aturan L'Hopital.

2. Hitung (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Jawab:

3. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan x}$.

Jawab:

4. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin x}$.

Jawab:

5. Hitung $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$.

Jawab:

Bentuk Tak Tentu Tipe ∞/∞

Selain bentuk tipe $0/0$, limit berbentuk seperti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

juga sering kita hadapi. Dalam bentuk ini, baik pembilang maupun penyebut sama-sama menuju tak hingga. Bentuk limit ini merupakan bentuk tak tentu juga, yang kita sebut sebagai **bentuk tak tentu tipe ∞/∞** .

Aturan L'Hôpital utk Bentuk ∞/∞

Misalkan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. *Jika*

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ada (terhingga) atau tak terhingga,*

maka $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Catatan. Di sini c dapat digantikan dgn c^+ , c^- , ∞ atau $-\infty$.

Contoh/Latihan

1. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$.

Jawab:

Bentuk limit di atas merupakan bentuk ∞/∞ .

Dengan Aturan L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Catatan: Seperti biasa, (L) berarti bahwa kita menggunakan Aturan L'Hopital.

2. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Jawab:

Bahan Diskusi

Perhatikan bentuk limit berikut:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

- Apakah limit ini merupakan bentuk ∞/∞ ?
- Apakah Aturan L'Hopital dapat diterapkan?
- Hitunglah nilai limit tsb (terserah dengan cara apa).

Bentuk $0 \cdot \infty$

3. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$.

Jawab: Di sini $x \rightarrow 0^+$ dan $\ln x \rightarrow -\infty$ bila $x \rightarrow 0^+$.

Untuk menghitung limit ini, kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.$$

Perhatikan bahwa bentuk di ruas kanan merupakan bentuk ∞/∞ . Karena itu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{(L)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

4. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x$.

Jawab:

Bentuk $\infty - \infty$

5. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Jawab: Kita ubah terlebih dahulu bentuk di atas ke bentuk $0/0$ atau ∞/∞ .

6. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$. [*Wow, bentuk apakah ini?*]

Jawab:

7. Hitung $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$. [*Eh, bentuk apa lagi ini?*]

Jawab:

Bahan Diskusi

Perhatikan bentuk limit berikut:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\cos x}.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}.$$

- Apakah mereka merupakan bentuk tak tentu?
- Hitunglah nilai masing-masing limit tersebut (terserah dengan cara apa).

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan