FI19104 Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-2

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Bab 0. Pendahuluan

0.1 Bilangan Real

0.2 Pertaksamaan dan Nilai Mutlak

0.3 Sistem Koordinat

0.4 Grafik Persamaan

0.5 Fungsi dan Grafiknya

0.6 Operasi pada Fungsi

0.7 Beberapa Fungsi Khusus

KULIAH SEBELUMNYA

Latihan

1. Tentukan daerah asal dan daerah nilai fungsi $f(x) = \sqrt{x - x^2}$. (PR #2 utk Rabu 28/8)
2. Gambar grafik fungsi berikut dan tuliskan beberapa karakteristiknya.
   a. $y = x^3$.
   b. $y = x^4$.
   c. $y = 1 - x^4$.
   d. $y = \sqrt{x - x^2}$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

0.6 Operasi pada Fungsi

Melakukan operasi pada fungsi dan menentukan daerah asal fungsi yang dihasilkan

0.7 Beberapa Fungsi Khusus

Mengenal beberapa fungsi khusus, a.l. fungsi trigonometri, baik persamaan maupun sifat-sifatnya

Operasi Aljabar pada Fungsi

Seperti pada bilangan, kita dapat melakukan **penjumlahan**, **pengurangan**, **perkalian**, dan **pembagian** pada fungsi secara *titik demi titik*. Jika f terdefinisi pada D_f dan g terdefinisi pada D_g, maka

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f/g)(x) := f(x)/g(x), \quad x \in D_f \cap D_g,\ g(x) \neq 0.$$

Contoh

Diketahui $f(x) := x^2$, $x \in \mathbf{R}$, dan $g(x) := \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Maka

a. $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

b. $(f - g)(x) = x^2 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

c. $(fg)(x) = x^2\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

d. $(f/g)(x) = x^2/\sqrt{x} = x\sqrt{x}$, $x > 0$.

<u>Catatan</u>. Perhatikan bahwa daerah asal f/g tidak mencakup $x = 0$, sekalipun $x\sqrt{x}$ terdefinisi di $x=0$.

Pangkat dan Akar

Kita juga dapat melakukan operasi **pangkat** dan **akar** pada fungsi, selama memungkinkan.

Untuk n = 1, 2, 3, ...,

$$(f^n)(x) := [f(x)]^n, \ x \in D_f.$$

$$(f^{-n})(x) := 1/[f^n(x)], \ x \in D_f, f(x) \neq 0.$$

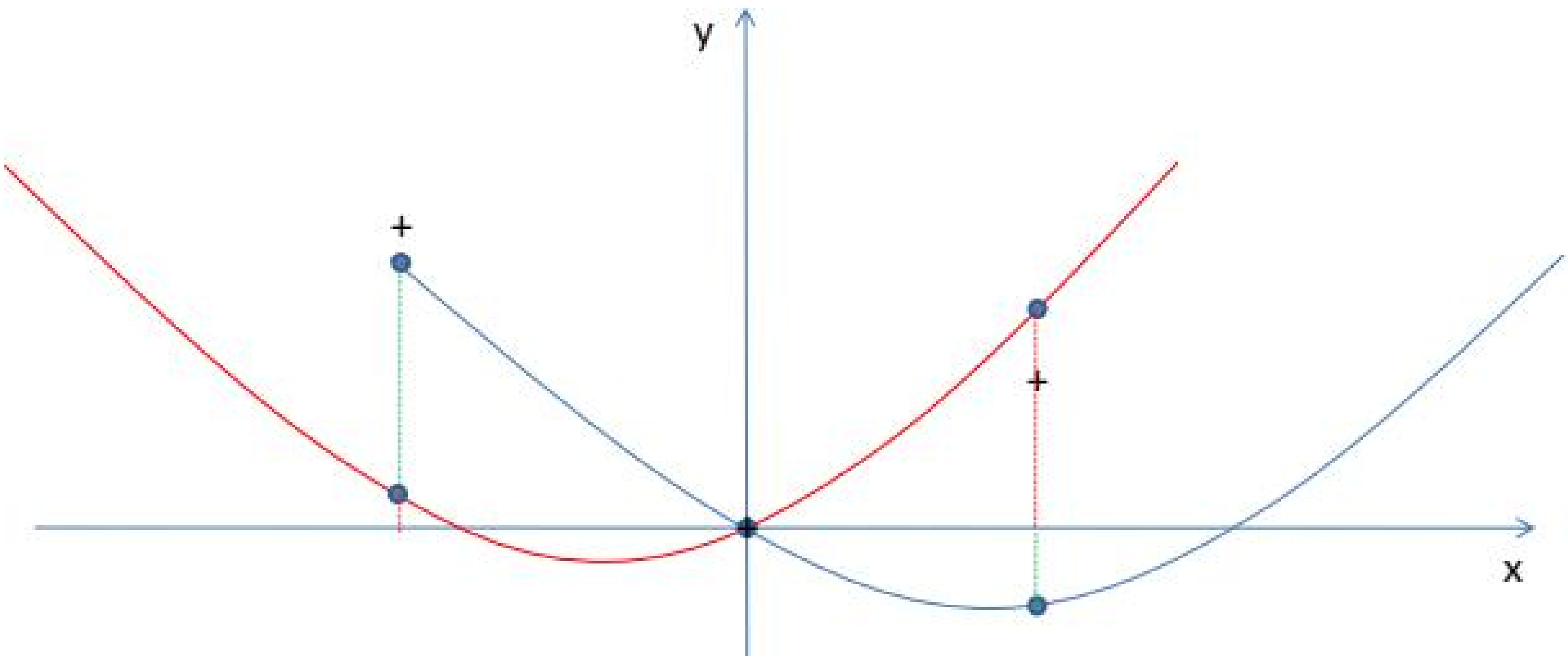
$$(f^{1/n})(x) := [f(x)]^{1/n}, \ x \in D_f, f(x) \geq 0 \text{ utk n genap}.$$

<u>Catatan 1</u>. $f^{-1}(x) = 1/f(x)$, namun lambang f^{-1} kelak akan dipakai untuk keperluan lain. Karena itu, untuk f pangkat -1 kita akan menuliskannya sbg $1/f$ saja.

<u>Catatan 2</u>. $f^{1/2}(x) = \sqrt{f(x)}$ terdefinisi jika $f(x) \geq 0$.

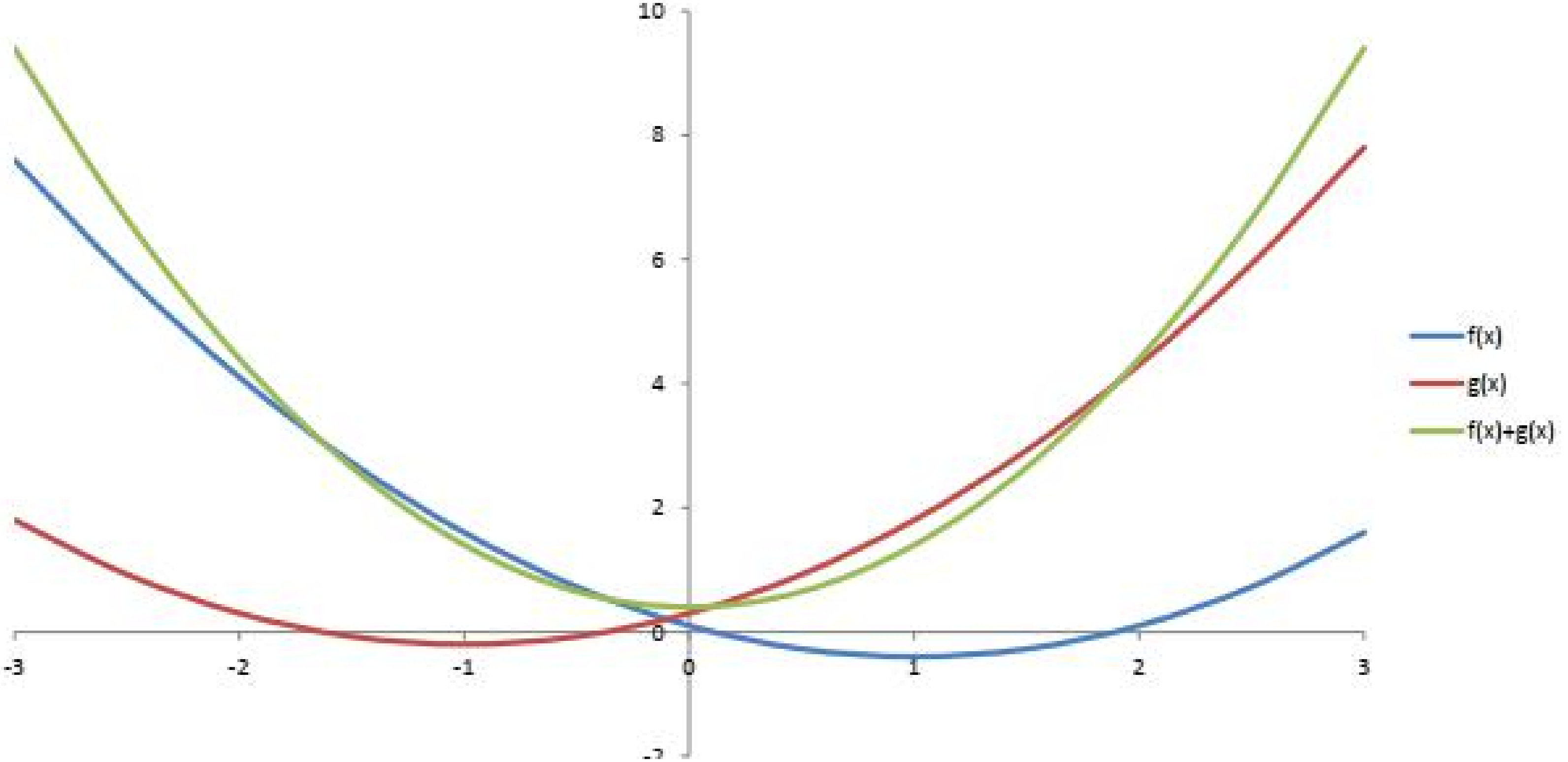
Menggambar Grafik Fungsi f + g

Diketahui grafik fungsi f dan g, bagaimana kita dapat memperoleh grafik f + g? [titik demi titik]



Menggambar Grafik Fungsi f + g

Diketahui grafik fungsi f dan g, bagaimana kita dapat memperoleh grafik f + g? [titik demi titik]



Fungsi Komposisi

Bila x dipetakan ke $y = f(x)$ oleh f, dan kemudian y dipetakan ke $z = g(y)$ oleh g, maka kita peroleh $z = g(f(x))$. Dalam hal ini:

$$x \rightarrow y = f(x) \rightarrow z = g(f(x)).$$

Komposisi f dan g, yang dilambangkan dengan $g \circ f$, merupakan fungsi yang memetakan x ke $z = g(f(x))$, yakni

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Daerah Asal Fungsi Komposisi

Daerah asal $g \circ f$ adalah himpunan semua $x \in D_f$ sedemikian sehingga $f(x) \in D_g$, yakni

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}.$$

Contoh: Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2$. Maka

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Daerah asalnya adalah

$$D_{g \circ f} = \{ x \in [0,\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbf{R} \} = [0,\infty).$$

Perhatikan bahwa sekalipun $g \circ f$ memetakan x ke x, daerah asalnya hanya $[0,\infty)$.

Catatan

Komposisi dua fungsi **tidak** bersifat komutatif.

Untuk f dan g pada contoh sebelumnya, kita mempunyai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{(x^2)} = |x|.$$

Daerah asalnya adalah

$$D_{f \circ g} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^2 \in [0,\infty) \} = \mathbf{R}.$$

Jadi, tampak bahwa $f \circ g \neq g \circ f$.

Latihan

1. Diketahui $f(x) := x^2 + 3$ dan $g(x) := 1/x$. Tentukan $f + g$, $f - g$, fg, f/g, f^2, dan $\sqrt{g}$ beserta daerah asalnya.
2. Diketahui $f(x) := \sqrt{x}$ dan $g(x) := 1/x$. Tentukan $g \circ f$ dan $f \circ g$, beserta daerah asalnya.

Fungsi Polinom

Fungi Konstan: $f(x) = k$ (konstanta).

Fungsi Identitas $f(x) = x$.

Fungsi Linear: $f(x) = mx + n$.

Fungsi Kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Keempat fungsi di atas termasuk keluarga besar

Fungsi Polinom: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ konstanta, dan $a_n \neq 0$.

Di sini, $n \in \mathbf{N}$ merupakan **derajat** polinom tersebut.

Catatan: Daerah asal fungsi polinom adalah **R**.

Fungsi Rasional & Fungsi Aljabar

Fungsi f yang merupakan *hasil bagi* dua fungsi polinom, yakni

$f(x) = p(x)/q(x)$, dengan p dan q polinom,

disebut **fungsi rasional**. Sebagai contoh,

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

merupakan fungsi rasional.

Fungsi seperti $g(x) = \sqrt{x}$ dan $h(x) = x^{1/3} + x - 10$ merupakan **fungsi aljabar**.

Catatan

Fungsi Nilai Mutlak $f(x) = |x|$ termasuk fungsi aljabar, mengingat $|x| = \sqrt{x^2}$. Dalam hal ini, jika $y = |x|$, maka y memenuhi persamaan $y^2 = x^2$ $(y \geq 0)$.

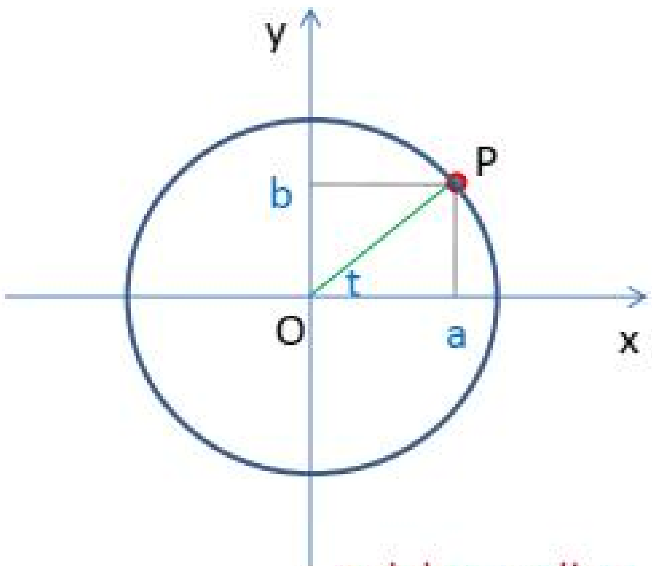
Secara umum, $y = f(x)$ merupakan fungsi aljabar jika y memenuhi suatu **persamaan aljabar** seperti $y^2 = x^2$ atau $y^3 = 3x^2 + 5x$ dan sejenisnya.

Sebagai contoh, $y = x^{1/3} + 10$ adalah fungsi aljabar; ia memenuhi persamaan $(y - 10)^3 = x$.

Fungsi Trigonometri

Tidak semua fungsi merupakan fungsi aljabar.

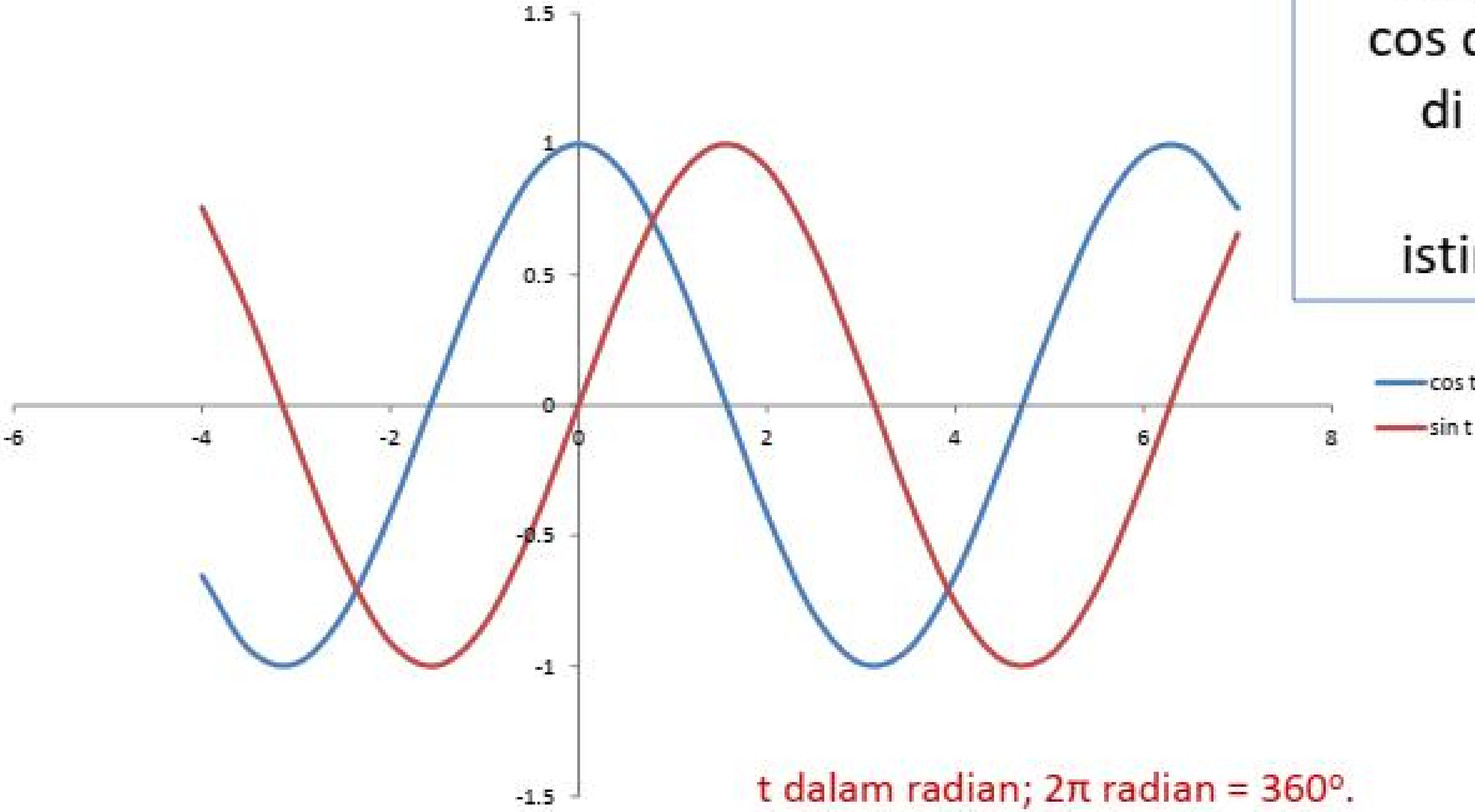
Salah satu kelompok fungsi yang tidak termasuk fungsi aljabar adalah **fungsi trigonometri**.



t dalam radian

Bayangkan titik P berputar pada lingkaran berjari-jari 1 yg berpusat di O(0,0), lalu catat absis (a) dan ordinat (b) sbg fungsi dari sudut (t) antara OP dan sumbu-x positif.

Grafik Fungsi Cosinus dan Sinus



Ingat nilai cos dan sin di sudut-sudut istimewa.

t dalam radian; 2π radian = 360°.

Fungsi Tan, Cot, Sec, dan Csc

Dari cos t dan sin t, kita definisikan

tan t = sin t/cos t

cot t = cos t/sin t

sec t = 1/cos t

csc t = 1/sin t

Beberapa Sifat Fungsi Trigonometri

$\cos(-x) = \cos x$ [yakni, $y = \cos x$ **fungsi genap**]

$\sin(-x) = -\sin x$ [yakni, $y = \sin x$ **fungsi ganjil**]

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$

... dan masih banyak kesamaan trigonometri lainnya!

Latihan

1. Tentukan daerah asal fungsi rasional berikut:
   a. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.
   b. $g(x) = \frac{1}{x^2+x}$.
2. Sketsalah grafik fungsi berikut:
   a. y = sin 2t, t ϵ [-2π,2π].
   b. y = 1 – cos t, t ϵ [0,2π].
   c. y = 2 tan t, t ϵ [-2π,2π].

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.1 Pengantar Limit

Memahami konsep limit dan menentukan nilai limit *secara intuitif*.

1.2 Limit Fungsi

Memahami definisi formal limit dan membuktikan limit fungsi sederhana dengan menggunakan definisi.

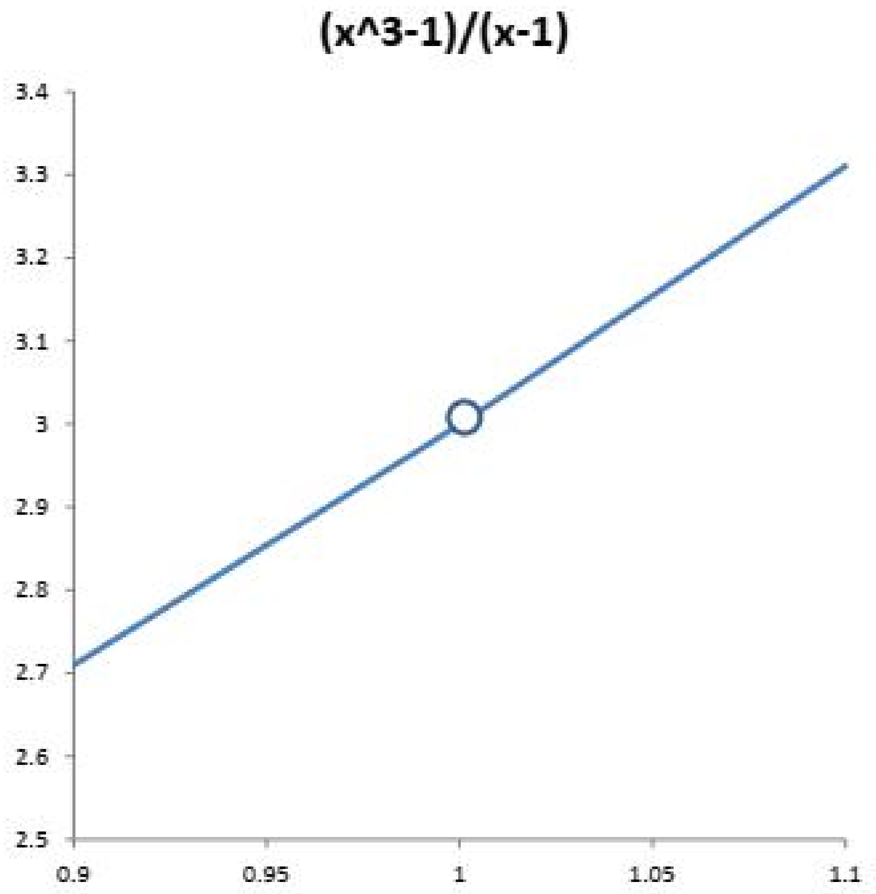
Pengantar Limit

Fungsi $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ terdefinisi untuk setiap $x \in$ **R** kecuali untuk $x = 1$. Bila kita harus menggambar grafiknya, apa yang terjadi *di sekitar* $x = 1$?

Kita melihat dari tabel di samping bahwa nilai f(x) *mendekati* 3. Bagaimana kita meyakinkan hal ini?

x	f(x)
1,1	3,31
1,01	3,0301
1,001	3,003001
"1"	?
0,999	2,997001
0,99	2,9701
0,9	2,71

Pengantar Limit



x	f(x)
1,1	3,31
1,01	3,0301
1,001	3,003001
"1"	?
0,999	2,997001
0,99	2,9701
0,9	2,71

Makna Limit secara Intuitif

<u>Catatan</u>. Nilai x di dekat c tidak mencakup x = c. Fungsi f tdk harus terdefinisi di x = c.

Kita tuliskan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ apabila

jika x dekat ke c, maka nilai f(x) dekat ke L.

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ disebut "**limit** f **di** c".

Bilangan L merupakan nilai **limit** tersebut.

Untuk contoh sebelumnya, kita mempunyai

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Limit Kanan dan Limit Kiri

Limit kanan: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti

jika $x > c$ dan dekat ke c, maka $f(x)$ dekat ke L.

Limit kiri: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ berarti

jika $x < c$ dan dekat ke c, maka $f(x)$ dekat ke L.

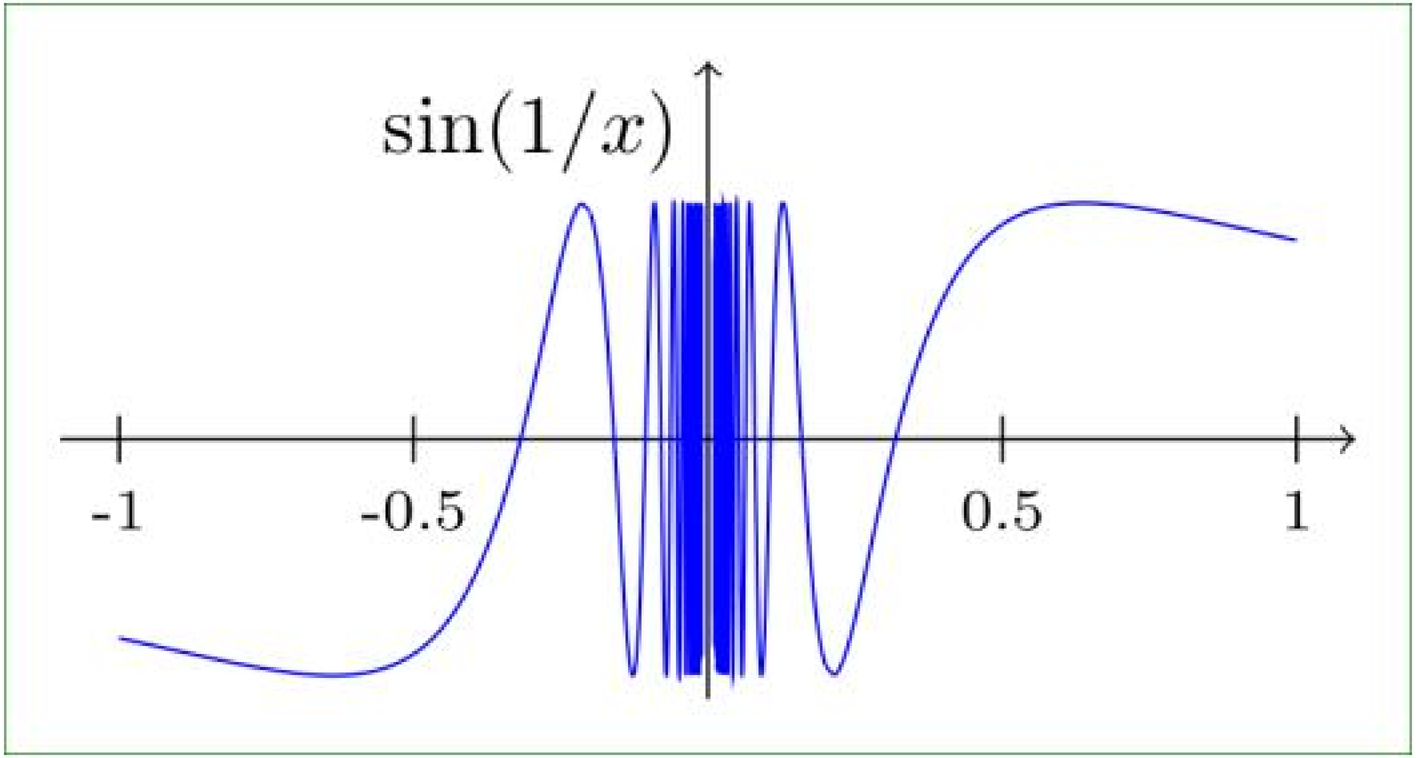
Bilakah Limit Ada/Tidak Ada?

Limit fungsi f di c ada jika dan hanya jika limit kanan dan limit kiri f di c ada dan nilainya sama.

Limit f di c tidak ada bila salah satu di antara beberapa kemungkinan berikut terjadi:

1. Limit kanan dan limit kiri f di c ada, tetapi nilainya tidak sama.
2. Limit kanan atau limit kiri f di c tidak ada, karena
   a. Nilai f di dekat c *menuju tak terhingga*.
   b. Nilai f di dekat c *berosilasi*.

Ilustrasi Limit Tidak Ada karena Fungsinya Berosilasi



Latihan

1. Sketsalah grafik fungsi f yang didefinisikan sbb:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jika } x < 0 \\ x, & \text{jika } 0 \le x < 1 \\ 1+x, & \text{jika } x \ge 1. \end{cases}$$

   Tentukan nilai f(1) dan nilai limit f di 1 (bila ada).

2. Sketsalah grafik suatu fungsi f yang memenuhi ***semua*** persyaratan berikut:
   a. Daerah asalnya adalah [0,4].
   b. $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$.
   c. Limit f di 1 = 2.
   d. Limit f di 2 = 1.
   e. Limit kanan f di 3 = 1
   f. Limit kiri f di 3 = 2.

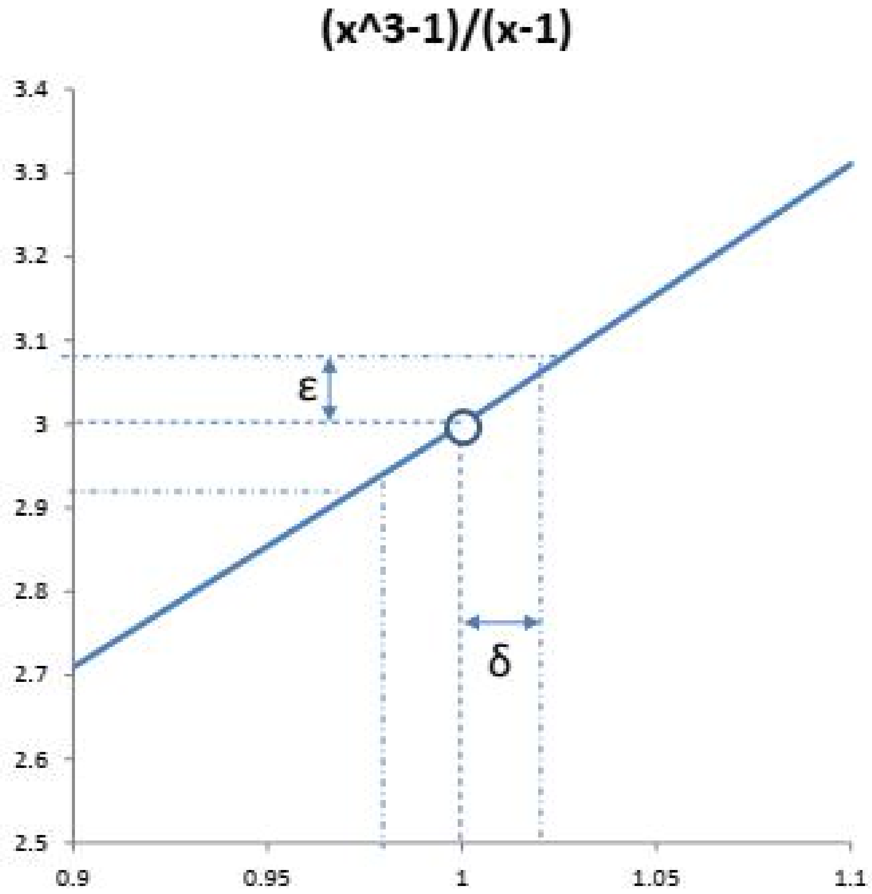
Definisi Persis Limit Fungsi

Bila sebelumnya kita telah mencoba memaknai limit fungsi di suatu titik secara intuitif, maka skrg kita akan mendefinisikannya *secara persis*.

Definisi: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika
"untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga:
jika 0 < | x – c | < δ, maka | f(x) – L | < ε."

OMG, ini bukan suatu kalimat yang mudah! Tapi…

Ilustrasi



Benar/Salah Kalimat Berikut?

1. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}1$, maka $|5x - 5| < 0{,}5$. B
2. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}01$, maka $|5x - 5| < 0{,}05$. B
3. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}005$, maka $|5x - 5| < 0{,}05$. B
4. Jika $0 < |x - 1| < 0{,}005$, maka $|5x - 5| < 0{,}01$. S
5. Terdapat $\delta = 0{,}002$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < 0{,}01$. B
6. Terdapat $\delta > 0$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < 0{,}001$. B
7. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \varepsilon/5$ sehingga:
   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|5x - 5| < \varepsilon$. B

Benar/Salah Kalimat Berikut?

1. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   Jika $0 < x < \delta$, maka $|\sqrt{x}| < \varepsilon$.

   Benar; pilih $\delta = \varepsilon^2$.

2. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

   Jika $0 < |x - 1| < \delta$, maka $|\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$.

   Benar; pilih δ = ??

Benar/Salah Kalimat Berikut?

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Benar; bilangan $\delta > 0$ yang memenuhi pernyataan di atas adalah $\delta =$ .... ??

Ini membuktikan bahwa: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

Latihan

Buktikan bahwa

1. $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1.$
2. $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2.$
3. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan