FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-9

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si

UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

4.3.1 Teorema Dasar Kalkulus I

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus I untuk menghitung integral tentu.

4.3.2 Metode Substitusi

Menggunakan metode substitusi dalam penghitungan integral tentu.

4.4 Teorema Dasar Kalkulus II

Menggunakan Teorema Dasar Kalkulus II untuk menentukan turunan dari integral.

Teorema Dasar Kalkulus

Sejauh ini kita telah dapat mengatakan apakah sebuah fungsi terintegralkan pada suatu selang, dengan melihat apakah fungsi tersebut terbatas dan kontinu kecuali di sejumlah terhingga titik.

Namun, untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut, selain dengan menggunakan definisinya, kita memerlukan ‘senjata’ yang lebih ampuh.

Salah satu alat bantu untuk menghitung integral tentu adalah **Teorema Dasar Kalkulus**.

Teorema Dasar Kalkulus I

Jika f kontinu dan mempunyai anti-turunan F pada [a, b], maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan:

1. Teorema ini mengaitkan integral tak tentu dengan integral tentu.
2. Notasi $F(x)\Big|_a^b$ biasa digunakan untuk menyatakan $F(b) - F(a)$.

Bukti Teorema Dasar Kalkulus I

Misalkan *f* kontinu dan mempunyai anti-turunan *F* pada [*a*, *b*]. Maka, *f* terintegralkan pada [*a*, *b*], dan untuk setiap partisi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ kita mempunyai

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i .$$

Karena itu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i = F(b) - F(a).$

Contoh

1. Fungsi $f(x) = x^2$ kontinu dan mempunyai anti-turunan $F(x) = x^3/3$ pada $[0, 1]$; jadi

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

2. Lebih umum, untuk $r \neq -1$, fungsi $f(x) = x^r$ kontinu dan mempunyai anti-turunan $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$ pada $[a, b]$ (dalam daerah asal f); jadi

$$\int_a^b x^r dx = \left.\frac{x^{r+1}}{r+1}\right|_a^b = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}.$$

Kelinearan Integral Tentu

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Contoh: Dengan menggunakan kelinearan integral tentu, kita dapat menghitung

3. $\int_0^2 (x^2+\sqrt{x})dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 \sqrt{x}dx = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}.$

Latihan

$$1.\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos x)dx = \ldots$$

$$2.\int_{1}^{4} (\sqrt{x} + \tfrac{1}{\sqrt{x}})dx = \ldots$$

$$3.\int_{1}^{5} \frac{x^3 - 1}{x^2} dx = \ldots$$

Bagaimana menghitung integral ini?

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+x}.(2x+1)dx.$$

Atau integral ini:

$$\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Dengan menggunakan Aturan Pangkat yang Diper-umum, kita dapat menghitung integral tak tentunya:

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C.$$

Dengan demikian, integral tentu tadi dapat dihitung:

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2}\Big]_0^4 = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2}.$$

Integral semacam ini, baik integral tentu maupun integral tak tentu, dapat pula dihitung dengan **metode substitusi**, yang akan kita bahas selanjutnya.

Sebagai contoh, untuk menghitung integral tak tentu

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx,$$

kita gunakan *substitusi peubah* $u = x^2 + x$, sehingga $du = (2x + 1)dx$ dan integral di atas menjadi $\int u^{1/2}\, du$. Dengan Aturan Pangkat, kita peroleh

$$\int u^{1/2}\, du = \tfrac{2}{3} u^{3/2} + C.$$

Substitusikan kembali $u = x^2 + x$, kita dapatkan

$$\int (x^2 + x)^{1/2}.(2x + 1)\, dx = \tfrac{2}{3}(x^2 + x)^{3/2} + C,$$

sebagaimana yang kita peroleh sebelumnya dengan Aturan Pangkat yang Diperumum.

Sekarang, untuk menghitung integral tentu

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx,$$

kita lakukan substitusi seperti tadi: $u = x^2 + x$, $du = (2x + 1)dx$. Selanjutnya kita perhatikan efek substitusi ini terhadap kedua batas integral.

Pada saat $x = 0$, kita peroleh $u = 0$; sementara pada saat $x = 4$, kita dapatkan $u = 20$. Dengan demikian

$$\int_0^4 (x^2 + x)^{1/2}(2x+1)dx = \int_0^{20} u^{1/2}du = \tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^{20} = \tfrac{2}{3}(20)^{3/2},$$

sama seperti yang kita peroleh sebelumnya.

Catatan

Dalam menghitung integral tentu dengan metode substitusi, kedua batas integral pada umumnya berubah; dan kita dapat meng-hitung integral dalam peubah baru *tanpa harus mensubstitusikan kembali peubah lama*.

Bila agak rumit, integral tentu tsb dapat dihitung dalam dua tahap: pertama cari dahulu integral tak tentunya, setelah itu baru gunakan Teorema Dasar Kalkulus.

Secara umum, dengan melakukan substitusi peubah $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, kita peroleh

Integral tak tentu: $\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)\, du.$

Integral tentu: $$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Jika *F* adalah anti-turunan dari *f*, maka

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

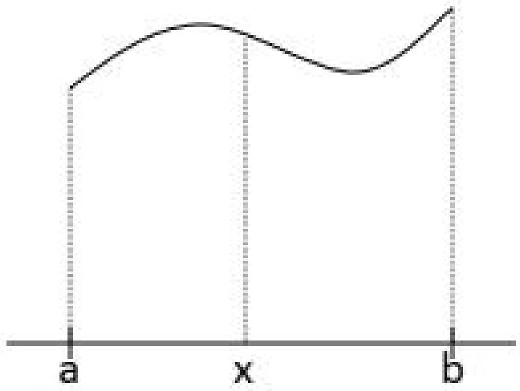
Latihan. Hitung integral tentu/tak tentu berikut:

1. $\int \sqrt{3x + 2}\, dx.$
2. $\int \cos(3x + 2)\, dx.$
3. $\displaystyle\int_0^1 (3x+2)^3\, dx.$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(\sqrt{t}+1)^3}\, dt.$

Fungsi Akumulasi

Misalkan *f* terintegralkan pada [*a*, *b*]. Definisikan

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$



Di sini, G(x) menyatakan "luas daerah" di bawah kurva y = *f*(t), *a* ≤ t ≤ x (lihat gambar).

Perhatikan bahwa G(*a*) = 0 dan $G(b) = \int_a^b f(t)dt.$

Fungsi G disebut **fungsi akumulasi** dari *f*.

Teorema Dasar Kalkulus II

G'(x) = *f*(x) pada [*a*, *b*]; yakni,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x), \forall x \in [a,b].$$

Catatan:

1. TDK II menyatakan bahwa fungsi akumulasi merupakan anti-turunan dari *f*.
2. TDK I dan TDK II menyatakan bahwa turunan dan integral merupakan semacam kebalikan satu terhadap yang lainnya.

Bukti Teorema Dasar Kalkulus II

Menurut definisi turunan,

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Ketika *h* kecil, *f* tak berubah banyak pada [x, x+h]. Pada selang ini, *f*(t) ≈ *f*(x), sehingga integral-nya kira-kira sama dengan *h.f*(x). Jadi *G'*(x) = *f*(x).

Contoh

1. $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x t^3 dt\right) = x^3.$$

2. $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 t^3 dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x t^3 dt\right) = -x^3.$$

3. $$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3 dt\right) \overset{u=2x}{=} \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} t^3 dt\right)\frac{du}{dx} = u^3.2 = 16x^3.$$

4. $$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} t^3 dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^{1} t^3 dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^{2x} t^3 dt\right)$$
$$= -x^3 + 16x^3 = 15x^3.$$

Latihan

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x (2t^2 + \sqrt{t})dt\right) = \ldots$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^x x^2 t.dt\right) = \ldots$

3. Diketahui $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds$.

   Tentukan **selang** di mana grafik y = f(x)

   (a) naik, (b) cekung ke atas.

Sasaran Kuliah Hari Ini

4.5.1 Sifat-Sifat Integral Tentu

Menggunakan sifat-sifat integral tentu dalam menghitung atau menaksir nilai integral tentu.

4.5.2 Teorema Nilai Rata-rata Integral

Menentukan nilai rata-rata integral dari suatu fungsi yang diberikan.

4.6 Pengintegralan Numerik

Menghitung integral tentu dengan metode trapesium dan metode Simpson

Sifat-Sifat Integral Tentu

Selain sifat kelinearan (yang telah dibahas pada pertemuan sebelumnya), integral tentu juga memiliki beberapa sifat penting, yaitu:

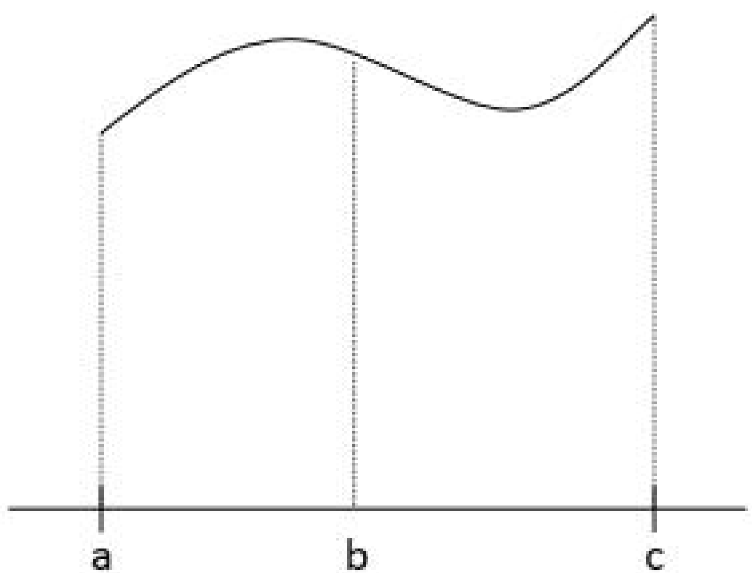
-Sifat Penjumlahan Selang

-Sifat Perbandingan

-Sifat Keterbatasan

Sifat Penjumlahan Selang

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$



Sifat Penjumlahan Selang

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

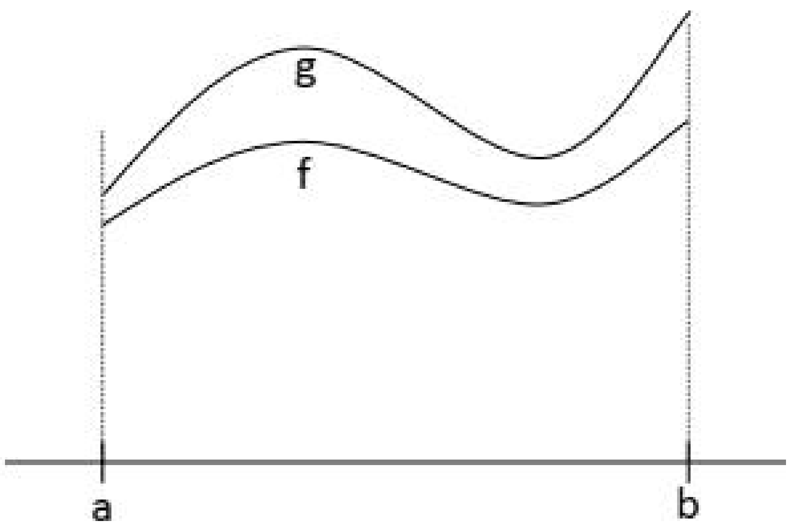
Contoh:

$$\int_{-1}^{2} x\,|\,x\,|\,dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_0^2 x^2 dx = \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}.$$

Sifat Perbandingan

Jika $f(x) \le g(x)$ *pada* [a, b], *maka*

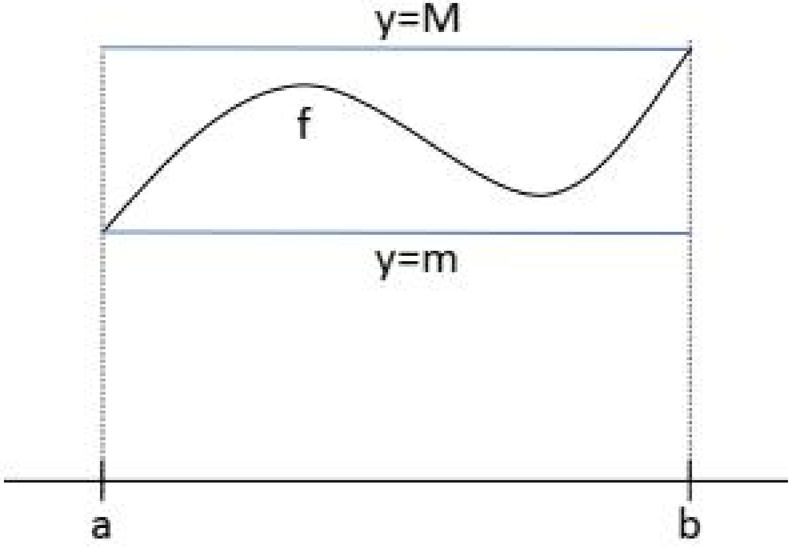
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$



Sifat Keterbatasan

Jika m ≤ f(x) ≤ M *pada selang* [a, b], *maka*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$



Sifat Keterbatasan

Jika m ≤ *f*(x) ≤ M *pada selang* [a, b], *maka*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Contoh: $1 \le \sqrt{1+x^4} \le \sqrt{2}$ pada selang [0,1]; jadi

$$1 = 1(1-0) \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}.$$

Integral Tentu dari Fungsi Simetris dan Fungsi Periodik

Jika *f* genap, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Jika *f* ganjil, maka $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Jika *f* periodik dengan periode *p*, maka

$$\int_{a}^{a+p} f(x)dx = \int_{0}^{p} f(x)dx.$$

<u>Latihan</u>. Hitung/taksir nilai integral tentu berikut:

1. $\int_{0}^{2} |x^3 - 1|\, dx.$

2. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^4}\, dx.$

3. $\int_{0}^{\pi^2/4} \sin \sqrt{x}.dx.$

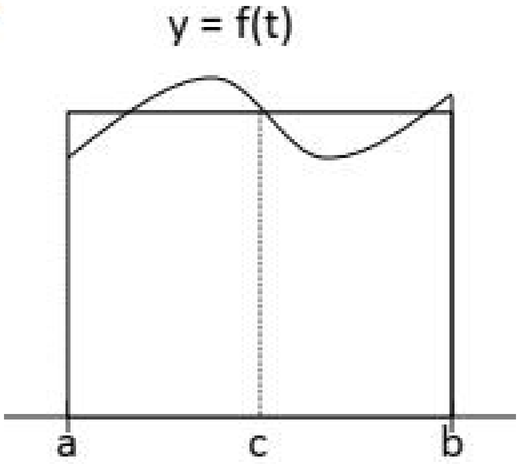
4. $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^4}\, dx.$

5. $\int_{100\pi}^{101\pi} \sin 2x.dx.$

Teorema Nilai Rata-Rata (Integral)

Jika f kontinu pada [a, b], *maka ter-dapat* c ϵ [a,b] *sedemikian sehingga*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$



<u>Catatan</u>. Nilai *f*(c) dalam teorema ini disebut **nilai rata-rata (integral)** *f* pada [a, b] (lihat gambar). Per-hatikan bahwa luas daerah di ba-wah kurva y = *f*(t), t ϵ [a, b], sama dengan *f*(c)(b – a).

Contoh

Misalkan $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$. Maka

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Jadi nilai rata-rata integral f pada $[0, 1]$ adalah ⅓.

Latihan

Tentukan nilai rata-rata (integral) dari

1. $f(x) = 4x^3$ pada selang $[1, 5]$.
2. $g(x) = \pi \sin x$ pada selang $[0, \pi]$.

4.6 PENGINTEGRALAN NUMERIK

Tidak semua integral tentu dapat dihitung secara eksak dgn menggunakan Teorema Dasar Kalkulus. Sbg contoh:

$$\int \sin(x^2)\,dx, \quad \int \sqrt{1-x^4}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$ — Lalu bagaimana? Iris, Taksir, Jumlahkan

Jumlah Riemann: $\int f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$

Jumlah Riemann Kiri: $\int f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ dgn $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Jumlah Riemann Kanan: $\int f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$

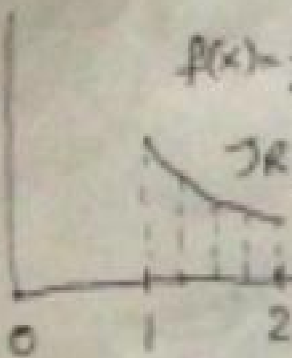
$$\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Jumlah Riemann Tengah: $\int f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(i-\frac{1}{2})(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

Contoh $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ dgn menggunakan Jumlah Riemann Kiri, Kanan, dan Tengah, dgn $n = 4$.

Jwb: $a = x_0 = 1,\ x_1 = \frac{5}{4},\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{7}{4},\ x_4 = b = 2.$



$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = \frac{4}{5},\ f(x_2) = \frac{2}{3},\ f(x_3) = \frac{4}{7},\ f(x_4) = \frac{1}{2}$

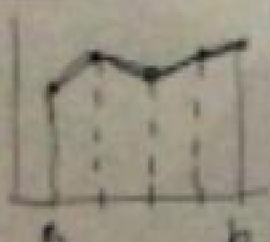
JR Kiri $\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420} = 0{,}759$

JR Kanan $\approx \frac{1}{4}\left[\frac{4}{5} + \frac{4}{6} + \frac{4}{7} + \frac{4}{8}\right] = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{533}{840} = 0{,}6$

JR Tengah $\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right] = \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15} = 0{,}691$

$\left[\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 \approx 0.693\right] \Rightarrow$ JR Tengah memberikan hampiran yg terdekat.

Aturan Trapesium: Setiap irisan ditaksir dgn trapesium



$$A_i \approx \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

alas = h
tinggi kiri = $f(x_{i-1})$
tinggi kanan = $f(x_i)$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

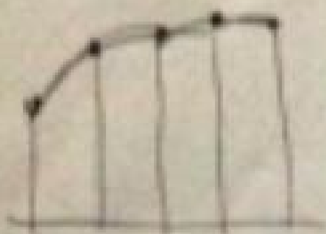
Contoh : Taksir $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ dgn Aturan Trapesium dgn $n = 4$ $[h = \frac{1}{4}]$

Jawab : $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{8}\left[1 + 2\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{4}{6} + 2\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{8}{8} + \frac{8}{5} + \frac{8}{6} + \frac{8}{7} + \frac{8}{16}\right]$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} = 0,697\ldots$

Aturan Parabola (n genap)



Utk sepasang irisan yg berdekatan

x_{i-1} x_i x_{i+1}

$A_i = \frac{h}{3}\left(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$ Soal no 17

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Contoh : Taksir $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ dgn Aturan Parabola dgn $n = 4$ $[h = \frac{1}{4}]$

Jawab : $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{4}{6} + 4\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right]$

$= \frac{1}{12}\left[1 + \frac{16}{5} + \frac{8}{6} + \frac{16}{7} + \frac{1}{2}\right] \approx 0,693$

<u>Teorema</u> Kesalahan pd penaksiran integral tgn

Jumlah Riemann kiri : $E_n = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \quad \forall c \in [a,b)$

〃 Kanan : $E_n = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(c) \quad \forall c \in [a,b]$

〃 Tengah : $E_n = -\frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c) \quad w/ c \in [a,b]$

Aturan Trapesium : $E_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad w/ c \in [a,b]$

Aturan Parabola : $E_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \quad w/ c \in [a,b]$

<u>sol no.17</u>

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\int_{m-h}^{m+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(m-h) + 4f(m) + f(m+h)\right]$$

$$\int_{m-h}^{m+h} f(x)\,dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \Big|_{m-h}^{m+h} = \frac{a}{3}(m+h)^3 + \frac{b}{2}(m+h)^2 + c(m+h) - \frac{a}{3}(m-h)^3 - \frac{b}{2}(m-h)^2 - c(m-h)$$

$$= \frac{a}{3}(6m^2h + 2h^3) + \frac{b}{2}(4mh) + c\,2h = \frac{h}{3}\left[a(6m^2 + 2h^2) + b(6m) + 6c\right]$$

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan