FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-4

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

KULIAH SEBELUMNYA:

Fungsi Kontinu pada Selang Tutup

Fungsi f dikatakan **kontinu pada [a,b]** apabila f kontinu pada (a,b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$.

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a,b]$ *tidak terputus* dari titik $(a,f(a))$ ke $(b,f(b))$.

KULIAH SEBELUMNYA:

Teorema **N**ilai **A**ntara

Jika f kontinu pada [*a,b*], *f(a) < 0 dan f(b) > 0* (*atau sebaliknya, f(a) > 0 dan f(b) < 0*)*, maka terdapat c* ϵ (*a,b*) *sehingga f(c) = 0.*

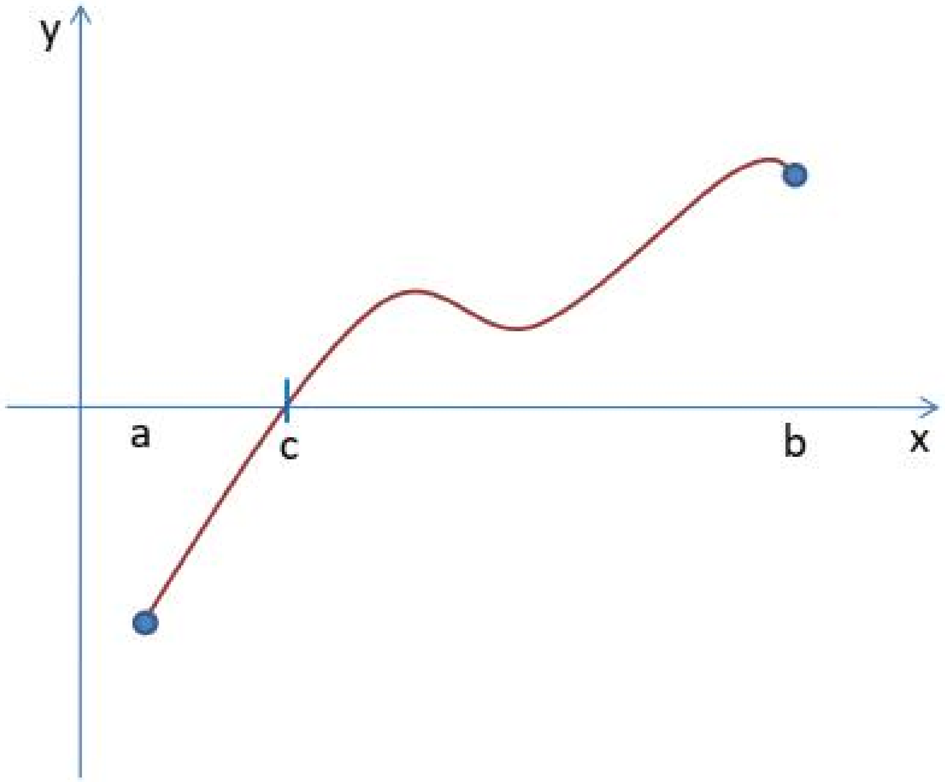
Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$, $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (-1,2)$ sehingga

$$f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$$

(yakni, f mempunyai **akar** pada $[-1,2]$).

KULIAH SEBELUMNYA:

Ilustrasi TNA



KULIAH SEBELUMNYA:

Latihan

1. Tentukan nilai *L* agar *f* kontinu di 1.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$
$$= L, \qquad x = 1$$

2. Tentukan *a* dan *b* agar *f* kontinu di setiap titik.

$$\begin{aligned} f(x) &= -1, \quad x < -1 \\ &= ax+b, -1 \le x \le 1 \\ &= 2, \quad x > 1. \end{aligned}$$

3. Buktikan bahwa $p(x) = x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.

Apa yang Telah Anda Pelajari pada Bab 1:

1.1 Pengantar Limit

1.2 Limit Fungsi

Masih ingat definisinya?

1.3 Teorema-Teorema Limit

Masih ingat apa saja teoremanya?

1.4 Limit Fungsi Trigonometri

1.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

1.6 Kekontinuan (termasuk Teorema Nilai Antara)

Sasaran Kuliah Hari Ini

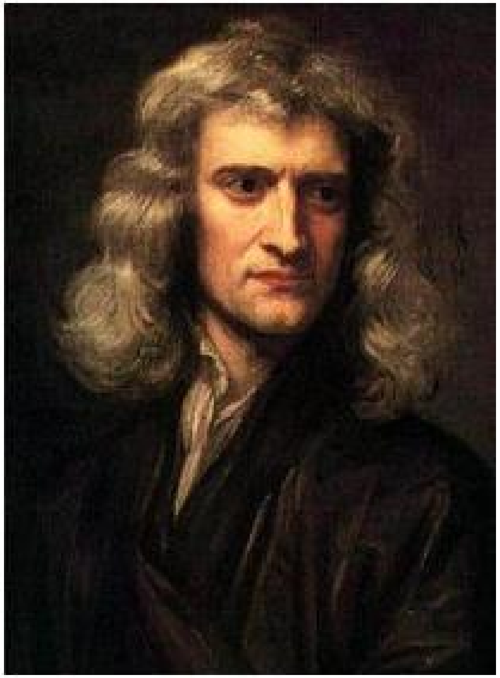
2.1 Dua Masalah Satu Tema

Mengetahui latar belakang konsep turunan.

2.2 Turunan

Memahami konsep dan dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan.

Kecepatan Sesaat



http://en.wikipedia.org

Misalkan sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus menurut persamaan $x = x(t)$, dengan $x(t)$ menyatakan posisi benda tersebut pd saat t.

Kecepatan rata-rata-nya dari $t = a$ s/d $t = b$ adalah

$$v[a,b] = [x(b) - x(a)]/(b - a).$$

Kecepatan sesaat pada $t = a$ adalah

$$v(a) = \lim_{b \to a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

Contoh

Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian 100 m, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatannya pada saat $t = 1$?

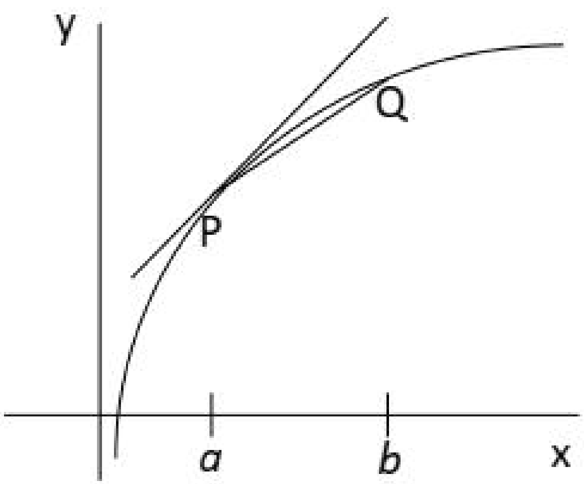
<u>Jawab</u>: $v(1) = \lim_{t \to 1} \dfrac{h(t) - h(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \dfrac{4{,}9(1 - t^2)}{t - 1}$

$$= \lim_{t \to 1} (-4{,}9)(1 + t) = -9{,}8 m / \text{det} .$$

Gradien Garis Singgung

http://www.123rf.com

Misalkan kita mempunyai fungsi $y = f(x)$ yang grafiknya cukup mulus, khususnya di sekitar $x = a$, sehingga mempunyai garis singgung di titik $P(a,f(a))$ --- lihat gambar.



Gradien garis yg melalui titik $P(a,f(a))$ dan $Q(b,f(b))$ adalah $m = [f(b) - f(a)] \div (b - a)$. Gradien **garis singgung** pada grafik $y = f(x)$ di $P(a,f(a))$ adalah

$$m_a = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Contoh 4

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2$ di titik (1,1).

<u>Jawab</u>: Gradien garis singgungnya adalah

$$m_1 = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

Latihan

1. Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian 50 m, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 50 – 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatannya pada saat $t = 2$?
2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3$ di titik $(2,8)$.

Definisi Turunan di Suatu Titik

Pada bagian sebelumnya kita melihat bahwa kecepatan sesaat dan gradien garis singgung ternyata merupakan bentuk limit yang sama.

Hal ini memotivasi kita untuk membahas bentuk limit tersebut secara khusus.

Definisi: Fungsi $y = f(x)$ dikatakan mempunyai **turunan di *a*** apabila limit berikut ada:

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Turunan f **di** a didefinisikan sama dengan limit ini, dan dilambangkan dengan $f'(a)$.

Catatan & Contoh

Catatan: Dengan substitusi $b = a + h$, kita peroleh

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan *limit ini ada*.

Contoh: Misalkan $f(x) = x^2$ dan $a = 1$. Kita hitung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2.$$

Jadi, *f* mempunyai turunan di 1 dan $f'(1) = 2$.

Secara umum, dapat diperiksa bahwa *f* mempunyai turunan di $a \in \mathbf{R}$ sembarang dan $f'(a) = 2a$.

Aturan Dasar Turunan

1. Jika $f(x) = k$ (konstanta), maka $f'(x) = 0$.

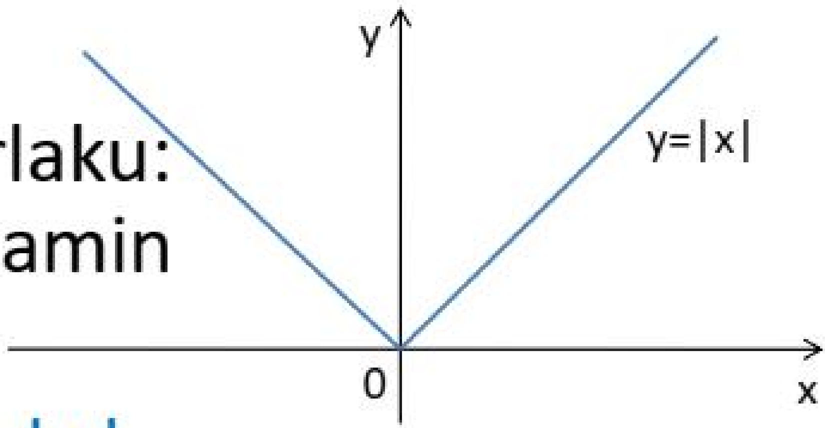
2. Jika $f(x) = x$ (fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$.

3. Jika $f(x) = x^n$ (fungsi pangkat, n bilangan bulat positif), maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Hubungan antara Turunan dan Kekontinuan

Jika f mempunyai turunan di a, maka f kontinu di a (penjelasan diberikan di papan tulis).

Namun, sebaliknya tidak berlaku: Kekontinuan di *a* **tidak** menjamin adanya turunan di *a*.



Sebagai contoh, fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tetapi tidak mempunyai turunan di 0. ← Buktikan!

Latihan

1. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$ di $a > 0$ sembarang.
2. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt[3]{x}$ di $a \neq 0$ sembarang.
3. Tentukan turunan $f(x) = 1/x$ di $a \neq 0$ sembarang.
4. Buktikan bahwa $f(x) = |x|$ tidak mempunyai turunan di 0.
5. Diketahui $f(x) = x \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.
6. Diketahui $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.

Kuis 7 Menit

Diketahui

$$f(x) = \cdots \text{ (akan dituliskan di papan tulis).}$$

a. Buktikan bahwa f kontinu di ...
b. Periksa apakah f mempunyai turunan di ...

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.3 Aturan Turunan

Menggunakan aturan turunan untuk menentukan turunan fungsi yang merupakan jumlah/selisih atau hasil kali/hasil bagi dua fungsi sederhana.

2.4 Turunan Fungsi Trigonometri

Menentukan turunan fungsi trigonometri.

2.5 Aturan Rantai

Menentukan turunan fungsi yang merupakan komposisi dari dua fungsi sederhana dengan Aturan Rantai.

Aturan Turunan

3. **Aturan Pangkat**: *Jika* $f(x) = x^n$ *(n bil. asli), maka* $f'(x) = nx^{n-1}$. [Sudah dibahas pd kuliah yl.]
4. **Aturan Kelipatan Konstanta**: $(kf)'(x) = k.f'(x)$.
5. **Aturan Jumlah**: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
6. **Aturan Hasilkali**:

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

7. **Aturan Hasilbagi**:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Bukti: Aturan Hasil Kali

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$. Maka

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

Contoh Penggunaan Aturan Turunan

Dengan menggunakan Aturan Turunan (yang sesuai), tentukan turunan fungsi berikut:

1. $f(x) = x(x^2 + 1)$.
2. $g(x) = (5x - 4)/(3x^2 + 1)$.

Jawab:

1. Dengan Aturan Pangkat, Jumlah, dan Hasil kali:
   $f'(x) = 1.(x^2 + 1) + x(2x) = 3x^2 + 1$.

2. Dengan Aturan 3, 4, 5 dan 7 (utk Hasil bagi):
   $$g'(x) = \frac{5(3x^2+1)-(5x-4)(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-15x^2+24x+5}{(3x^2+1)^2}.$$

Latihan

1. Dengan menggunakan Aturan Turunan (yang sesuai), tentukan turunan fungsi berikut:
   a. $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$.

   b. $g(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$.
2. Buktikan bahwa turunan dari $f(x) = x^{-n}$ (n bilangan bulat positif) adalah $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Turunan Fungsi Sinus

1. *Jika f(x) = sin x, maka f'(x) = cos x.*

Bukti: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x . \cos(h) + \cos x . \sin(h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\sin x \frac{1 - \cos(h)}{h} + \cos x \frac{\sin(h)}{h} \right)$$

$$= (-\sin x)\left[\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} \right] + (\cos x)\left[\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \right]$$

$$= (-\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x.$$

Turunan Fungsi Cosinus

2. *Jika f(x) = cos x, maka f'(x) = –sin x.*

Bukti:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x.\cos(h) - \sin x.\sin(h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(-\cos x \frac{1-\cos(h)}{h} - \sin x \frac{\sin(h)}{h} \right)$$

$$= (-\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} \right] - (\sin x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \right]$$

$$= (-\cos x)\cdot 0 + (-\sin x)\cdot 1 = -\sin x.$$

Turunan Fungsi Trigonometri Lainnya

Dengan Aturan Hasil bagi, kita peroleh:

3. *Jika* $f(x) = \tan x$, *maka* $f'(x) = \sec^2 x$.

4. *Jika* $f(x) = \cot x$, *maka* $f'(x) = -\csc^2 x$.

5. *Jika* $f(x) = \sec x$, *maka* $f'(x) = \sec x \tan x$.

6. *Jika* $f(x) = \csc x$, *maka* $f'(x) = -\csc x \cot x$.

Latihan

1. Buktikan turunan dari $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.
2. Buktikan turunan dari $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.
3. Tentukan turunan dari:
   a. $f(x) = \sin^2 x$.
   b. $g(x) = \sin x.\tan x$.
   c. $h(x) = x^2\cos x$.

Turunan Fungsi Komposisi

Bagaimana menghitung turunan dari
$h(x) = (1 + 0{,}5x)^{12}$?

Bagaimana pula dengan $G(x) = \cos 3x$?

Perhatikan bahwa kedua fungsi di atas dapat dipandang sebagai hasil **komposisi** dua fungsi yang kita ketahui turunannya.

Aturan Rantai

Jika g mempunyai turunan di x *dan f mempunyai turunan di* u = *g*(x), *maka* $f \circ g$ *mempunyai turunan di* x *dengan*

$$(f \circ g)'(x) = f\,'(g(x)).g'(x).$$

Contoh:

Diketahui $h(x) = (1 + 0.5x)^{12}$. Tentukan $h'(x)$.

Jawab: Misalkan $u = 1 + 0.5x = g(x)$ dan $f(u) = u^{12}$. Maka $h(x) = (f \circ g)(x)$. Di sini $g'(x) = 0.5$ dan $f\,'(u) = 12u^{11}$. Menurut Aturan Rantai,

$$h'(x) = f\,'(g(x)).g'(x) = 12[g(x)]^{11}.(0.5) = 6(1 + 0.5x)^{11}.$$

Latihan

1. Menggunakan Aturan Rantai, tentukan turunan dari:
   a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$
   b. $G(x) = \cos 3x.$
2. Nyatakan $h(x) = \sin^3 4x$ sebagai hasil komposisi dari *beberapa* fungsi, kemudian tentukan $h'(x)$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.6 Notasi Leibniz & Turunan Tingkat Tinggi

Menggunakan notasi Leibniz dan menentukan turunan tingkat tinggi dari fungsi yang diberikan, termasuk pola atau rumus umumnya.

2.7 Turunan Implisit

Menentukan turunan fungsi yang diberikan *secara implisit*.

2.8 Laju yang Berkaitan

Menentukan laju dari suatu besaran *yang berkaitan* dengan besaran lain yang diketahui lajunya.

Notasi Leibniz

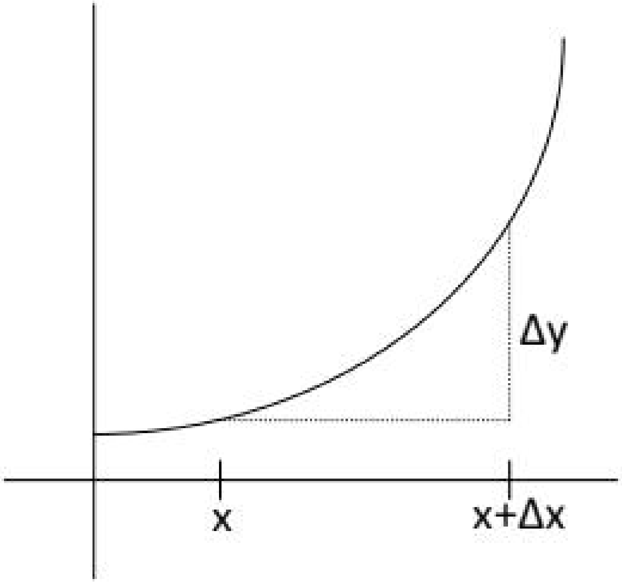
Pada gambar di samping, tampak bahwa pertambahan sebesar Δx pada x menyebabkan pertambahan sebesar Δy pada y, dengan

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Bagi kedua ruas dengan Δx,

kita peroleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Notasi Leibniz

Jika $\Delta x \to 0$, maka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Leibniz menggunakan lambang **dy/dx** untuk menyatakan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jadi, jika y = *f*(x), maka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Catatan: Dalam notasi ini, dy/dx merupakan satu kesatuan, **bukan** hasil bagi dy dan dx.

Contoh 1. Jika $y = x^3 + x$, maka $dy/dx = 3x^2 + 1$.

Aturan Rantai dalam Notasi Leibniz

Dengan notasi Leibniz, **Aturan Rantai** berbunyi:
Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Contoh 2. Misalkan $y = (x^3 + x)^{10} = u^{10}$ dengan $u = x^3 + x$. Maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 10u^9 .(3x^2 + 1) = 10(x^3 + x)^9 (3x^2 + 1).$$

Turunan Tingkat Tinggi

Diberikan sebuah fungsi f, kita turunkan f', yang juga merupakan fungsi. Dari f' dapat kita turunkan $f'' = (f')'$, yang disebut **turunan kedua** f, dan dari f'' kita dapat memperoleh **turunan ketiga** f, yakni $f''' = (f'')'$, dst.

Turunan ke-n dari $y = f(x)$ dilambangkan dengan $f^{(n)}$ atau $d^n y/dx^n$.

Contoh 3. Jika $y = \sin 2x$, maka $dy/dx = 2 \cos 2x$, $d^2y/dx^2 = -4 \sin 2x$, $d^3y/dx^3 = -8 \cos 2x$, dst.
Dapatkah anda menentukan rumus untuk $d^n y/dx^n$?

Catatan

Bila turunan pertama mempunyai interpretasi fisis kecepatan sesaat, maka turunan kedua secara fisis dapat diinterpretasikan sebagai *percepatan* (sesaat) yang mengukur laju perubahan kecepatan terhadap waktu (lihat buku teks Purcell & Varberg).

Untuk memahami lebih jauh tentang interpretasi dari turunan, khususnya turunan pertama, kedua, dan ketiga, baca buku teks Purcell & Varberg tentang **model matematika**.

Latihan

1. Diketahui $y = \sin^2 (3x)$. Tentukan dy/dx.
2. Tentukan rumus umum **turunan ke-*n*** dari
   a. $f(x) = \cos 2x$.
   b. $g(x) = 1/x$.
   c. $H(x) = \sqrt{x}$.

Turunan Fungsi Implisit

Misalkan kita mempunyai persamaan

$$7y^3 + y = x^3$$

dan ingin menentukan persamaan garis singgung pada grafik persamaan tersebut di (2,1). Masalahnya adalah bagaimana menghitung dy/dx, padahal kita tidak mempunyai rumus eksplisit untuk y dalam x.

Secara implisit, kita dapat menurunkan kedua ruas terhadap x dengan menggunakan Aturan Rantai (dengan mengingat bahwa y adalah fungsi dari x):

$$21y^2.dy/dx + dy/dx = 3x^2.$$

Dengan demikian kita peroleh

$$dy/dx = (3x^2)/(21y^2+1).$$

Di titik $(2,1)$, kita hitung

$$dy/dx = 12/(21 + 1) = 6/11.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = 6/11(x - 2)$$

atau

$$6x - 11y - 1 = 0.$$

Aturan Pangkat Rasional

Dengan penurunan implisit, kita dapat membuktikan **Aturan Pangkat Rasional** berikut:

Jika $y = x^r$ $(r \in \mathbf{Q})$, *maka* $dy/dx = r.x^{r-1}$.

(Buktinya diberikan di papan tulis.)

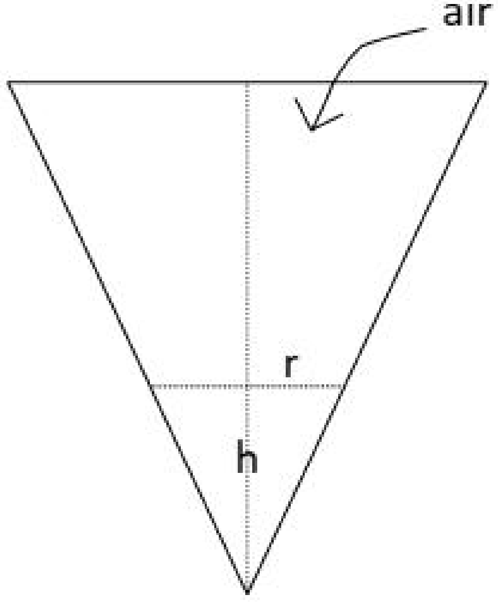
Latihan

1. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y^5 + 7y = x^3$ di titik $(-2,-1)$.
2. Diberikan persamaan $y^3 - x^2 + 2x = 1$, tentukan dy/dx dan d^2y/dx^2.

Laju yang Berkaitan

Jika x dan y merupakan dua peubah yang berkaitan dan masing-masing berubah terhadap waktu (t), maka dx/dt dan dy/dt merupakan dua **laju yang berkaitan**.

Contoh: Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju 8 dm^3/menit. Jika **tinggi** tangki tersebut adalah 24 dm dan **jari-jari** permukaan atasnya 12 dm, seberapa cepatkah permukaan air <u>naik</u> pada saat tingginya 4 dm?



Laju yang Berkaitan

<u>Jawab</u>: Misalkan V menyatakan **volume**, r **jari-jari** permukaan, dan h **tinggi** air. Maka

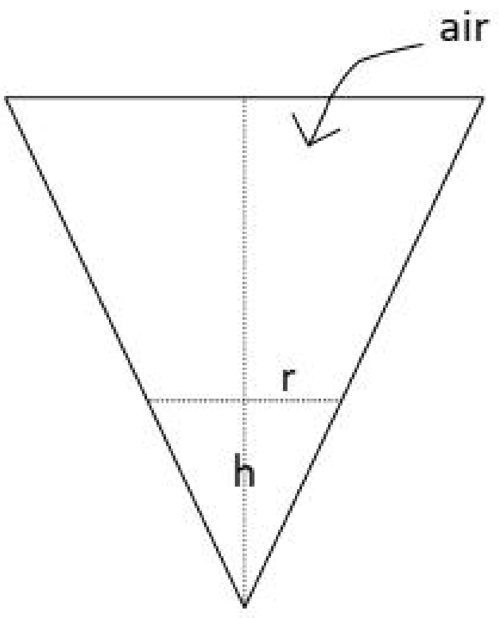
$$V = (\pi/3)r^2h.$$

Di sini $r = h/2$, sehingga

$$V = (\pi/12)h^3.$$

Turunkan kedua ruas terhadap t, kita peroleh

$$dV/dt = (\pi/4)h^2.dh/dt.$$



Laju yang Berkaitan

Telah diperoleh:

$$dV/dt = (\pi/4)h^2.dh/dt.$$

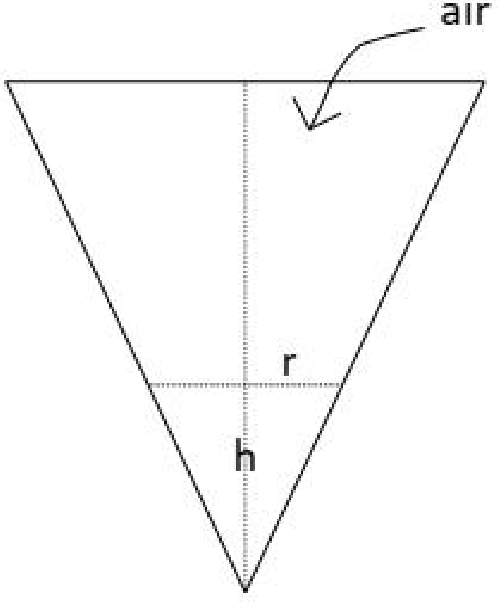
Diketahui $dV/dt = 8\ dm^3/menit$.

Jadi, pada saat $h = 4$ dm, kita mempunyai

$$8 = 4\pi.dh/dt$$

sehingga

$$dh/dt = 2/\pi\ dm/menit.$$

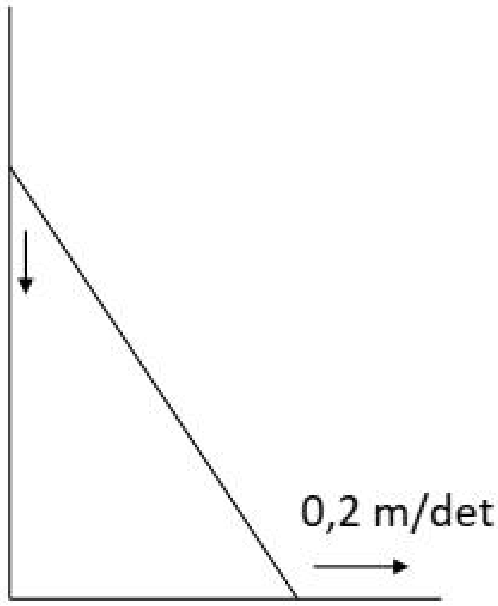


Latihan

1. Sebuah pesawat, terbang ke arah utara dengan laju 800 km/jam, melintas di atas Alun-Alun pada pukul 12.00. Sebuah pesawat lain terbang ke arah timur dengan laju 750 km/jam, melintasi Alun-Alun pada pukul 12.15. Jika kedua pesawat tersebut terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat jarak di antara keduanya bertambah pada pukul 13.15?

Latihan

2. Sebuah tangga yang panjang-nya 2 m bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan laju 0,2 m/det, seberapa cepatkah ujung atas tangga bergeser menuruni dinding pada saat ujung bawah tangga berjarak 0,5 m dari dinding?



Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan