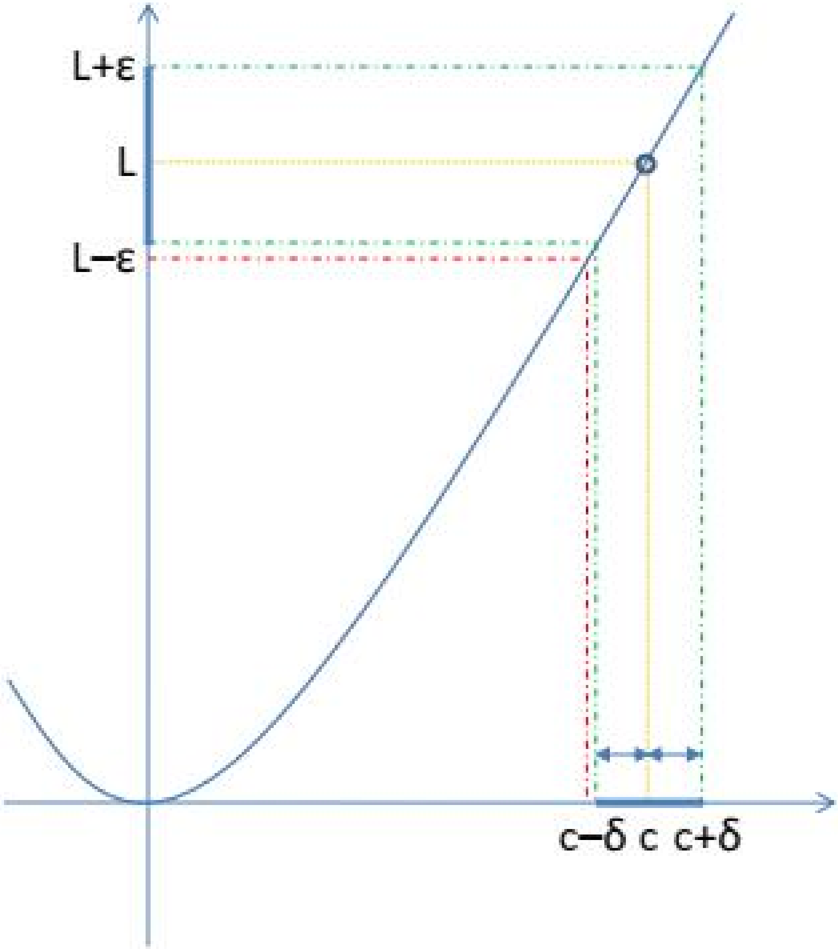
FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-3

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Kuliah yang Lalu: Limit Fungsi



Benar/Salah Kalimat Berikut?

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Benar; bilangan $\delta > 0$ yang memenuhi pernyataan di atas adalah $\delta =$ .... ??

Ini membuktikan bahwa: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

Latihan

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3}(2x - 7) = -1.$ [Mudah; δ = ε/2]
2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4}\sqrt{x} = 2.$ [δ = 2ε]
3. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$ [δ = ??]

Analisis Pendahuluan $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus mencari $\delta > 0$ sehingga:
jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$ ... (*)

Untuk itu, kita bekerja **mundur** dari bentuk $|x^2 - 4|$.

Perhatikan bahwa

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2| \quad \ldots \quad (\#)$$

Jika kita bisa menaksir $|x + 2|$, maka tugas kita akan mudah.

Karena kita sedang berbicara tentang x di sekitar 2, mari kita asumsikan bahwa $|x - 2| < 1$.

Dalam hal ini, $1 < x < 3$, sehingga $3 < x+2 < 5$. Jadi $|x + 2| < 5$.

Kembali ke (#), kita dapatkan: $|x^2 - 4| < 5|x - 2|$.

Jadi, jika $|x - 2| < \varepsilon/5$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Dengan demikian ada dua hal yang menjamin $|x^2 - 4| < \varepsilon$, yaitu: $|x - 2| < 1$ dan $|x - 2| < \varepsilon/5$.

Dalam hal ini kita dapat memilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$, sehingga jika $|x - 2| < \delta$, maka $|x - 2| < 1$ dan $|x - 2| < \varepsilon/5$.

Bukti bahwa $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$.

Selanjutnya kita periksa jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka

$$
\begin{aligned}
|x^2 - 4| &= |x + 2|\,|x - 2| \\
&< 5|x - 2| \quad \text{(karena } |x + 2| < 5\text{)} \\
&< \varepsilon \quad \text{(karena } |x - 2| < \varepsilon/5\text{)}.
\end{aligned}
$$

Ini membuktikan bahwa $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Soal PR

Buktikan bahwa $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 2.$

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.3 Teorema-Teorema Limit

Menggunakan teorema-teorema limit dalam penghitungan berbagai limit fungsi aljabar.

1.4 Limit Fungsi Trigonometri

Menghitung berbagai limit fungsi trigonometri.

Teorema Utama Limit

Misalkan k konstanta, n ϵ ***N****, f dan g fungsi yang mempunyai limit di c.*

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k.$

2. $\lim\limits_{x\to c} x = c.$

3. $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x).$

4. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x).$

Catatan. Teorema merupakan suatu pernyataan yang dapat **dibuktikan** kebenarannya, dan kemudian dapat digunakan sebagai "senjata" kita dlm pemecahan masalah terkait.

Teorema Utama Limit

5. $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$

6. $\lim_{x\to c} f(x)/\,g(x) = \lim_{x\to c} f(x)/\lim_{x\to c} g(x),\ \lim_{x\to c} g(x) \neq 0.$

7. $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n.$

8. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)},$ *asalkan* $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ *untuk n genap*.

<u>Catatan</u>. Teorema berlaku juga untuk limit sepihak (limit kanan dan limit kiri).

Contoh Penggunaan Teorema Limit

1. $$\lim_{x\to 1}(2x^3+5x-7) = 2\left(\lim_{x\to 1} x\right)^3 + 5\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 7$$
$$= 2.1^3 + 5.1 - 7 = 0.$$

2. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}}{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)} = \frac{\sqrt{\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 + \lim\limits_{x\to 2} 5}}{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1}$$
$$= \frac{\sqrt{2^2+5}}{2+1} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Contoh Penggunaan Teorema Limit

3. Diketahui $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 8.$

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)}.$

<u>Jawab</u>: Menggunakan Teorema 5, 7 dan 8,

$$\lim_{x \to 1} f^2(x) \cdot \sqrt[3]{g(x)} = (\lim_{x \to 1} f(x))^2 \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} g(x)}$$

$$= 3^2 \cdot \sqrt[3]{8} = 18.$$

Teorema Substitusi

Jika f adalah fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

asalkan f(c) terdefinisi.

Contoh 1. $\lim_{x \to 1}(2x^3 + 5x - 7) = 2.1^3 + 5.1 - 7 = 0.$

Contoh 2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x + 1} = \frac{2^2 + 2}{2 + 1} = \frac{6}{3} = 2.$

Teorema Apit

Misalkan f, g, dan h fungsi yang memenuhi

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

untuk x di sekitar c. Jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

Maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Catatan. Teorema Apit berlaku pula untuk limit sepihak.

Contoh Penggunaan Teorema Apit

Untuk x > 0 di dekat 0, berlaku

$$-1 \le \sin(1/x) \le 1.$$

Bila kita kalikan ketiga ruas dengan x, maka

$$-x \le x.\sin(1/x) \le x.$$

Karena $\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, maka menurut Teorema Apit

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin\tfrac{1}{x} = 0.$$

Dengan cara serupa, $\lim_{x\to 0^-} x \sin\tfrac{1}{x} = 0.$

Latihan

1. Menggunakan teorema limit, hitunglah:
   a. $\lim_{x \to -1} (x^3 - 4x + \tfrac{1}{x})$
   b. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 1}$

   Catatan. Sebutkan teorema yang anda pakai.

2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \tfrac{1}{x} = 0$.

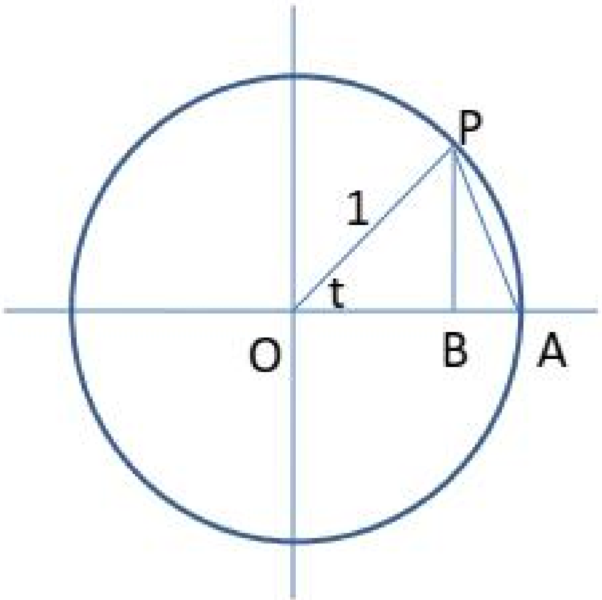
Limit Fungsi Trigonometri

$$1. \lim_{x \to c} \sin x = \sin c \qquad 2. \lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$

$$3. \lim_{x \to c} \tan x = \tan c \qquad 4. \lim_{x \to c} \cot x = \cot c$$

$$5. \lim_{x \to c} \sec x = \sec c \qquad 6. \lim_{x \to c} \csc x = \csc c$$

Bukti bahwa $\lim\limits_{x \to c} \sin x = \sin c$



Untuk t > 0, berlaku 0<|BP|<|AP|.

Karena |BP| = sin t dan |AP| < t,

maka $0 < \sin t < t$.

Dengan Teorema Apit,

$$\lim_{t \to 0^+} \sin t = 0.$$

Serupa dengan itu, $\lim\limits_{t \to 0^-} \sin t = 0.$

Jadi $\lim\limits_{t \to 0} \sin t = 0.$

Dengan cara serupa, dapat dibuktikan $\lim\limits_{t \to 0} \cos t = 1.$

Bukti bahwa $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$

Untuk menunjukkan bahwa $\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$,
misalkan k = t – c sehingga k → 0 ketika t → c.
Jadi

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to c} \sin t &= \lim_{k \to 0} \sin(c+k) \\
&= \lim_{k \to 0} (\sin c.\cos k + \cos c.\sin k) \\
&= (\sin c).1 + (\cos c).0 \\
&= \sin c.
\end{aligned}$$

Limit Trigonometri Khusus

$$1.\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1. \qquad\qquad 2.\ \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0.$$

Bukti (1) diperoleh dengan menunjukkan bahwa untuk t ≠ 0, berlaku

$$\cos t \le \frac{\sin t}{t} \le 1.$$

Karena $\lim_{t\to 0}\cos t = 1$, maka dengan Teorema Apit kita simpulkan bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$

Latihan

1. Menggunakan fakta bahwa $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, hitunglah:

   a. $\lim\limits_{t\to 0}\sin t.\cot 2t$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+2x)}{2x^2+x}$

2. Buktikan bahwa $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{t}=0.$

KULIAH SEBELUMNYA:

Limit Trigonometri Khusus

$$1.\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1. \qquad 2.\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0.$$

Bukti (1) diperoleh dengan menunjukkan bahwa untuk t ≠ 0, berlaku

$$\cos t \le \frac{\sin t}{t} \le 1.$$

GAMBAR LINGKARAN UNTUK MEMBUKTIKAN KETAKSAMAAN INI.

Karena $\lim_{t\to 0}\cos t = 1$, maka dengan Teorema Apit kita simpulkan bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$

Latihan

1. Menggunakan fakta bahwa $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, hitunglah:

   a. $\lim_{t \to 0} \sin t . \cot 2t$

   b. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{2x^2 + x}$

2. Buktikan bahwa $\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

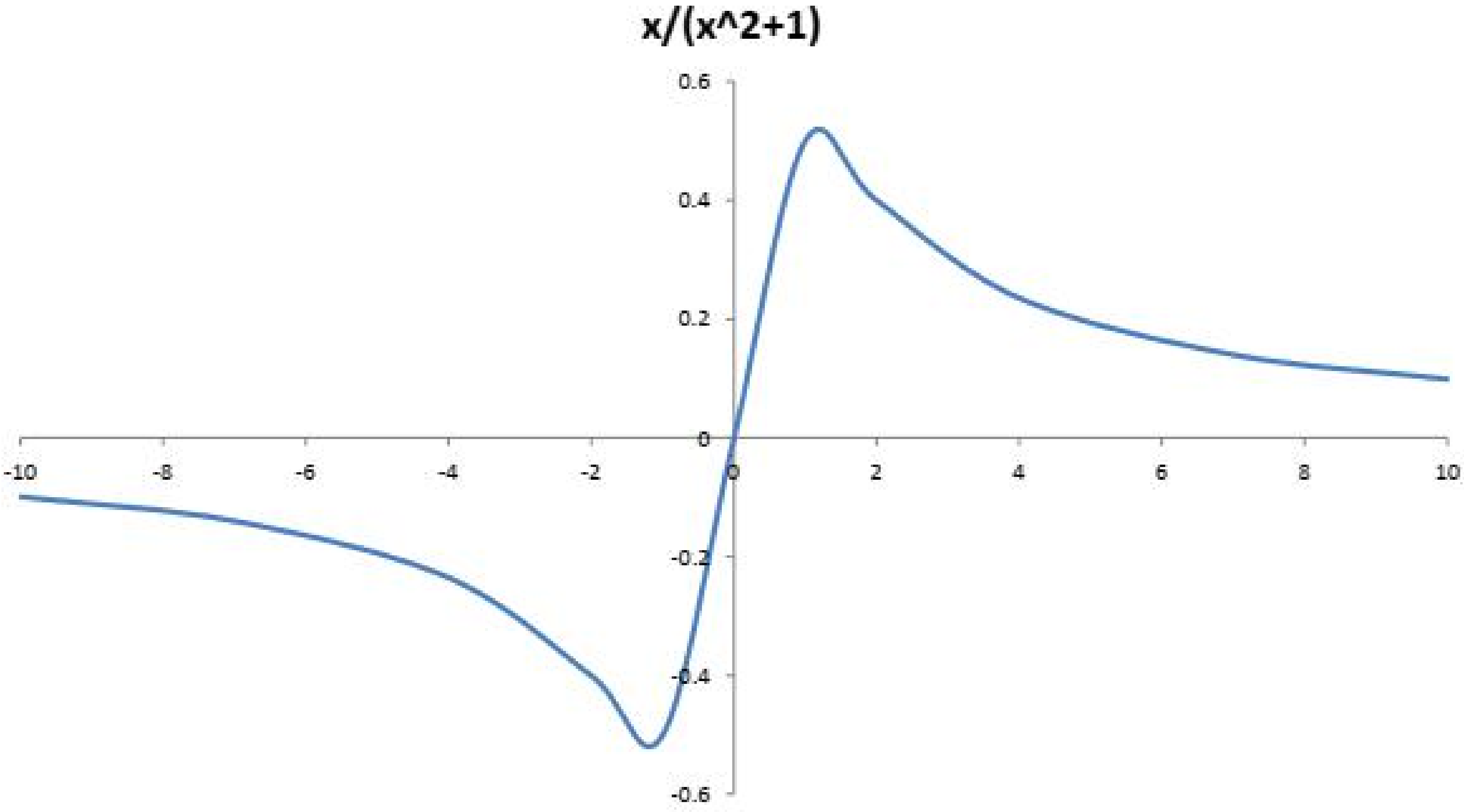
1.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

Menghitung limit di tak hingga dan limit tak hingga.

1.6 Kekontinuan

Memeriksa kekontinuan fungsi dan menggunakan Teorema Nilai Antara untuk memecahkan masalah yang relevan.

Apa yang Terjadi Bila x → ∞ atau –∞?



Limit di Tak Hingga

Misalkan *f* terdefinisi pada [c,∞). Kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

apabila: untuk setiap ε > 0 terdapat M > c sehingga: jika x > M, maka |*f*(x) – L| < ε.

[Secara intuitif, "limit *f* di tak hingga" sama dgn L jika untuk x cukup besar, nilai *f*(x) dekat ke L.]

Contoh 1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$ [jika x > ??, maka |1/x|<ε.]

Contoh 2

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

Bukti. Diberikan ε > 0 sembarang, pilih M ≥ 1/ε.
Kita periksa: jika x > M, maka

$$\left| \frac{x}{x^2+1} \right| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

Limit di Minus Tak Hingga

Misalkan *f* terdefinisi pada (-∞,d]. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

apabila: untuk setiap ε > 0 terdapat N < d sehingga: jika x < N, maka |*f*(x) – L| < ε.

[Secara intuitif, "limit *f* di minus tak hingga" sama dgn L jika utk x minus besar, nilai *f*(x) dekat ke L.]

Contoh 3. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$ [jika x < ??, maka |1/x|<ε.]

Contoh 4

Buktikan bahwa $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$

Bukti. Coba sendiri.

Catatan

Selain Teorema Substitusi, teorema-teorema limit dan Teorema Apit berlaku pula untuk limit di tak hingga.

Sebagai contoh,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

Limit Tak Hingga

Tinjau fungsi $f(x) = 1/x$, dengan $x \neq 0$.

Apa yang terjadi di dekat $x = 0$?

Berapakah nilai limit f di 0, bila ada?

Misalkan f terdefinisi di sekitar $x = c$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$$

apabila: untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$
sehingga: jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Limit Tak Hingga

Misalkan *f* terdefinisi di sekitar x = c. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$$

apabila: untuk setiap M > 0 terdapat δ > 0 sehingga: jika 0 < c – x < δ, maka *f*(x) > M.

<u>Catatan</u>: $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$ didefinisikan secara analog. [Rumuskan sendiri definisinya, atau lihat buku.]

Contoh

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ [jika 0 < x < ??, maka 1/x > M.]

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ [jika 0 < -x < ??, maka 1/x < N.]

Latihan

1. Hitunglah:

   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}$

   b. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2+1}$

   c. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

   d. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2. Hitunglah $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{4-x^2}$ dan $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2}$.

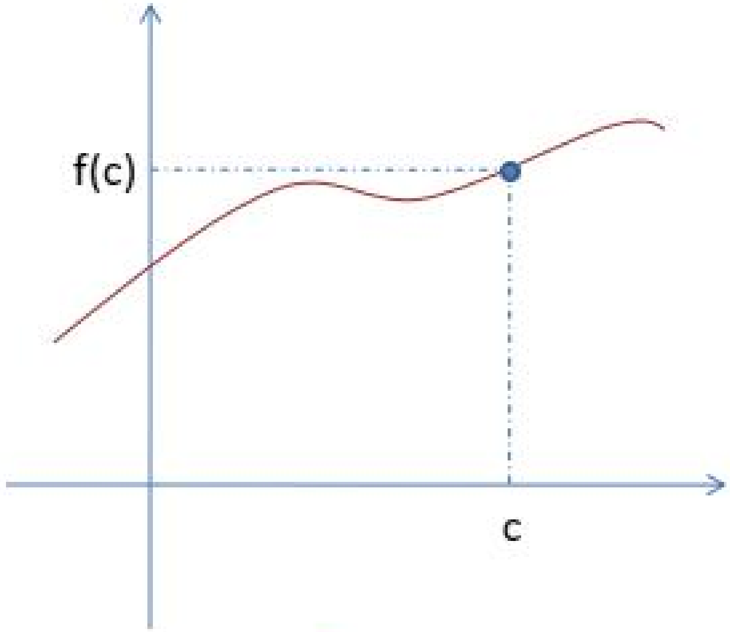
Fungsi Kontinu di Suatu Titik

Misalkan *f* terdefinisi di sekitar c, termasuk di c.

Fungsi *f* dikatakan **kontinu di** c apabila

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

yakni: untuk setiap ε > 0 terdapat δ > 0 sehingga: jika |x – c|< δ, maka |*f*(x) – *f*(c)|< ε.



Fungsi *f* dikatakan **kontinu pada** (a,b) apabila *f* kontinu di *setiap* titik c ϵ (a,b).

Keluarga Fungsi Kontinu

1. Fungsi polinom kontinu di setiap titik pada **R**. Demikian pula fungsi rasional kontinu di setiap titik pada daerah asalnya. [Ingat Teorema Substitusi.]
2. Fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$ kontinu pada **R**.
3. Fungsi akar $f(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada $(0,\infty)$. Fungsi ini **kontinu kanan** di $c = 0$.
4. Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ kontinu pada **R**.

Teorema

Jika f dan g kontinu di c dan k konstanta, maka kf, $f + g$, $f - g$, fg, f/g, f^n, dan $\sqrt[n]{f}$ kontinu di c.

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ *dan f kontinu di L, maka* $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$.

Jika g kontinu di c dan f kontinu di g(c), maka $f \circ g$ kontinu di c.

Contoh

1. $f(x) = x \sin x$ kontinu di setiap titik karena merupakan hasilkali dua buah fungsi yang kontinu di setiap titik (pada **R**).
2. $F(x) = |x^2 - 1|$ kontinu di setiap titik (pada **R**) karena $h(x) = x^2 - 1$ kontinu di setiap titik, $g(x) = |x|$ juga kontinu di setiap titik, dan $F(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$.

Fungsi Kontinu pada Selang Tutup

Fungsi f dikatakan **kontinu pada [a,b]** apabila f kontinu pada (a,b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$.

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a,b]$ *tidak terputus* dari titik $(a,f(a))$ ke $(b,f(b))$.

Teorema **N**ilai **A**ntara

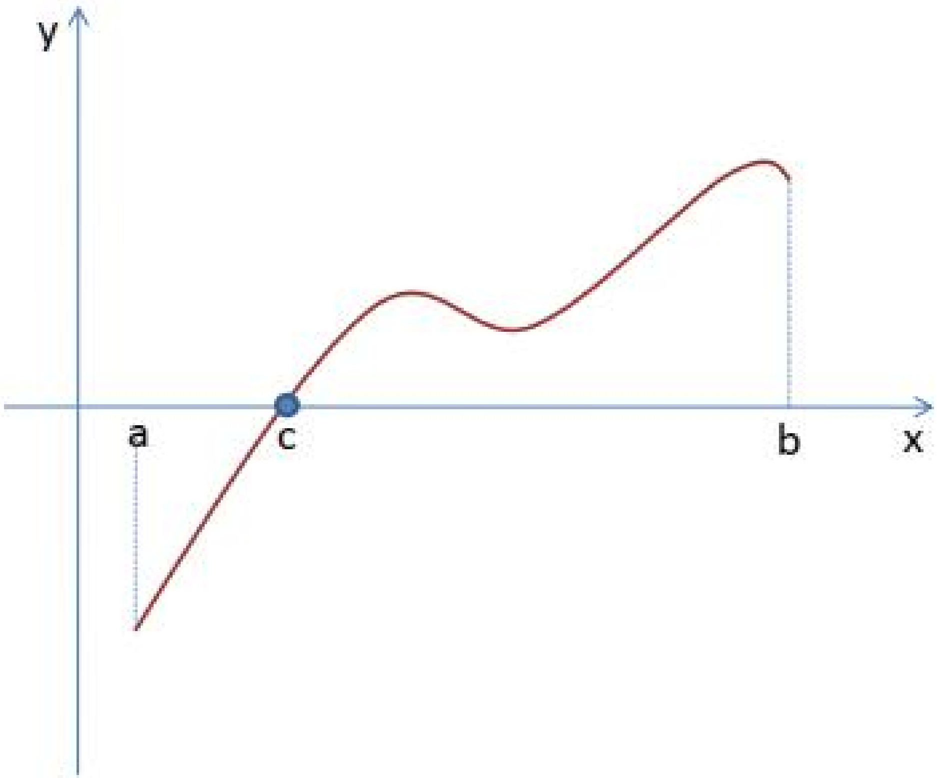
Jika f kontinu pada $[a,b]$, $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$ (atau sebaliknya, $f(a) > 0$ dan $f(b) < 0$), maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f(c) = 0$.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$, $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (-1,2)$ sehingga

$$f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$$

(yakni, f mempunyai **akar** pada $[-1,2]$).

Ilustrasi TNA



Latihan

1. Tentukan nilai *L* agar *f* kontinu di 1.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$

$$= L, \qquad x = 1.$$

2. Tentukan *a* dan *b* agar *f* kontinu di setiap titik.

$$f(x) = -1, \qquad x < -1$$

$$= ax^3 + b, -1 \leq x \leq 1$$

$$= 2, \qquad x > 1.$$

3. Buktikan bahwa $p(x) = x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan