FI19104
Pengantar Fisika Matematika

Materi Minggu ke-10

Dr. Bebeh Wahid Nuryadin, M.Si
UIN Sunan Gunung Djati Bandung

Ganjil 2020

Sasaran Kuliah Hari Ini

5.1 Luas Daerah

Menghitung luas daerah (pada bidang) yang dibatasi oleh beberapa kurva.

5.2 Volume Benda Putar dan Benda dengan Penampang Tertentu

Menghitung volume benda putar (dengan metode cakram/cincin) dan volume benda dengan penampang tertentu (dengan metode irisan sejajar).

Luas Daerah

Bila f(x) kontinu dan bernilai tak negatif, maka

$\int_a^b f(x)dx$ menyatakan luas daerah pada bidang-xy

yang terletak *di bawah* kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$,

dan *di atas* sumbu-x.

Bila f(x) bernilai tak positif, maka luas daerah

yang terletak *di atas* kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, dan

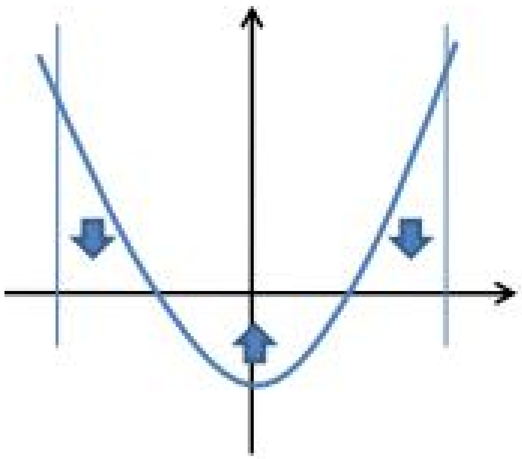
di bawah sumbu-x sama dengan $-\int_a^b f(x)dx$

Luas Daerah

Secara umum, luas daerah yang *dibatasi* oleh kurva y = f(x), garis x = a, garis x = b, dan sumbu-x adalah

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Contoh: Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 1$, garis $x = -2$, garis $x = 2$, dan sumbu-x. [<u>Petunjuk</u>: Gambar terlebih dahulu daerah yang dimaksud.]



Jawab: Luas daerah yang dimaksud adalah

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx.$$

Karena $f(x) = |x^2 - 1|$ genap, maka luas daerah tsb sama dengan

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx = 2\left[\int_{0}^{1}(1-x^2)dx + \int_{1}^{2}(x^2-1)dx\right]$$

$$= 2\left[x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} - x\Big|_1^2\right] = 2\left[\frac{2}{3} - 0 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= 4.$$

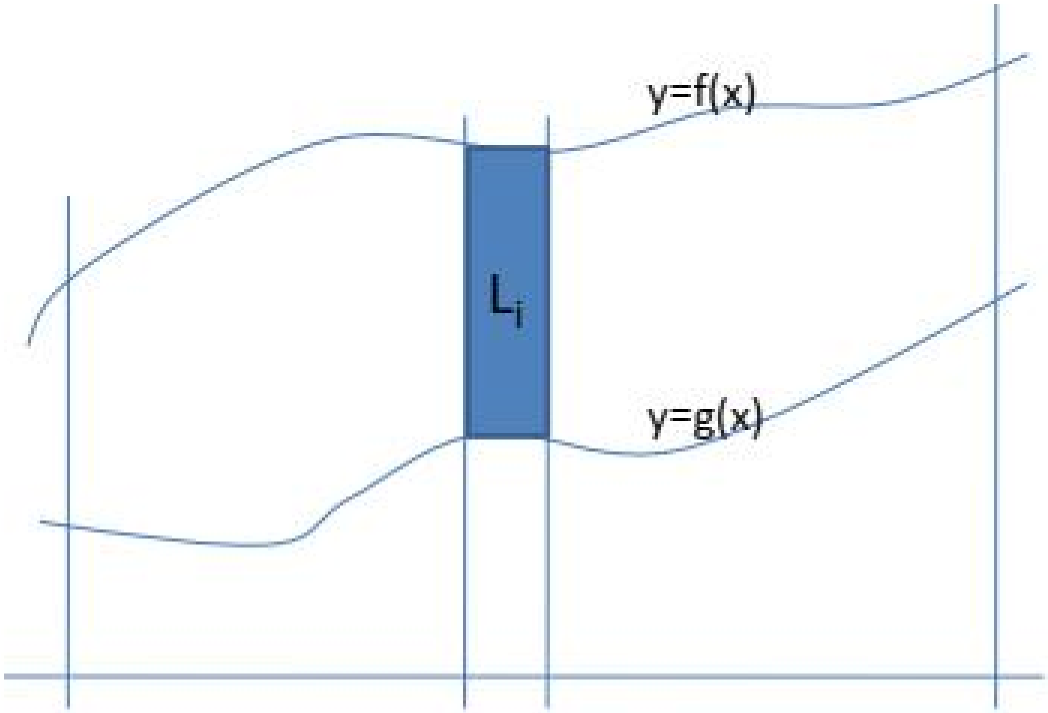
Luas Daerah di Antara Dua Kurva

Misalkan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$ dan kita ingin menentukan luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, serta garis $x = a$ dan garis $x = b$. Luas irisan ke-i dapat ditaksir sbb:

$$\Delta L_i \approx [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x_i.$$

Bila kita jumlahkan dan ambil limitnya, maka luas daerah yang dimaksud dapat dinyatakan sebagai

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$



IRIS,
TAKSIR,
INTEGRALKAN

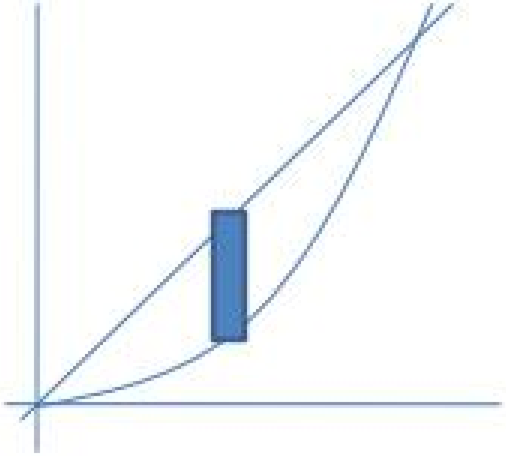
$$\Delta L_i \approx [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x_i$$

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Contoh

Tentukan luas daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$.

<u>Jawab</u>: Luas irisan sama dengan $\Delta L_i \approx [x_i - x_i^2].\Delta x_i$; jadi luas daerah tsb sama dengan



$$L = \int_0^1 [x - x^2]dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Latihan

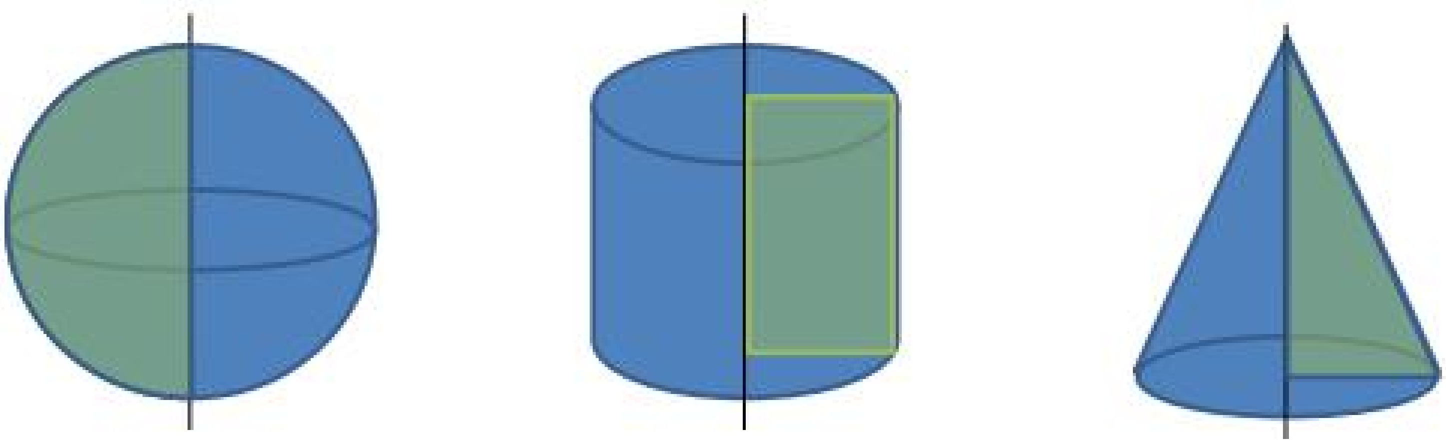
Tentukan luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva-kurva:

1. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. $y = x$ dan $y = x^3$.
3. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, dan $x = 0$.
4. $x = y^2$ dan $y = x - 2$.
5. $x = y^2 - 2y$ dan $x - y = 4$.

[*Petunjuk*: Bila dianggap lebih memudahkan, iris daerahnya secara horisontal!]

Benda Putar

Benda pejal seperti **bola**, **tabung lingkaran**, dan **kerucut** merupakan contoh *benda putar*, yang dapat diperoleh dengan memutar daerah setengah lingkaran, persegipanjang, dan segitiga terhadap *sumbu putar* yang berimpit dengan salah satu sisi daerah tsb.



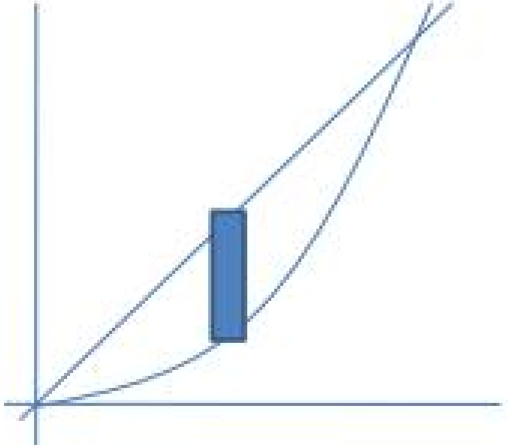
Menghitung Volume Benda Putar: Metode Cakram/Cincin

Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-x, dan kita ingin menghitung volume benda putar yang terbentuk. Kita iris dan taksir volume cincin yang terbentuk, yaitu $\Delta V_i \approx \pi[x_i^2 - x_i^4].\Delta x_i$.

Jadi, volume benda putar yang terbentuk adalah

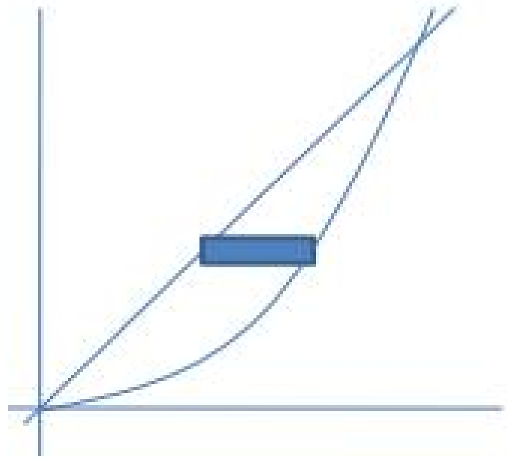
$$V = \pi\int_0^1 [x^2 - x^4]dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{2\pi}{15}.$$



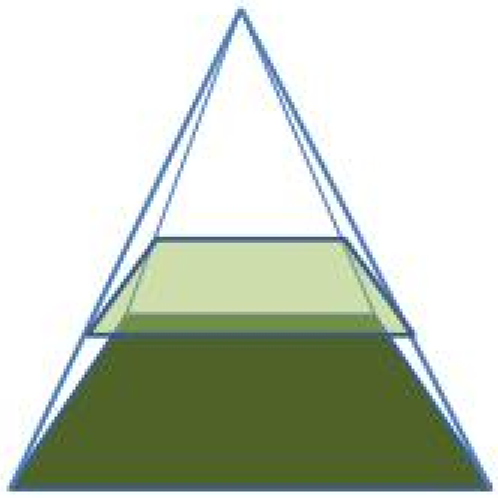
Menghitung Volume Benda Putar: Metode Cakram/Cincin

Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-y. Irislah secara mendatar, taksir volumenya, dan integralkan!



Benda dengan Penampang Tertentu

Piramida bukan benda putar, tetapi ia mempunyai penampang mendatar yang sama, berbentuk persegi.



Volumenya dapat dihitung dengan mengiris piramida tsb secara mendatar, menaksir volume tiap irisannya, lalu mengintegralkannya.

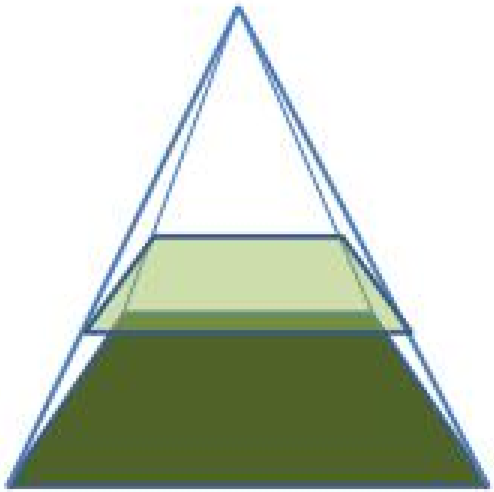
Metode Irisan Sejajar

Bila panjang sisi alas = S dan tinggi piramida = T, maka volume irisan mendatar pada ketinggian t sama dengan

$\Delta V \approx (St/T)^2.\Delta t$;

jadi volume piramida tsb sama dengan

$$V = \frac{S^2}{T^2}\int_0^T t^2 dt = \frac{S^2 T}{3}.$$



Contoh Lainnya

Alas sebuah benda berbentuk setengah lingkaran berjari-jari 1. Misalkan penampang benda tsb yang tegak lurus terhadap sisi setengah lingkaran (yang merupakan diameter) berbentuk persegi. Tentukan volume benda tsb. (Buat sketsa benda tsb terlebih dahulu!)

Latihan

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$ diputar mengelilingi:
   a. sumbu-x
   b. garis $x = 1$
   c. sumbu-y
   d. garis $y = 1$.
2. Alas sebuah benda berbentuk lingkaran berjari-jari 1. Misalkan semua penampang benda tsb yang tegak lurus terhadap suatu diameter berbentuk persegi. Tentukan volume benda tsb.

Sasaran Kuliah Hari Ini

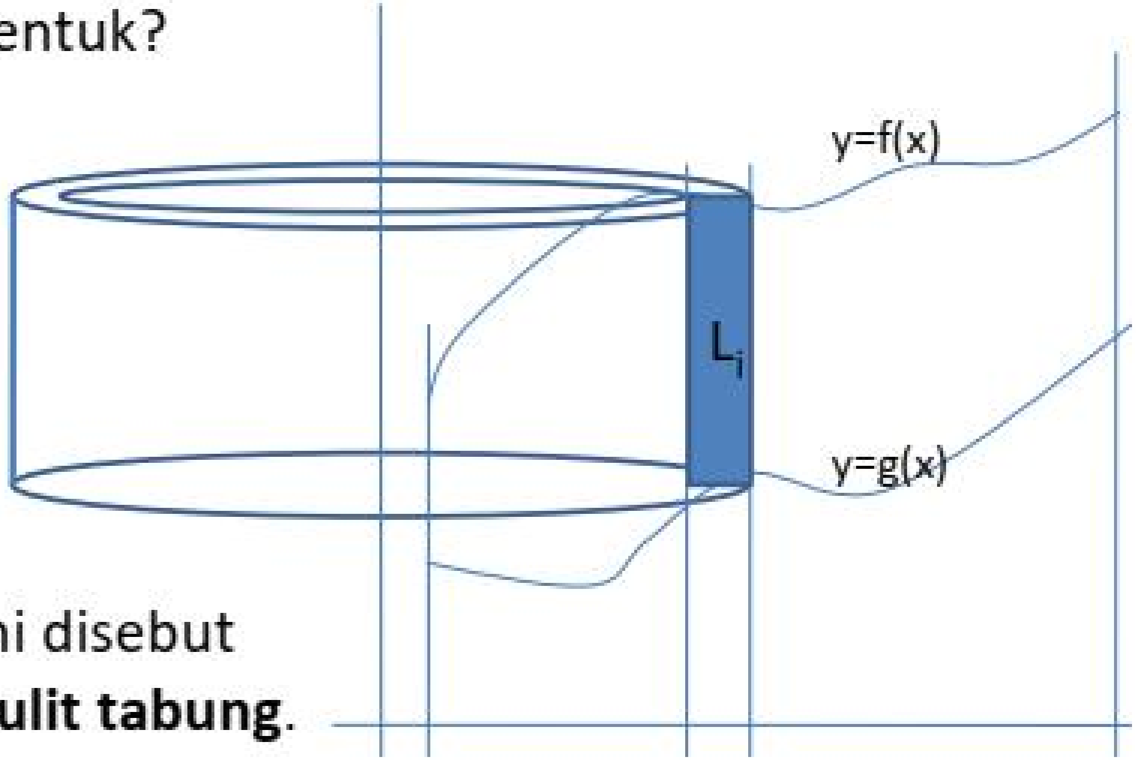
5.3 Volume Benda Putar: Metode Kulit Tabung

Menghitung volume benda putar dengan metode kulit tabung.

5.4 Kerja dan Gaya Fluida

Menghitung kerja yang dilakukan oleh suatu gaya (sebagai suatu integral tentu).

Misalkan daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x) dan y = g(x) diputar mengelilingi sumbu-y. Berapakah volume benda putar yang terbentuk?



Metode ini disebut **metode kulit tabung**.

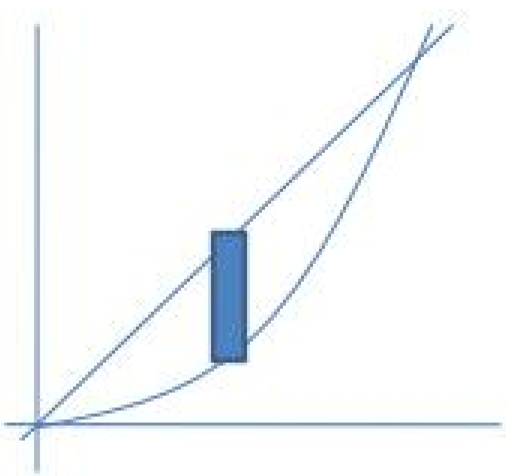
$$\Delta V_i \approx 2\pi x_i[f(x_i) - g(x_i)].\Delta x_i$$

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Contoh

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-y.

Jawab: Volume irisan sama dengan $\Delta V_i \approx 2\pi x_i.[x_i - x_i^2].\Delta x_i$; jadi volume benda putar yang terbentuk sama dengan



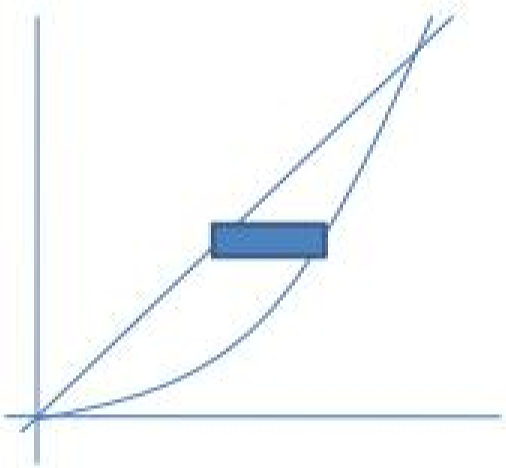
$$V = 2\pi \int_0^1 [x^2 - x^3]dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Contoh

2. Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah *tertutup* yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu-x.

<u>Jawab</u>: Volume irisan sama dengan $\Delta V_i \approx 2\pi y_i.[\sqrt{y_i} - y_i].\Delta y_i$; jadi volume benda putar yang terbentuk sama dengan



$$V = 2\pi \int_0^1 [y\sqrt{y} - y^2]dy = \ldots$$

Latihan

Tentukan volume benda yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut diputar mengelilingi sumbu-y:

1. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, dan $x = 0$.

Tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva

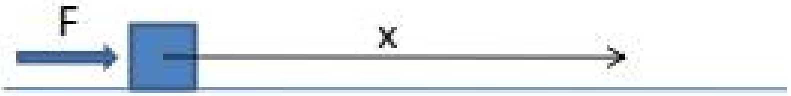
3. $x = y^2 - 2y$ dan $x - y = 4$

diputar mengelilingi garis $y = -1$.

Kerja yang Dilakukan oleh Suatu Gaya

Jika sebuah benda berpindah sejauh x akibat terkena gaya konstan sebesar F (yang searah dengan gerakan benda tsb), maka **kerja yang dilakukan oleh gaya tsb** adalah

$$W = F.x$$



dengan W = kerja, F = gaya, dan x = perpindahan.

Kerja yang Dilakukan oleh Suatu Gaya

Dalam banyak kasus, $F = F(x)$ tidak konstan.

Untuk menghitung kerja yang dilakukannya, kita gunakan proses pengintegralan: iris, taksir, jumlahkan dan ambil limitnya (integralkan).

Pada selang bagian ke-i: $\Delta W_i \approx F(x_i).\Delta x_i$.

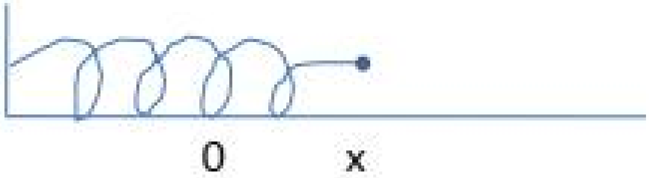
Jadi, kerja yang dilakukan untuk memindahkan benda dari posisi $x = a$ ke $x = b$ sama dengan

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Kerja pada Pegas

Menurut **Hukum Hooke**, gaya $F(x)$ yang diperlukan untuk menahan pegas pada posisi x satuan panjang dari posisi alaminya sebanding dengan x, yakni

$$F(x) = kx,$$



dengan k = **konstanta pegas** tsb.

Contoh

Panjang alami suatu pegas adalah 0.2 m. Jika diperlukan gaya 12 N untuk menarik dan menahannya sejauh 0.04 m, hitunglah kerja yang dilakukan untuk menarik pegas tsb sejauh 0.1 m dari panjang alaminya.

<u>Jawab</u>: Dari persamaan $12 = k(0.04)$, kita peroleh konstanta pegas $k = 300$.

Kerja yang dilakukan untuk menarik pegas tsb sejauh 0.1 m dari panjang alaminya adalah

$$W = \int_0^{0.1} 300x\,dx = 150x^2\Big|_0^{0.1} = 1.5 \text{ joule.}$$

Kerja untuk Memindahkan Fluida

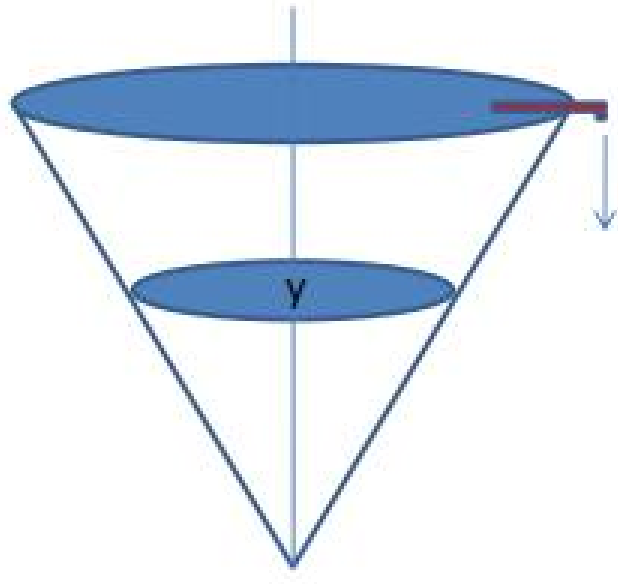
Diketahui sebuah tangki berbentuk kerucut terbalik, dengan alas 10 dm dan tinggi 10 dm, penuh berisi air.

Tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki, melalui tepi atas tangki.

<u>Jawab</u>: $$\Delta V \approx \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Delta y$$

$$\Delta F \approx \delta\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Delta y$$

$$\Delta W \approx \delta\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 (10-y)\Delta y$$



Jadi, kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki, melalui tepi atas tangki adalah

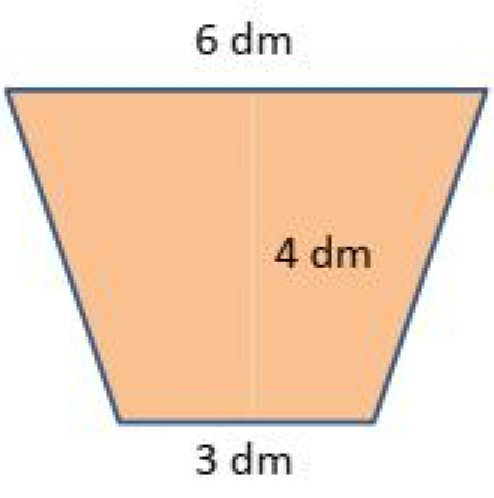
$$W = \frac{\delta\pi}{4}\int_0^{10} y^2(10-y)\,dy$$

$$= \frac{\delta\pi}{4}\left[10\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{10}$$

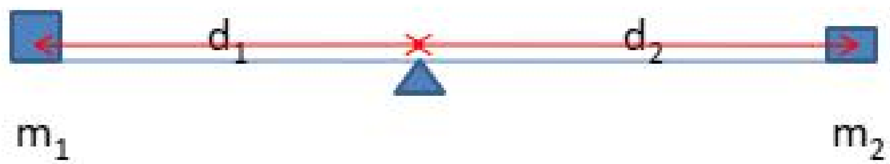
$$= \frac{\delta\pi}{4}\frac{10^4}{12} = \frac{625\delta\pi}{3} \quad \text{Joule.}$$

Latihan

1. Panjang alami suatu pegas adalah 0.08 m. Gaya sebesar 0.6 N diperlukan untuk menekan dan menahannya pada panjang 0.07 m. Tentukan kerja yang dilakukan untuk menekan dan menahan pegas tsb pada panjang 0.06 m.
2. Tentukan kerja yang dilakukan untuk memompa seluruh air keluar dari tangki dengan penampang spt pada gambar di samping. Panjang tangki tsb = 10 dm ke belakang.



Distribusi Massa Diskrit pada Garis



Jungkit di atas seimbang bila $d_1m_1 = d_2m_2$ ... (*).

Bila kita letakkan jungkit tsb pada garis bilangan real sehingga titik tumpunya berimpit dengan 0, maka persamaan (*) menjadi:

$$x_1m_1 + x_2m_2 = 0 \qquad \text{... (\#).}$$

Hasil kali massa dari suatu partikel dan jaraknya (berarah) dari suatu titik acuan disebut **momen** partikel terhadap titik acuan tsb.

Persamaan (#) menyatakan bahwa **momen total** terhadap titik tumpunya sama dengan 0.

Momen

Situasi tadi dapat diperumum sbb. Sistem massa $m_1, \dots, m_n$ yang tersebar di posisi $x_1, \dots, x_n$ pada garis bilangan real mempunyai momen (total)

$$M = \sum_i x_i m_i.$$

Sistem tsb akan seimbang di titik tumpunya (yang berimpit dengan 0) bila $M = 0$.

Secara umum, suatu sistem massa akan seimbang di suatu titik, tidak harus di 0. Tetapi bagaimana mencari titik keseimbangan tsb?

Pusat Massa

Misalkan titik **pusat massa**-nya adalah x*. Maka, momen total terhadap x* haruslah sama dengan 0, yakni:

$$\sum_i (x_i - x^*)m_i = 0.$$

Dari sini kita dapatkan bahwa:

$$\sum_i x_i m_i = x^* \sum_i m_i,$$

sehingga mestilah

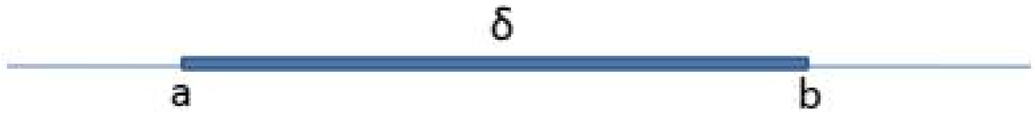
$$x^* = \sum_i x_i m_i / \sum_i m_i = M/m,$$

dengan M = momen total terhadap 0 dan

m = **massa total**.

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Sekarang misalkan kita mempunyai seutas kawat lurus yang menempati selang [a, b] pada garis bilangan real.

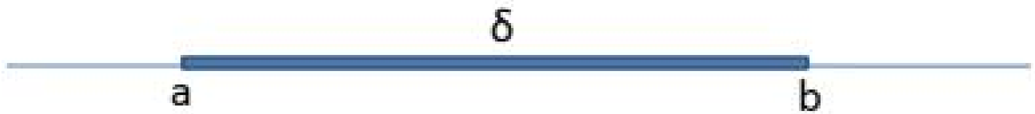


Bila rapat massanya (δ) konstan, maka massa kawat tsb mudah dihitung – kita hanya perlu mengalikan rapat massa kawat tsb dengan panjangnya: $m = \delta(b - a)$.

Bagaimana bila rapat massanya tidak konstan?

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Bila rapat massanya tidak konstan, $\delta = \delta(x)$, maka kita perlu meng**integral**kannya:



Massa irisan: $\Delta m \approx \delta(x)\Delta x$.

Momen irisan (thd 0): $\Delta M \approx x\,\delta(x)\Delta x$.

Jadi, massa kawat: $m = \int_a^b \delta(x)dx.$

dan momen (thd 0): $M = \int_a^b x\delta(x)dx.$

Pusat Massa

Jadi, pusat massa kawat tsb terletak di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Contoh

Diketahui kawat sepanjang 25 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = \sqrt{x}$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

Jawab: Misal titik ujung kiri = 0 . Massa kawat tsb adalah

$$m = \int_0^{25} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\Big|_0^{25} = \frac{250}{3} gr.$$

Momen kawat tsb terhadap 0 adalah

$$M = \int_0^{25} x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x}\Big|_0^{25} = 1250 gr.cm.$$

Contoh (berlanjut)

Jadi pusat massanya ada di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{1250}{250/3} = 15cm$$

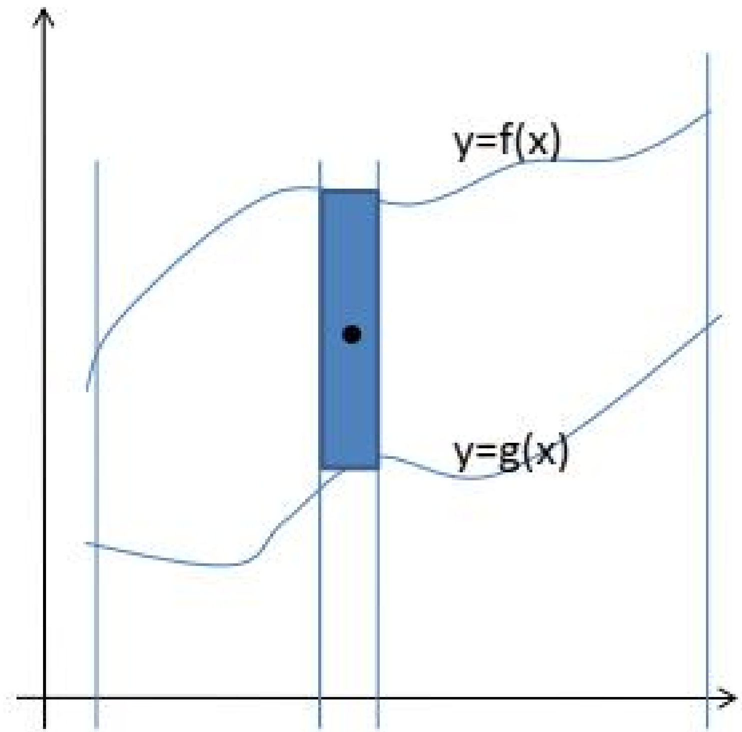
dari titik ujung kiri kawat tsb.

Latihan

Diketahui kawat sepanjang 10 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = x$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

Distribusi Massa (Kontinu) pada Bidang

Misal kita mempunyai sebuah **lamina** (keping datar) dengan rapat massa δ konstan, yang menempati daerah pada bidang yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$ serta kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$.



$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_y \approx \delta x[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_x \approx ½\delta[f(x)^2 - g(x)^2].\Delta x$

Momen dan Pusat Massa Lamina

Dari taksiran irisan tadi, kita peroleh

Massa: $$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-y: $$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-x: $$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

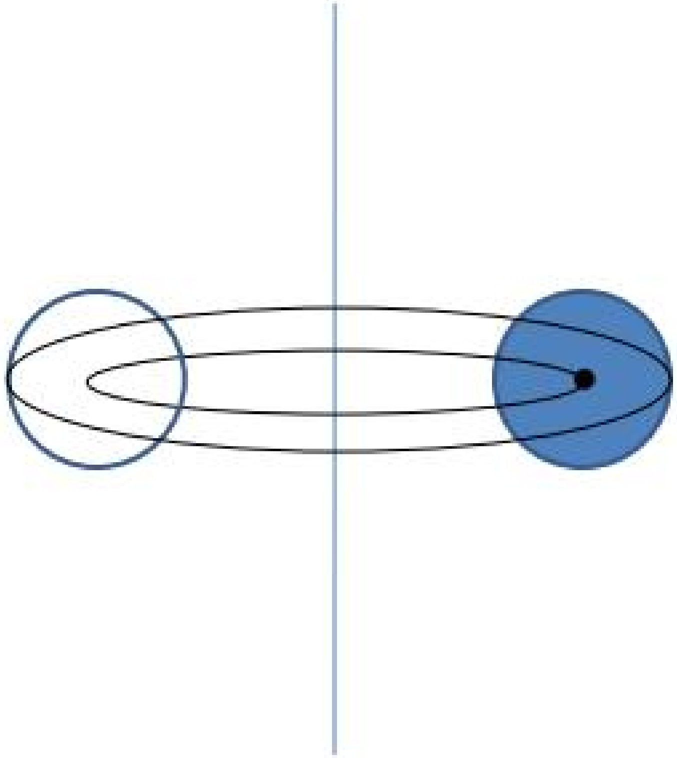
Pusat massa: $$x^* = \frac{M_y}{m}; y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Contoh

Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$. [Gambar terlebih dahulu daerah lamina tsb.]

Teorema Pappus

Jika suatu daerah R pada bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang tsb yang tidak memotong R, maka volume benda putar yang terbentuk sama dengan luas daerah R kali keliling lingkaran yang ditempuh oleh pusat massa R.



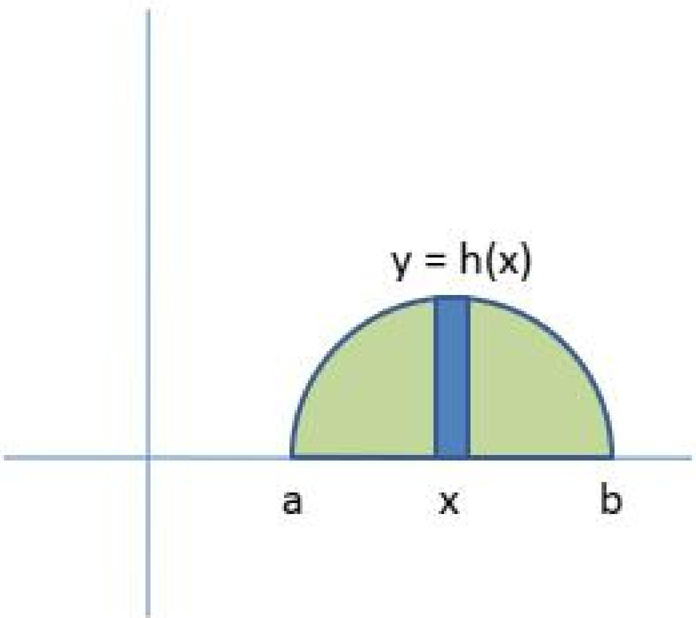
Mengapa Teorema Pappus Berlaku

Perhatikan gambar di bawah. Dengan metode kulit tabung, kita peroleh:

$$V = 2\pi \int_a^b x h(x)\,dx$$

$$x^* = \frac{\int_a^b x h(x)\,dx}{\int_a^b h(x)\,dx}$$

$$V = 2\pi x^* \int_a^b h(x)\,dx.$$



Contoh

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi garis $y = 3$. Tentukan volume bendar putar yang terbentuk.

Latihan

1. Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. Menggunakan Teorema Pappus, tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah pada Soal 1 diputar mengelilingi garis $y = -x$.

Sekian dan Terima Kasih

- Seluruh materi presentasi di dapatkan dari website perkuliahan Prof. Hendra Gunawan