FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-7

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.8 Anti-Turunan dan Integral Tak Tentu

Menentukan anti-turunan atau integral tak tentu dari suatu fungsi yang diberikan.

3.9 Pengantar Persamaan Diferensial

Menyelesaikan persamaan diferensial sederhana, dengan atau tanpa syarat tambahan.

Anti-Turunan

Fungsi F disebut **anti-turunan** f pada I apabila

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in I$.

Sebagai contoh, $F_1(x) = x^4 + 1$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**. Demikian juga $F_2(x) = x^4 + 5$ merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**.

Secara umum, *keluarga fungsi* $F(x) = x^4 + C$ (dengan C konstanta) merupakan anti-turunan $f(x) = 4x^3$ pada **R**, karena $F'(x) = 4x^3 = f(x)$ untuk setiap $x \in$ **R**.

Integral Tak Tentu

Keluarga fungsi anti-turunan dari $f(x)$ disebut **integral tak tentu** dari $f(x)$, dan dilambangkan dengan $\int f(x)\,dx$.

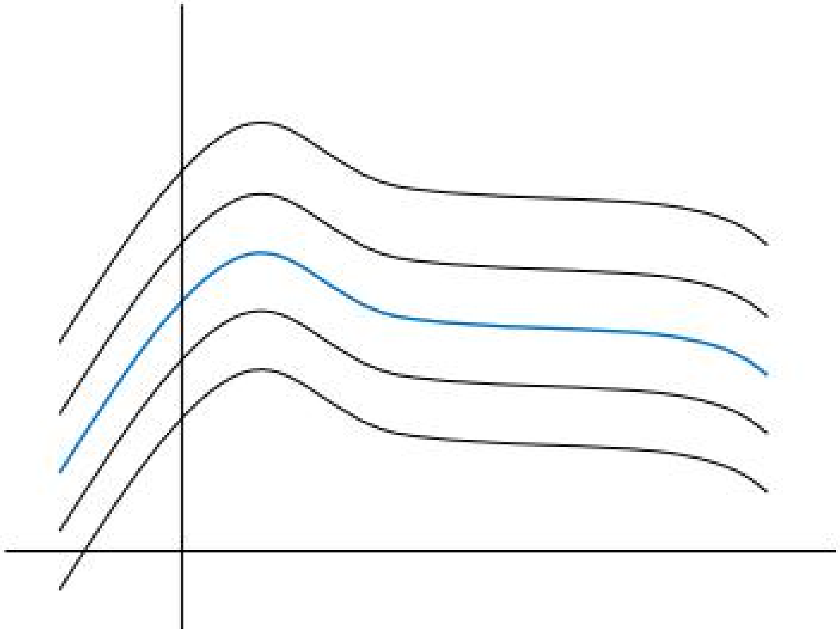
Jadi, sebagai contoh,

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C,$$

dengan C menyatakan konstanta sembarang.

Ilustrasi: Integral Tak Tentu

Secara grafik, bila kita mengetahui *sebuah* anti-turunan dari $f(x)$, maka integral tak tentu dari $f(x)$ adalah keluarga fungsi yang anggotanya merupakan *pergeseran ke atas* atau *ke bawah* dari anti-turunan tsb. Semua anggota keluarga fungsi tsb mempunyai turunan yang sama, yaitu $f(x)$.



Keluarga fungsi yang turunan-nya sama

Aturan Integral Tak Tentu (1)

Terkait dengan aturan turunan yang telah kita pelajari sebelumnya, kita mempunyai teorema-teorema berikut tentang integral tak tentu.

Teorema 1 (**Aturan Pangkat**). Jika $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq -1$, maka $\int x^r \, dx = x^{r+1}/(r+1) + C$.

Contoh 1

(a) $\int x^2 \, dx = x^3/3 + C$. (b) $\int x^{-2} \, dx = - x^{-1} + C$.

Aturan Integral Tak Tentu (2)

Teorema 2 (Integral Tak Tentu sin x dan cos x)

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Catatan. Jangan tertukar: turunan dari $\sin x$ adalah $\cos x$, sedangkan anti-turunan dari $\sin x$ adalah $-\cos x + C$.

Aturan Integral Tak Tentu (3)

Teorema 3 (**Kelinearan Integral Tak Tentu**)

Jika f dan g fungsi dan k adalah konstanta, maka

$$\int k.f(x)\,dx = k.\int f(x)\,dx$$

dan

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Contoh 3. $\int (6x^2 + \sin x)\,dx = 2\int 3x^2\,dx + \int \sin x\,dx$
$= 2x^3 - \cos x + C.$

Aturan Integral Tak Tentu (4)

Teorema 4 (Aturan Pangkat yang Diperumum)
Jika $r \in \mathbf{Q}$, $r \neq -1$ *dan g adalah fungsi yang mem-punyai turunan, maka*

$$\int [g(x)]^r . g'(x)\, dx = [g(x)]^{r+1}/(r+1) + C.$$

Bukti. Dengan Aturan Rantai, turunan fungsi di ruas kanan adalah $[g(x)]^r . g'(x)$. Terbukti.

Contoh 4. Tentukan $\int (x^2 + 1)^5 . 2x\, dx$.

Misal $u = g(x) = x^2 + 1$, $du = 2x\, dx$. Maka

$\int (x^2 + 1)^5 . 2x\, dx = \int u^5\, du = u^6/6 + C = (x^2 + 1)^6/6 + C.$

Contoh 5. Jika $g(x) = \sin x$, maka $g'(x) = \cos x$. Jadi, menurut Aturan Pangkat yang Diperumum, kita peroleh

$$
\begin{aligned}
\int \sin x.\cos x \, dx &= \int g(x)\, g'(x)\, dx \\
&= [g(x)]^2/2 + C \\
&= (\sin x)^2/2 + C.
\end{aligned}
$$

Latihan

Tentukan integral tak tentu di bawah ini.

1. $\int (x^2 + x^{-2})\, dx$.
2. $\int (x^3 + 1).x^2\, dx$.
3. $\int \sin^2 x.\sin 2x\, dx$.
4. $\int \cos^2 x.\sin 2x\, dx$.
5. $\int \sin 2x\, dx$.

Persamaan Diferensial

Jika $F'(x) = f(x)$, maka $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Dalam bahasa diferensial: Jika $F'(x) = f(x)$, maka

(*) $$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

sehingga

$$\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Persamaan (*) merupakan contoh **persamaan diferensial** yang (paling) sederhana.

Persamaan diferensial banyak dijumpai dalam matematika, fisika, dan bidang ilmu lainnya.

Contoh 1

Tentukan persamaan kurva yang melalui titik $(1,2)$ dan mempunyai turunan $2x$ di setiap titik (x,y) yang dilaluinya.

Jawab. Misalkan persamaan kurva tersebut adalah $y = f(x)$. Maka, menggunakan notasi diferensial, informasi di atas mengatakan bahwa

$$dy = 2x\, dx.$$

Integralkan kedua ruas,

$$\int dy = \int 2x\, dx.$$

sehingga kita peroleh

$$y + C_1 = x^2 + C_2$$

atau $$y = x^2 + C,$$ dengan $C = C_2 - C_1$.

Persamaan $y = x^2 + C$ menyatakan *keluarga kurva* yang mempunyai turunan $2x$ di titik (x,y).

Sekarang kita akan mencari *anggota keluarga* kurva tersebut yang melalui titik $(1,2)$.

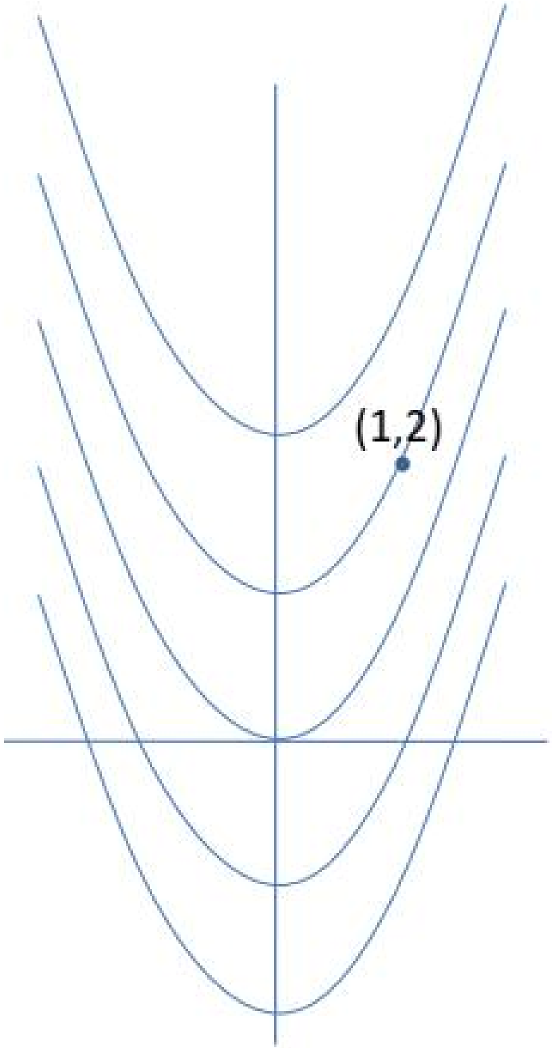
Dalam hal ini kita mempunyai persamaan

$$2 = 1^2 + C,$$

sehingga mestilah $C = 1$.

Jadi persamaan kurva yang kita cari adalah

$$y = x^2 + 1.$$



Contoh 2

Sebuah benda jatuh dari ketinggian 100 m dengan kecepatan awal 0 m/s. Karena gravitasi, benda tsb mengalami percepatan -9,8 m/s^2. Tentukan ketinggian benda tsb pada saat t.

<u>Jawab</u>. Misal $v = v(t)$ = kecepatan benda dan $h = h(t)$ = ketinggian benda pada saat t. Maka

$dv = -9{,}8\,dt$, sehingga $v = -9{,}8t + C$. Karena $v(0) = 0$, maka $C = 0$. Selanjutnya $dh = -9{,}8t\,dt$, sehingga

$$h = -4{,}9t^2 + D.$$

Diketahui $h(0) = 100$, maka $D = 100$. Jadi

$$h = 100 - 4{,}9t^2.$$

Catatan

Persamaan ketinggian $h = 100 - 4{,}9t^2$ tentu saja berlaku ketika benda berada di atas permukaan tanah. Karena itu daerah asal fungsi ini adalah himpunan bilangan $t \geq 0$ yang membuat $h \geq 0$, yaitu $0 \leq t \leq 4{,}517$.

Dalam hal ini, benda tsb mencapai permukaan tanah dalam 4,517 detik.

Contoh 3: Kecepatan Meninggalkan Bumi

Gaya **gravitasi** Bumi pada benda bermassa m dan berjarak s dari pusat Bumi adalah $F = -mgR^2/s^2$, dengan $g = 9{,}8$ m/s^2 dan $R \approx 6.400$ km. Dapat dibuktikan bahwa benda yang diluncurkan ke atas dengan kecepatan awal $v_0 \geq \sqrt{2gR} \approx 11$ km/s takkan jatuh kembali ke Bumi (bila gesekan dengan udara diabaikan). Menurut **Hukum II Newton**, $F = m.a$, shg

$$F = m.dv/dt = m.dv/ds.ds/dt = mv.dv/ds.$$

Akibatnya, $v.dv = -gR^2s^{-2}.ds$, dan dari sini diperoleh

$$v^2 = 2gR^2s^{-1} + v_0^2 - 2gR.$$

Untuk s besar, suku pertama di ruas kanan dapat diabaikan. Jadi, v akan tetap positif bila $v_0 \geq \sqrt{2gR}$.

Latihan

1. Tentukan fungsi $y = f(x)$ sedemikian sehingga $f'(x) = 3x^2 + 1$ dan $f(1) = 4$.
2. Diketahui suatu persamaan kurva melalui titik $(0,3)$ dan mempunyai turunan x/y di setiap titik (x,y) yang dilaluinya. Tentukan persamaan kurva tersebut.
3. Sebuah benda jatuh dari ketinggian 80 m dengan kecepatan awal -5 m/s ($g = -9{,}8\ m/s^2$). Tentukan kecepatan dan ketinggiannya pada saat $t = 1$ s.

Sasaran Kuliah Hari Ini

4.1 Luas Daerah di Bawah Kurva

Menghitung luas daerah di bawah suatu kurva sederhana (baik sebagai hampiran maupun secara eksak).

4.2 Integral Tentu

Memahami konsep integral tentu dan meng-hitung integral tentu dari suatu fungsi sederhana pada selang tertentu sebagai limit jumlah Riemann (regular).

Notasi Sigma

Penjumlahan deret n bilangan $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dilambangkan dengan notasi sigma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sebagai contoh,

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Teorema (Kelinearan Sigma)

$$\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Beberapa deret khusus (dengan indeks *i* berjalan dari 1 sampai dengan *n*), a.l.:

$$\sum i = 1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2.$$

$$\sum i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

$$\sum i^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4.$$

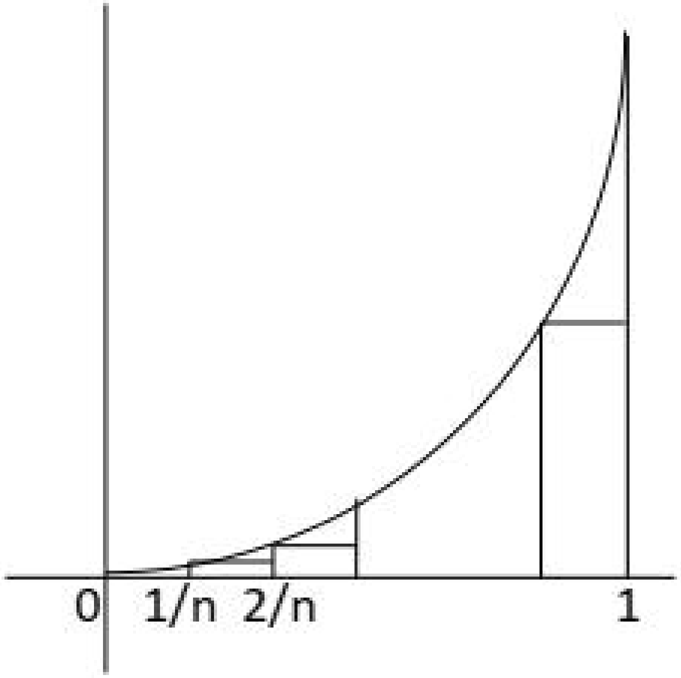
Deret pertama merupakan deret aritmetika n bilangan dengan suku pertama 1 dan beda 1.

Bukti rumus deret kedua diberikan di papan tulis.

Bukti rumus deret ketiga diserahkan sebagai latihan.

Luas Daerah di Bawah Kurva

Misalkan kita ingin menghitung luas daerah di bawah kurva $y = f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Pertama, bagi selang $[0,1]$ atas n selang bagian yang sama panjangnya. Lalu, luas daerah tersebut (L) kita hampiri dengan jumlah luas n persegi-panjang di bawah kurva, yakni



$$L \approx \frac{1}{n}\left[0^2 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right].$$

Perhatikan bahwa deret di ruas kanan dapat kita tulis-ulang sebagai

$$\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$$

yang jumlahnya

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

Jadi, kita kita peroleh hampiran

$$L \approx \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} := L_n.$$

Dari sini kita amati bahwa $L_n \approx 1/3$ bila n cukup besar. Jadi, kita dapat **menduga** bahwa luas daerah yang sedang kita cari adalah 1/3. [Apakah luasnya = 1/3 ??]

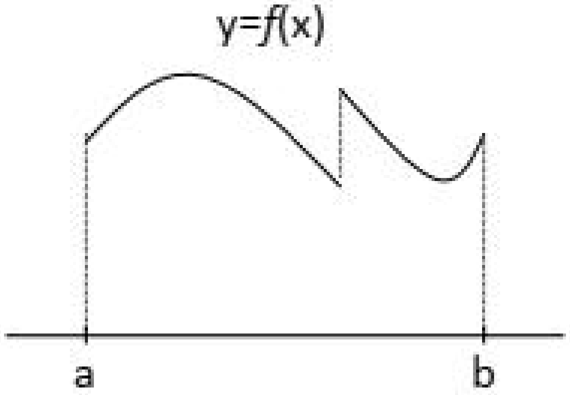
Latihan

1. Taksirlah luas daerah di bawah kurva $y = f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, dgn luas sejumlah persegi-panjang di atas kurva. Dengan hasil ini dan hasil sebelum-nya, simpulkan bahwa luas daerah di bawah kurva tersebut mestilah sama dengan 1/3.

2. Tentukan luas daerah di bawah kurva $y = g(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, dengan terlebih dahulu menaksirnya dengan luas sejumlah persegi-panjang di bawah dan di atas kurva.

Jumlah Riemann

Misalkan $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik. Bagi selang $[a,b]$ atas n selang bagian (tak perlu sama panjang), sebutlah titik-titik pembaginya



$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Himpunan titik-titik ini disebut sebagai **partisi** dari $[a,b]$. Untuk $i = 1, \ldots, n$, tulis $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (= lebar selang bagian ke-i).

Jumlah Riemann

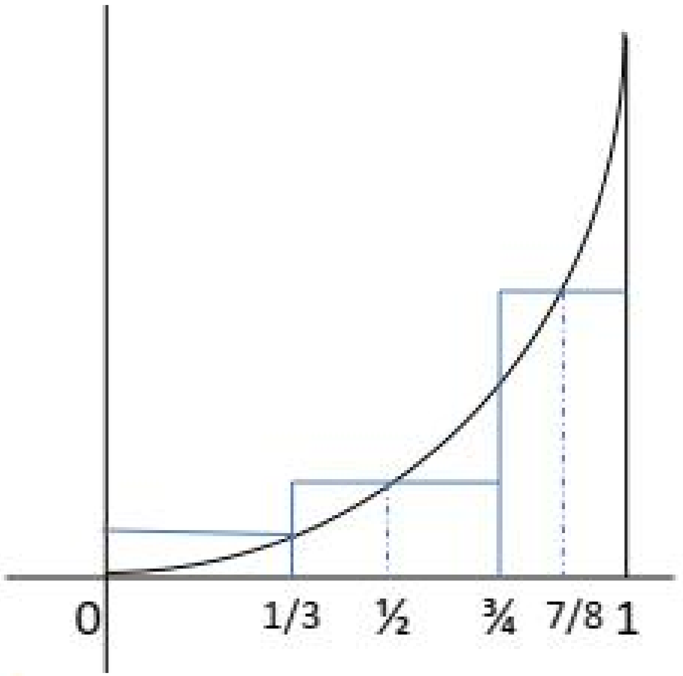
Dari setiap selang bagian, pilih **titik sampel** $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sembarang. Lalu bentuk penjumlahan berikut

$$R_P = \sum f(t_i).\Delta x_i$$

dengan indeks *i* berjalan dari 1 hingga n.

Bentuk ini dikenal sebagai **jumlah Riemann** utk f terhadap partisi $P = \{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$ dan titik-titik sampel t_i.

Contoh



Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$,

$P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$, dan

$t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{7}{8}$.

Maka jumlah Riemann untuk f terhadap partisi P dan titik-titik sampel t_i adalah

$$R_P = f(\tfrac{1}{3}).\tfrac{1}{3} + f(\tfrac{1}{2}).(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{7}{8})(1 - \tfrac{3}{4})$$

$$= 1/27 + 5/48 + 49/256.$$

Latihan

1. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, $P = \{0, ¼, ½, ¾, 1\}$, dan $t_1 = 1/8$, $t_2 = 1/3$, $t_3 = ½$, $t_4 = ⅞$. Tentukan jumlah Riemann untuk f terhadap partisi P dan titik-titik t_i tersebut.
2. Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, $P = \{0, ¼, ½, ¾, 1\}$, dan $t_1 = 1/8$, $t_2 = 3/8$, $t_3 = 5/8$, $t_4 = ⅞$. Tentukan jumlah Riemann untuk f terhadap partisi P dan titik-titik t_i tersebut.

Integral Tentu

Jumlah Riemann untuk *f* merupakan ***hampiran*** untuk luas daerah di bawah kurva $y = f(x), x \in [a,b]$. Semakin 'halus' partisinya, semakin baik hampiran tersebut. Jika

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan **terintegralkan** pada [a,b] dan **integral tentu** *f* pada [a,b] didefinisikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

<u>Catatan</u>. $|P|$ = maks $\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$. Jika $\Delta x_i = (b-a)/n$ dan $n \rightarrow \infty$, maka $|P| \rightarrow 0$.

Catatan

Dalam notasi $\int_a^b f(x)dx$, kita mengasumsikan bahwa $a < b$. Jika $a > b$, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Jika $a = b$, maka kita definisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Catat pula bahwa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Teorema

Jika f terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik pada $[a,b]$, maka fungsi f ter-integralkan pada $[a,b]$.

Akibat: Fungsi polinom, fungsi rasional, $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x}$, $s(x) = \sin x$, dan $c(x) = \cos x$ merupakan fungsi yang terintegralkan pada sembarang selang terbatas yg termuat dalam daerah asalnya.

Contoh

Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, kontinu; karena itu f terintegralkan pada $[0, 1]$. Integral tentu f pada $[0, 1]$ dapat dihitung sebagai limit jumlah Riemann dengan **partisi regular**:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right)\tfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Latihan

1. Fungsi $g(x) = x^3$ terintegralkan pada $[0, 1]$. Nyatakan integral tentu g pada $[0, 1]$ sebagai limit jumlah Riemann dengan partisi regular, dan hitunglah nilainya.
2. Fungsi $g(x) = x^3$ terintegralkan pada $[0, b]$. Nyatakan integral tentu g pada $[0, b]$ sebagai limit jumlah Riemann dengan partisi regular, dan hitunglah nilainya.
3. Menggunakan hasil di atas, hitung integral tentu $g(x) = x^3$ pada $[a, b]$, dengan $0 < a < b$.

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan