FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-6

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Teorema: Uji Turunan Kedua

Misalkan $f'(c) = 0$ *dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat* c.

Jika $f''(c) < 0$, *maka* $f(c)$ *merupakan nilai maksimum lokal.*

Jika $f''(c) > 0$, *maka* $f(c)$ *merupakan nilai minimum lokal.*

Catatan: Dalam hal $f''(c) = 0$, tidak ada kesimpulan apa-apa tentang $f(c)$. Titik $(c, f(c))$ juga **belum tentu** merupakan titik belok.

Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

<u>Jawab</u>: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ di $x = -2$ dan di $x = 2$. Dengan Uji Turunan Kedua, kita hitung

$f''(x) = 6x < 0$ di $x = -2$; jadi $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Sementara itu, $f''(x) = 6x > 0$ di $x = 2$; jadi $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

<u>Catatan</u>: Hasil ini sesuai dengan hasil sebelumnya.

Latihan

Menggunakan Uji Turunan Pertama, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

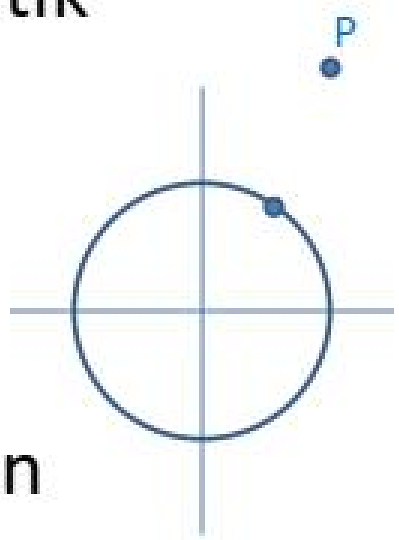
1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.
2. $h(x) = x/2 - \sin x,\ 0 < x < 2\pi$.

Menggunakan Uji Turunan Kedua, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

3. $g(x) = x + 1/x,\ x \neq 0$.
4. $F(x) = 64/(\sin x) + 27/(\cos x),\ 0 < x < \pi/2$.

Contoh 1. Tentukan titik pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang terdekat ke titik $P(1,2)$.

<u>Jawab</u>: Misalkan s menyatakan jarak titik (x,y) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ ke titik $P(1,2)$, yakni



$$s = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}.$$

Karena meminimumkan s sama dengan meminimumkan s^2, kita tinjau $D = s^2$,

$$\begin{aligned} D &= (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= 6 - 2x - 4\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Turunkan D terhadap x, kita peroleh

$$\frac{dD}{dx} = -2 + \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

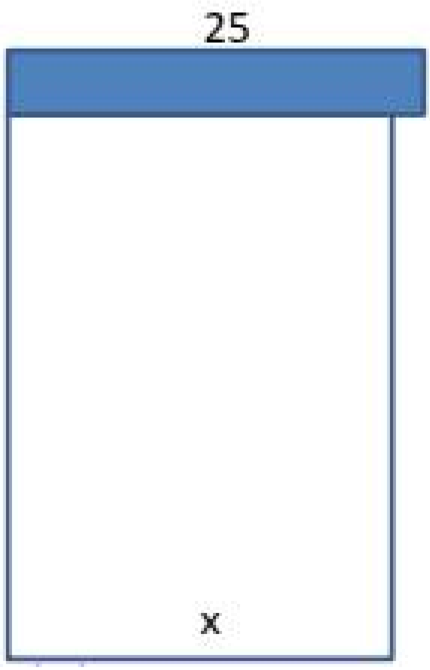
Perhatikan bahwa dD/dx = 0 bila $4x = 2\sqrt{1-x^2}$, yaitu apabila x = 1/√5. [Kita pilih x > 0.]

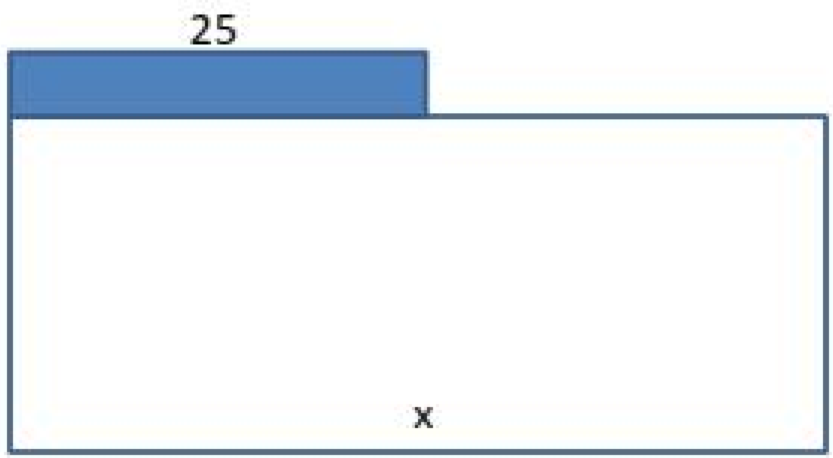
Kita periksa tanda dD/dx di sekitar 1/√5:

Berdasarkan Uji Turunan Pertama, kita simpulkan bahwa D mencapai minimum di x = 1/√5.

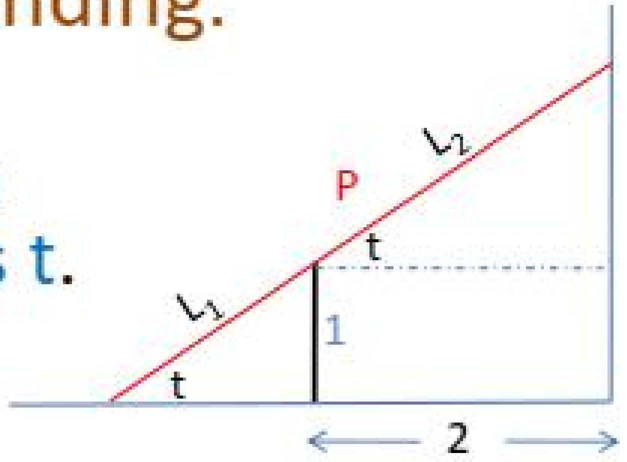
Jadi titik terdekat ke P(1,2) adalah (1/√5,2/√5).

Contoh 2. Pak Umar akan memagari kebunnya dengan menggunakan 120 m pagar dan ia ingin menjadikan sebagian atau seluruh sisi gudang yang panjangnya 25 m sebagai bagian dari salah satu sisi kebun (lihat gambar). Tentukan luas kebun maksimum yang dapat dipagari.





Contoh 3. Tentukan panjang tangga terpendek yg menghubungkan lantai ke dinding.



Jawab: Panjang tangga $P = L_1 + L_2$ dengan $L_1 = 1/\sin t$ dan $L_2 = 2/\cos t$.

Jadi, $P = 1/\sin t + 2/\cos t$.

Turunannya adalah

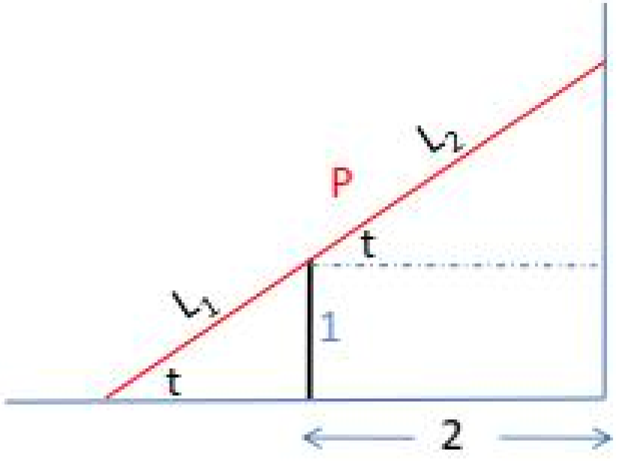
$dP/dt = -\cos t/\sin^2 t + 2\sin t/\cos^2 t$,

sehingga

$dP/dt = 0$ j.h.j. $\cos t/\sin^2 t = 2\sin t/\cos^2 t$

atau $\tan^3 t = ½$.

Jawab (lanjutan):



Jadi titik stasionernya adalah

$$t = \text{arc tan}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}67 \text{ rad.}$$

Turunan di sebelah kirinya negatif, dan di sebelah kanannya positif. Jadi, titik tersebut adalah titik minimum.

Dengan demikian panjang tangga terpendek adalah $P \approx 1/\sin(0{,}67) + 2/\cos(0{,}67) \approx 4{,}16$ meter.

Latihan

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.
2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai sebuah pulau besar. Jika seseorang di pulau tersebut dapat mendayung perahunya dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam, di mana ia harus berlabuh agar sampai di Q yang berjarak 5 km dari P dalam waktu yang paling singkat?

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.

Jawab: Misal d := jarak dari titik (x,y) pada hiperbola tsb ke titik Q(5,0); maka

$$d^2 = (x-5)^2 + y^2 = (x-5)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - 1, \quad x \geq 2.$$

Meminimumkan d sama saja dgn meminimumkan $s := d^2$. Cari titik stasionernya:

$$s'(x) = 2(x-5) + \tfrac{1}{2}\cdot x = 0 \leftrightarrow x = 4.$$

Selain itu ada titik ujung selang, yaitu $x = 2$. Tetapi $s'(x) < 0$ untuk $2 \leq x < 4$ dan $s'(x) > 0$ untuk $x > 4$.

Jadi menurut Uji Turunan Pertama, s mencapai minimum di $x = 4$. Cari ordinatnya: $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$. Jadi titik terdekat yg dicari adalah $(4,\sqrt{3})$ dan $(4,-\sqrt{3})$.

2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai. Seseorang akan mendayung perahu dari pulau tsb dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam, menuju Q yang berjarak 5 km dari P.

Jawab: Misal ia berlabuh di X (antara P dan Q). Maka total waktu yang dibutuhkan adalah

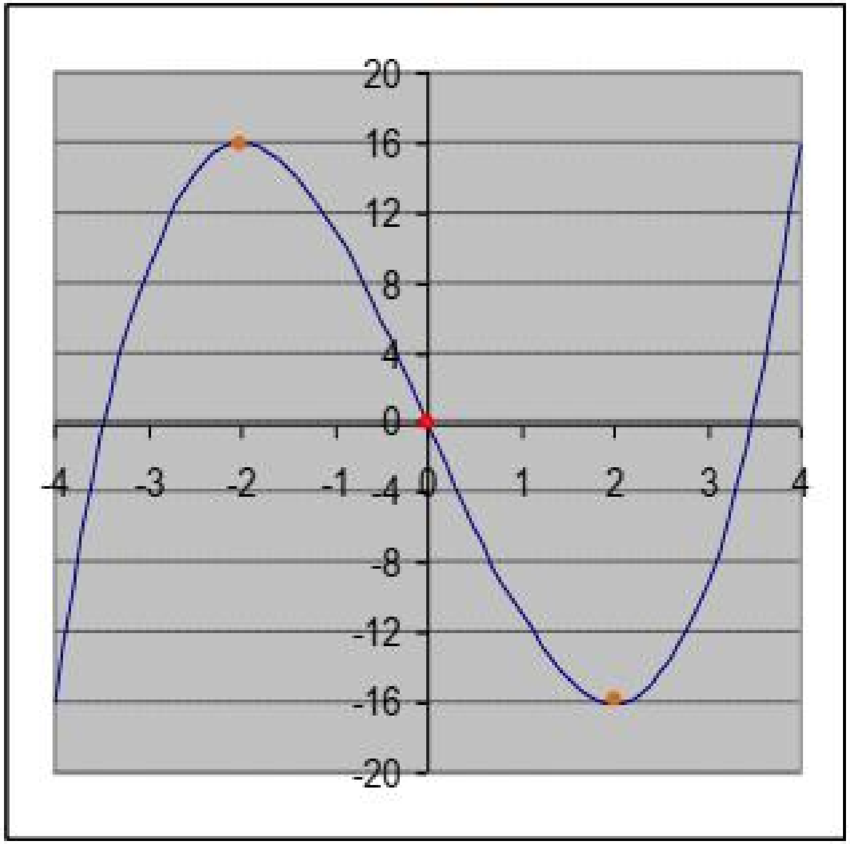
$T = T_{dayung} + T_{berjalan} = \ldots$

3.5 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Menggambar grafik fungsi secara cermat, dengan menggunakan kalkulus.

Menggambar Grafik Fungsi

Kita telah melihat bagaimana informasi tentang kemonotonan dan kecekungan dapat dipakai untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Berikut adalah beberapa contoh lainnya:

Contoh 1

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$, dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

Daerah asal f adalah $[0,\infty)$ dan daerah hasilnya juga $[0,\infty)$, sehingga grafiknya akan terletak di kuadran pertama. Titik potong dengan sumbu x adalah $x = 0$ dan $x = 5$, sedangkan titik potong dengan sumbu y adalah $y = 0$. Asimtot tidak ada. Untuk $x > 0$, turunan pertama f adalah

$$f'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{2\sqrt{x}}.$$

Jadi, titik-titik stasionernya adalah $x = 1$ dan $x = 5$, dan tanda $f'(x)$ adalah

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

Jadi f naik pada $[0,1)$, turun pada $[1,5]$, dan naik pada $(5,\infty)$. Menurut Uji Turunan Pertama, $f(1) = 16$ merupakan nilai maksimum lokal, sedangkan $f(0) = f(5) = 0$ merupakan nilai minimum lokal (sekaligus *global*).

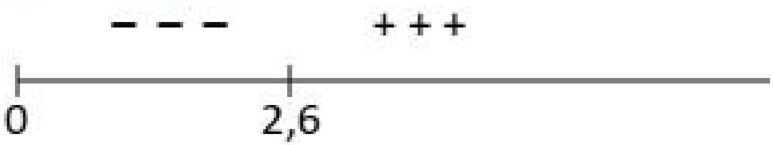
Selanjutnya kita hitung turunan keduanya:

$$f''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{4x^{3/2}}.$$

Menggunakan rumus **akar persamaan kuadrat**, kita dapatkan $f''(x) = 0$ ketika $x = 1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2{,}6$.

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

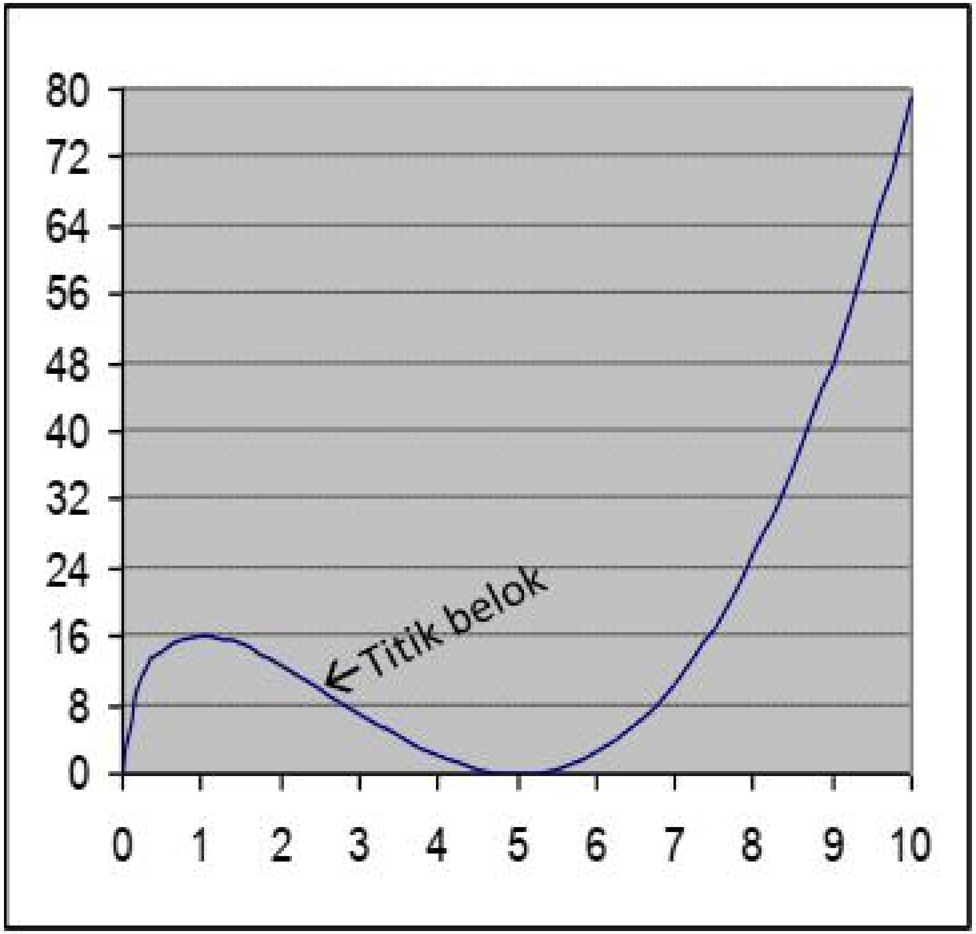
Periksa tanda $f''(x)$:



Jadi grafiknya cekung ke bawah di sebelah kiri 2,6; dan cekung ke atas di sebelah kanan 2,6. Jadi $(2{,}6\ ;\ f(2{,}6))$ merupakan titik belok.

Dengan semua informasi ini, kita dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$ sebagai berikut:

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$



Contoh 2

Gambarlah grafik fungsi

$$g(x) = \begin{cases} 50x - x^2/2, & \text{jika } 0 \le x \le 20, \\ 60x - x^2, & \text{jika } 20 < x \le 60, \end{cases}$$

dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Latihan

Dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada),

gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $f(x) = x + 1/x$.
2. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.
3. $h(x) = x - 2 \sin x$.

Catatan

Dalam menggambar grafik fungsi, informasi tentang apakah fungsi tersebut merupakan fungsi **genap** atau **ganjil** juga merupakan informasi penting yang membantu kita.

Sebagai contoh, fungsi pada soal latihan no. 1 merupakan fungsi ganjil; jadi grafiknya **simetris** terhadap **titik asal**.

3.6 Teorema Nilai Rata-Rata

Menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan; menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk memecahkan masalah yang relevan.

Jangan Berbohong. Nanti Ketahuan!

Pak Djono mengatakan bahwa dengan mobil baru yang dikendarainya ia telah menempuh 183 km dalam 3 jam tanpa pernah melampaui 60 km/jam.

Ah, ia telah *berbohong!*

Tetapi bagaimana kita dapat membuktikannya?

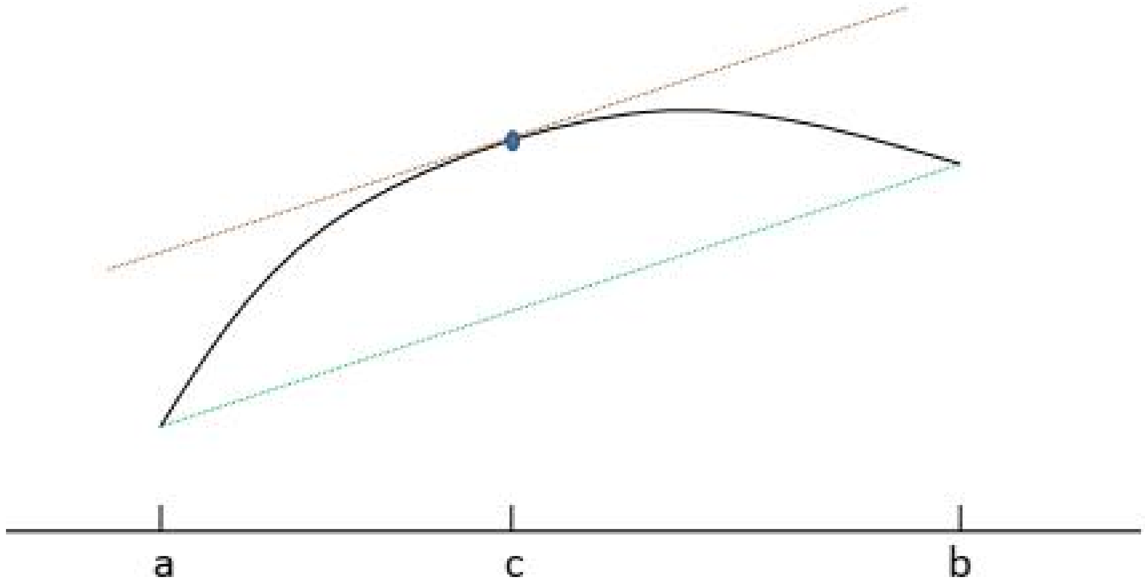
Teorema Nilai Rata-Rata

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan mempunyai turunan pada (a,b), maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Catatan. $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ disebut **nilai rata-rata** f pada $[a,b]$. Secara fisis, bayangkan **kecepatan rata-rata** pada suatu selang waktu!

Ilustrasi: Teorema Nilai Rata-Rata



$f'(c)$ = gradien garis singgung di c,

$[f(b) - f(a)]/(b - a)$ = gradien ruas garis yang menghubungkan $(a,f(a))$ dan $(b,f(b))$.

Penjelasan Teorema Nilai Rata-Rata

Asumsikan $f(a) = f(b)$. Teorema Nilai Rata-Rata menjamin adanya $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$. Dari mana kita mengetahuinya?

Asumsikan f tidak konstan. [Bila f konstan, $f'(c) = 0$ di setiap titik $c \in (a, b)$.] Menurut Teorema Eksistensi Nilai Ekstrim, f mestilah mencapai nilai ekstrim di suatu titik $c \in (a, b)$. Nah, titik c bukan titik ujung selang, bukan pula titik singular.

Menurut Teorema Titik Kritis, c mestilah merupakan titik stasioner, yakni $f'(c) = 0$.

Kebohongan Pak Djono

Untuk membuktikan bahwa Pak Djono bohong, misalkan $f(\mathrm{t})$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam t jam. Maka f kontinu dan turunannya, $f'(\mathrm{t})$, menyatakan kecepatan pada saat t.

Menurut Teorema Nilai Rata-rata, mestilah terdapat $\mathrm{t}_1 \in (0, 3)$ sedemikian sehingga

$$f'(\mathrm{t}_1) = [f(3) - f(0)]/(3 - 0) = 61.$$

Ini berarti bahwa Pak Djono pernah memacu mobilnya dengan kecepatan di atas 60 km/jam.

Contoh 1

Diketahui $f(x) := x^2$, $x \in [0,1]$. Hitung nilai rata-rata f pada $[0,1]$ dan tentukan $c \in (0,1)$ sedemikian sehingga $f'(c)$ sama dengan nilai rata-rata f pada $[0,1]$.

<u>Jawab</u>: Nilai rata-rata f pada $[0,1]$ adalah

$$[f(1) - f(0)]/(1 - 0) = 1.$$

Sementara itu $f'(x) = 2x = 1$ jika dan hanya jika $x = ½$.

Jadi, $c = ½$ adalah bilangan yang kita cari.

Contoh 2

Buktikan ketaksamaan

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

untuk setiap $x, y \in \mathbf{R}$.

Latihan

1. Diketahui $g(x) := x^3/3$, $x \in [-1,1]$. Hitung nilai rata-rata g pada $[-1,1]$ dan tentukan $c \in (-1,1)$ sedemikian sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g pada $[-1,1]$.
2. Buktikan jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f(x)$ bernilai konstan pada selang (a,b).

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan