BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sejarah *Operation Research*

Menurut teori evolusi manajemen, *Operation Research* sebagai suatu bagian dari ilmu pengetahuan mulai berkembang saat Perang Dunia ke II. Istilah *operation research* pertama kali dikenal pada tahun 1940 oleh Mc. Closky dan Trefthen di Browdsey Inggris.

Pada awal perang ditahun 1939, pemimpin militer Inggris memanggil sekelompok ahli dari berbagai disiplin ilmu dan mengoordinasi mereka untuk mengatasi persoalan optimasi *resources* mereka yang terbatas. Dengan ditemukan alat pendeteksi jarak jauh atau radar, mereka mencoba untuk mendeteksi serangan dari jerman. Dan dengan bantuan *operation research method*, persenjataan inggris yang saat itu masih sangat jauh ketinggalan dari segi teknologi maupun jumlah akan dapat digunakan secara optimal untuk berbagai medan dan tipe pertempuran [1].

Keberhasilan yang diperoleh angkatan perang Inggris ini mendorong angkatan perang Amerika untuk membentuk *team operation research*. Mereka menggunakan *operation research* untuk memecahkan berbagai persoalan diantaranya persoalan logistik suplai barang keperluan perang, menentukan pola-pola dasar penerbangan yang lebih efisien, dan menentukan pola-pola dasar jaringan operasi alat-alat elektronik.

Setelah perang dunia II berakhir, akibat keberhasilan perang tersebut telah menarik perhatian orang-orang terutama dibidang industri. Berkat bantuan *operation research method* ini hasil yang didapat sangat memuaskan. Penggunaan sumber daya menjadi minimal dan keuntungan yang didapat menjadi maksimal.

2.2 *Operation research*

Perkembangan Riset operasi (*operation research*) sangat pesat sehingga kini telah dikembangkan dan digunakan dalam hampir setiap kegiatan, baik di perguruan tinggi, rumah sakit, konsultan, perencanaan kota, dan dibidang- bidang bisnis seperti optimalisasi biaya operasional perusahaan dan lain-lain.

Ada banyak pendapat tentang definisi riset operasi (*operation research*) oleh pakar dalam bidang riset operasi (*operation research*). Yang pertama adalah Morse dan Kimbal yang mendefinisikan riset operasi sebagai "metode ilmiah yang memungkinkan para manajer atau praktisi bisnis untuk mengambil keputusan mengenai aktivitas bisnis mereka" [2].

Yang kedua adalah Miller dan M. K. Star yang mendefinisikan riset operasi (*operation reserch*) sebagai "peralatan menejemen yang menyatukan matematika dan logika dalam kerangka pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari, sehingga permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal" [3].

Ketiga adalah Churchman, Ackoff, dna Arnoff yang mendefinisikan riset operasi sebagai penerapan metode- metode, teknik- teknik, dan alat- alat terhadap masalah- masalah yang menyangkut operasi- operasi dari sistem- sistem, sedemikian rupa sehingga memberikan penyelesaian optimal [4].

Keempat adalah Hamdi A. Taha yang mendefinisikan riset operasi sebagai pendekatan dalam pengambilan keputusan yang ditandai dengan penggunaan pengetahuan ilmiah melalui usaha kelompok antar disiplin yang bertujuan menentukan penggunaan terbaik sumber daya yang terbatas [4].

2.3 Masalah Transportasi

Masalah transportasi merupakan model khusus masalah pemprograman linear dan cara penyelesaiannya dapat dilakukan menggunakan metode simplek atau dengan menggunakan teknik-teknik khusus seperti disebut dengan transportaition teknik yang penyelesaiannya lebih efisien. Transportasi didefinisikan sebagai perpindahan barang atau jasa dari suatu tempat ketempat lain [7].

Masalah transportasi membahas tentang pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (*supply*) kepada sejumlah tujuan (*destination, demand*), dengan tujuan meminimumkan ongkos pengangkutan.

Ciri-ciri khusus persoalan transportasi:

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu.
2. Kunatitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan, besarnya tertentu.
3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber.
4. Ongkos pengangkutan komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya tertentu [2].

Masalah transportasi khususnya di perusahaan terjadi karena keterbatasan sumber daya atau keterbatasan kapasitas perusahaan dalam proses distribusi dari beberapa tempat asal ketempat tujuan. Penyelesaian masalah transportasi dimaksudkan untuk mengoptimalkan biaya transportasi.

2.3.1 Model Transportasi

Model adalah gambaran sederhana dari sebuah kasus yang dapat membantu agar berpikir secara sistematis dan cepat untuk memahami suatu kasus. Model transportasi menggunakan sarana sebuah matriks untuk memberikan gambaran mengenai kasus distribusi [1].

Sebuah matriks transportasi memiliki m baris dan n kolom. Dimana:

X_{ij} : Satuan barang yang akan diangkut dari sumber i ke tujuan j.

b_{ij} : Biaya angkut persatuan barang dari sumber i ke tujuan j.

Sehingga secara matemais,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_{ij}$$

kendala

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, m$

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = T_j$, untuk $j = 1, 2, \cdots, n$

di mana $X_{ij} \geq 0$

Tabel 2.1 Tabel Transportasi

SUMBER	TUJUAN				Kapasitas Sumber
	T_1	T_2	$\cdots$	T_n	
S_1	b_{11} X_{11}	b_{12} X_{12}	$\cdots$	b_{1n} X_{1n}	s_1
S_2	b_{21} X_{21}	b_{22} X_{22}	$\cdots$	b_{1n} X_{2n}	s_2
S_m	b_{31} X_{m1}	b_{32} X_{m2}	$\cdots$	b_{mn} X_{mn}	s_m
Kebutuhan tujuan	t_1	t_2	$\cdots$	t_n	$\sum s_i$ $\sum t_j$

Keterangan tabel :

s_i = Persediaan ke-i

t_j = Permintaan ke-j

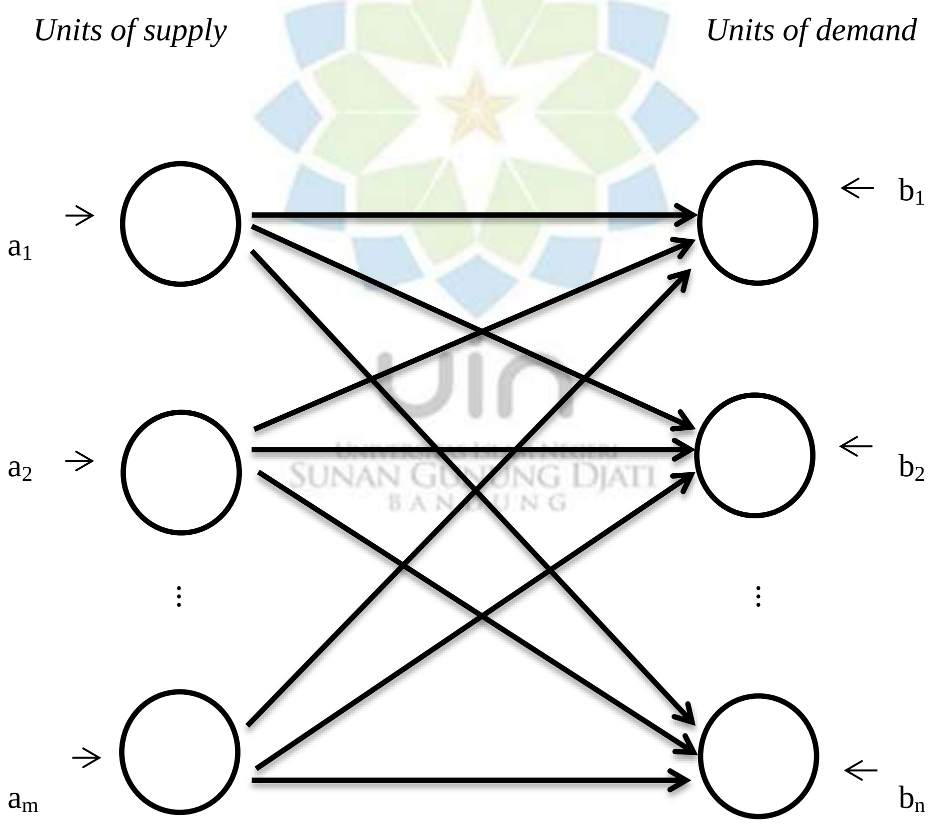
b_{ij} = Biaya

X_{ij} = Jumlah barang

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

Asumsi dasar dari model transportasi yaitu besar ongkos transportasi pada rute adalah proporsional dengan jumlah barang yang di distribusikan.deskripsi model transportasi dalam bentuk jaringan dari n tempat asal ke m tempat tujuan yang dihambarkan dengan node seperti pada Gambar 1. Dari tempat asal ke tempat tujuan dihubungkan dengan rute yang membawa komoditi, dimana besar supply di sumber i adalah s_i dan kebutuhan/ tujuan (*demand*) ditempat tujuan j adalah t_j, banyaknya komoditi yang didistribusi dari tempat asal i ke tempat tujuan j adalah X_{ij}. Dan biaya transportasi dari tempat asal i ke tempat tujuan j adalah b_{ij} [7].



Gambar 2.1 model transportasi dari sumber ke tujuan

Distribusi optimal didalam model transpotasi adalah distribusi barang dari sumber-sumber untuk memenuhi permintaan tujuan agar biaya total distribusi minimum [1].

2.3.2 Masalah Keseimbangan Permintaan dan Penawaran

Dalam model transportasi ada beberapa kemungkinan kemampuan sumber-sumber untuk melayani atau $\sum s_i$ belum tentu sama dengan tingkat permintaan tujuan-tujuan untuk dipenuhi atau $\sum t_j$, yaitu:

1. Masalah transportasi seimbang ($\sum s_i = \sum t_j$)

   Kemungkinan pertama ini akan terjadi bila seluruh kapasitas permintaan untuk mengirim barang sama persis dengan seluruh permintaan tujuan. Dalam kasus ini seluruh kemampuan sumber-sumber untuk melayani permintaan tepat digunakan seluruhnya dan seluruh permintaan tujuan-tujuan tepat terpenuhi.

   Minimasi $C = \sum_{i=j}^{m} \sum_{i=j}^{n} b_{ij} X_{ij}$

   kendala

   $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, m$

   $\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = T_j$, untuk $j = 1, 2, \cdots, n$

   di mana $X_{ij} \geq 0$

   $$\therefore \sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

2. Masalah transportasi tidak seimbang Permintaan lebih besar dari persediaan ($\sum s_i \leq \sum t_j$)

   Kemungkinan kedua akan terjadi apabila seluruh kapasitas permintaan tidak mungkin dipenuhi oleh seluruh sumber-sumber yang tersedia. Dalam kasus ini akan permintaan dari satu atau lebih tujuan yang akan dipenuhi sebagian atau tidak dipenuhi sama sekali.

   Minimasi $C = \sum_{i=j}^{m} \sum_{i=j}^{n} b_{ij} X_{ij}$

kendala

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, m$

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = T_j$, untuk $j = 1, 2, \cdots, n$

di mana $X_{ij} \geq 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} t_j$$

$j = n + 1$ adalah tujuan fiktif dengan permintaan

$t_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} t_j - \sum_{=1}^{m} s_i$ dan $b_{m+1.j} = 0, j = 1,2, \cdots, n$

Penyelesaian masalah ini perlu dikembangkan dengan menambah satu baris tambahan yang disebut permintaan semu atau dummy suppliet (As) dengan ongkos $b_{ij} = 0$.

3. Masalah transportasi tidak seimbang persediaan lebih besar dari pada permintaan ($\sum s_i \geq \sum t_j$)

Kemungkinan ketiga terjadi apabila seluruh kemampuan sumber-sumber untuk mengirim barang melampaui permintaan yang ada. Dalam kasus ini satu atau lebih sumber munngkin hanya akan mengirim barang sebagian atau tidak mengirim sama sekali.

Minimasi $C = \sum_{i=j}^{m} \sum_{i=j}^{n} b_{ij} X_{ij}$

kendala

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$, untuk $i = 1, 2, \cdots, m$

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = T_j$, untuk $j = 1, 2, \cdots, n$

di mana $X_{ij} \geq 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} t_j$$

$j = n + 1$ adalah tujuan fiktif dengan permintaan

$t_{n+1} = \sum_{=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} t_j$ dan $b_{i.m+1} = 0, i = 1,2,\cdots,m$

Penyelesaian masalah ini perlu dikembangkan dengan menambah satu kolom tambahan yang disebut tujuan semu atau dummy destination (Ts) dengan ongkos $b_{ij} = 0$.

2.4 Solusi Layak Awal Masalah Transportasi

Dalam menyelesaikan masalah transportasi yang pertama adalah menentukan solusi layak awal yang memenuhi semua kendala atau sistem transportasi yang diperlukan. Setelah menemukan solusi layak awal maka dapat dicari solusi optimal yaitu solusi yang meminimumkan biaya transportasi. Optimalisasi biaya transportasi bisa diselesaikan dengan mengalokasikan beberapa produk menggunakan metode penyelesaian, berikut terdapat beberapa metode penyelesain masalah transportasi diantaranya:

2.4.1 Metode NWC (*North West Corner*/ Sudut Barat Laut)

Metode NWC (*north west corner*/ sudut barat laut) dikenalkan oleh Charnes dan Cooper, kemudian dikembangkan oleh Danzig [6].

Metode NWC (*north west corner*/ sudut barat laut) adalah sebuah metode untuk menyusun tabel awal dengan cara mengalokasikan distribusi barang mulai dari sel yang terletak pada sudut paling kiri atas tabel atau dimulai dari sel yang terletak pada kolom dan baris pertama. Hasil dari optimalisasi metode ini tidak maksimal karena alokasinya tidak memperhatikan biaya transportasi.

Langkah-langkah penyelesaian masalah transportasi dengan menggunakan metode north west corner sebagai berikut (Mulyono, 1999: 118):

1. Mulai dari sudut kiri atas tabel dan alokasikan pada X_{11}, tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan.

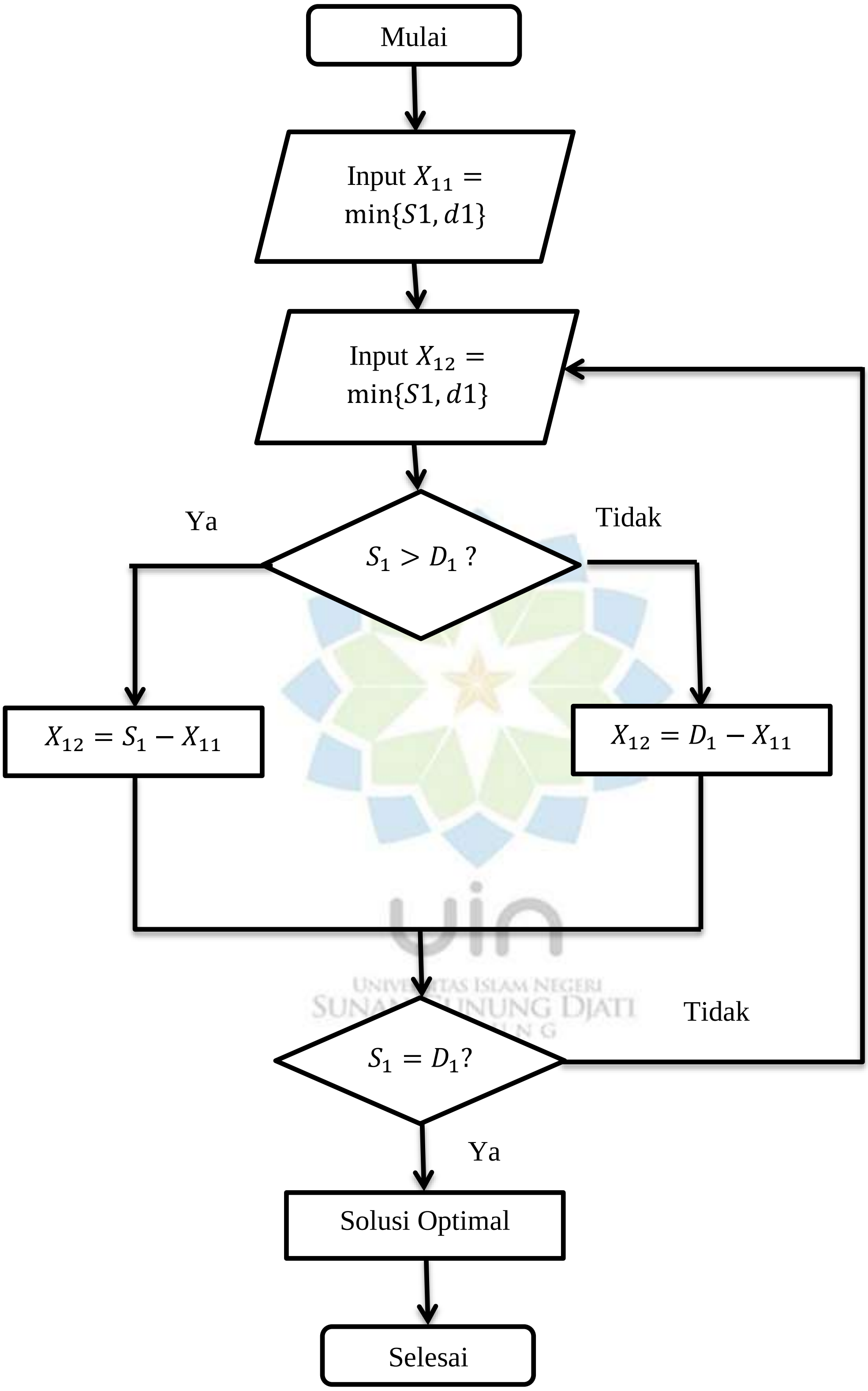
Contoh: $X_{11} = \min\{S1, d1\}$

2. Ini akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin ke kotak didekatnya pada baris atau kolom yang tidak dihilangkan. Jika baik kolom maupun baris telah dihabiskan, pindahlah kekotak berikutnya.

   Contoh: bila $S_1 > D_1$ maka $X_{11} + X_{21} = S_1, X_{12} = S_1 X_{11}$, bila $S_1 < D_1$ maka $X_{11} + X_{21} = D_1, X_{21} = D_1 - X_{11}$

3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah terpenuhi.

Untuk lebih jelas dalam memahami metode NWC maka disajikan flowchartnya sebagai berikut:



Gambar 2.2 flowchart metode north west corner [10].

Adapun contoh penyelesaian solusi layak awal dengan dengan menggunakan metode NWC yaitu sebagai berikut:

Misal diberikan tabel matriks transportasi sebagai berikut;

Tabel 2.2 contoh soal masalah transportasi

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Langkah- langkah penyelesaian dengan menggunakan metode NWC

Keterangan : Kolom yang terpenuhi

1. Distribusikan barang ke sel paling kiri atas yaitu sel X_{11}

Tabel 2.3 langkah pertama metode aproksimasi north west corner

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Sel 11, menurut metode NWC harus memperoleh alokasi terlebih dahulu karena terletak paling kiri atas. Di sel ini seluruh kemampuan yogyakarta didistribusikan ke purwokerto. Namun permintaan purwokerto belum terpenuhi semua karena yogyakarta hanya bisa mendistribukan sebanyak 4000 kg.

2. Alokasikan barang ke sel X_{21}, sel paling kiri atas setelah sel X_{11}

Tabel 2.4 langkah kedua metode aproksimasi north west corner

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	**5000**	4500	5500	15000

Sel 21 menjadi sel yang terletak paling kiri setelah sel 11. Alokasi maksimum di sel 21 adalah 1000 kg, yaitu sesuai dengan permintaan maksimum purwokerto sebanyak 5000 kg.

3. Alokasikan ke sel X_{22}, sel paling kiri atas setelah sel X_{11} dan sel X_{21}

Tabel 2.5 langkah ketiga metode north west corner

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	**5000**	4500	5500	15000

Di sel yang terletak paling kiri atas setelah alokasi distribusi tidak mungkin lagi dilakukan pada baris dan kolom pertama adalah sel 22. Di sel ini dialokasikan distribusi maksimum sebanyak 4000 kg, yaitu sesuai dengan kemampuan maksimum magelang sebanyak 5000 kg.

4. Alokasikan barang ke sel X_{32}, sel paling kiri atas setelah sel X_{11}, X_{21}, dan X_{22}.

Tabel 2.6 langkah ke empat metode north west corner

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	**5000**
Surakarta	X_{31} 5	500 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	**5000**	**4500**	5500	15000

Setelah alokasi distribusi tidak mungkin lagi dilakukan pada baris pertama dan kedua serta kolom pertama, maka sel 32 berada pada posisi kiri atas. Oleh karena itu, alokasikan sebanyak 500 kg agar permintaan semarang sebesar 4500 kg terpenuhi.

5. Karena sel X_{33} satu-satunya yang belum terpenuhi, maka alokasikan semua kapasitas sisa ke sel X_{33}.

Tabel 2.7 langkah ke lima metode north west corner

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	**5000**
Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	**6000**
Kebutuhan tujuan	**5000**	**4500**	**5500**	15000

Sel 33 merupakan satu- satunya pilihan alokasi distribusi yang akan membuat sisa kapasitas surakarta digunakan seluruhnya untuk memenuhi permintaan madiun sebanyak 5500 kg.

Biaya distribusi berdasarkan alokasi beban distribusi menurut metode NWC adalah:

Tabel 2.8 biaya distribusi metode aproksimasi north west corner

Sel	Biaya × beban	Biaya
(1, 1)	4,- × 4000	16.000,-
(2, 1)	6,- × 1000	6.000,-
(2, 3)	3,- × 4000	12.000,-
(3, 2)	2,- × 500	1.000,-
(3, 3)	3,- × 5500	16.500,-
	Total	51.500,-

Jadi, biaya minimal solusi layak awal denga metode NWC adalah Rp. 51.500,-

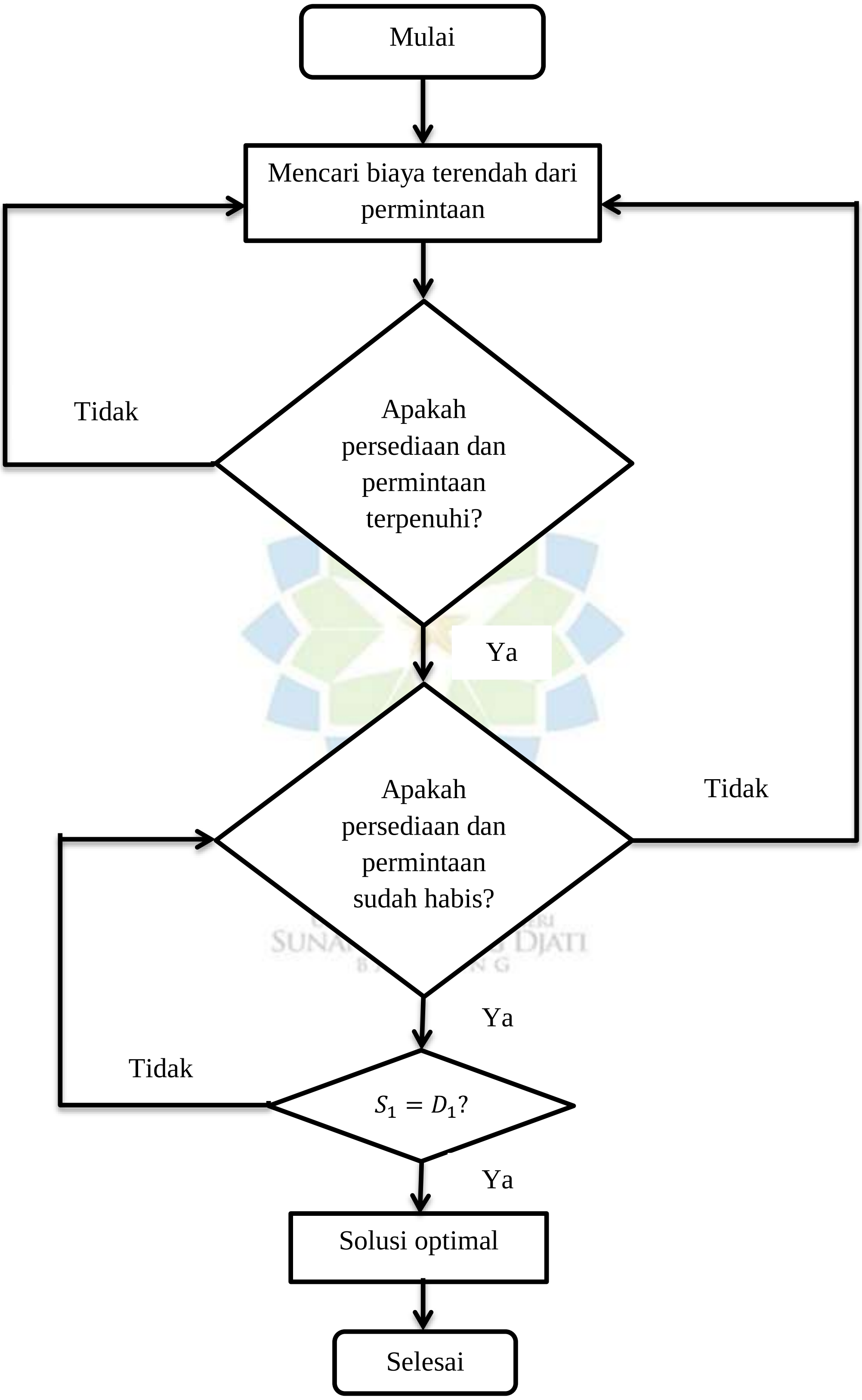
2.4.2 Metode Biaya Terkecil (*Least Cost Method*)

Metode biaya terkecil (*least cost method*) adalah sebuah metode untuk menyusun tabel awal dengan cara pengalokasian distribusi barang dari sumber ke tujuan mulai dari sel yang memiliki biaya distribusi terkecil.

Langkah-langkah penyelesaian masalah transportasi dengan menggunakan metode least cost sebagai berikut:

1. Pilih variabel X_{ij} dengan biaya transport b_{ij} terkecil dan dialokasikan sebanyak mungkin.
2. Dari variabel-variabel X_{ij} sisanya yang layak (yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan), pilih b_{ij} terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
3. Lanjutkan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

Untuk lebih jelas dalam memahami metode least cost maka disajikan flowchartnya sebagai berikut:



Gambar 2.3 flowchart metode least cost

Adapun contoh penyelesaian solusi layak awal dengan dengan menggunakan metode biaya terkecil yaitu sebagai berikut:

Misal diberikan tabel matriks transportasi sebagai berikut;

Tabel 2.9 contoh soal masalah transportasi

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Langkah- langkah penyelesaian dengan menggunakan metode biaya terkecil

Keterangan : Kolom yang terpenuhi

1. Tabel awal dengan metode biaya terkecil, $X_{32} = 2$ adalah biaya terkecil

Tabel 2.10 langkah pertama metode aproksimasi least cost

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	**4500**	5500	15000

Sel matriks 32 (baris=3, kolom=2) yang menunjukan distribusi barang dari surakarta kesemarang memiliki biaya distribusi terkecil, yaitu Rp. 2,- per kg. Oleh karena itu harus dialokasikan distribusi barang sesuai dengan permintaan semarang ke sel tersebut, sebesar 4500 kg. Karena agen surakarta mampu memenuhi permintaan itu bahkan masih memiliki kapasitas sisa, maka permintaan di Semarang seluruhnya di penuhi oleh agen Surakarta.

2. Tabel awal dengan metode biaya terkecil, $X_{33} = 3$ adalah biaya terkecil setelah $X_{32} = 2$ terpenuhi

Tabel 2.11 langkah ke dua metode aproksimasi least cost

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	**6000**
Kebutuhan tujuan	5000	**4500**	5500	15000

Sel 33 adalah sel yang memliki biaya terkecil yaitu Rp. 3,- setelah sel 32. Sel ini berada pada kolom permintaan madiun sebesar 5500 kg dan berkaitan dengan kemamuan agen surakartayang memiliki sisa kapasitas sebesar 1500 kg. Oleh karena itu sisa permintaan ini digunakan untuk memenuhi sebagian permintaan madiun.

3. Tabel awal dengan metode biaya terkecil, $X_{11} = 4$ adalah biaya terkecil setelah $X_{32} = 2$ dan $X_{33} = 3$ terpenuhi.

Tabel 2.12 langkah ke tiga metode aproksimasi least cost

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwokerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	4500 2	1500 3	**6000**
Kebutuhan tujuan	**5000**	**4500**	5500	15000

Sel ini berkaitan dengan agen yogyakarta yang memiliki kapasitan 4000 kg dan permintaan purwokerto 5000 kg. Dalam hal ini yogyakarta tidak mungkin memenuhi seluruh permintaan purwokerto, maka permintaan purwokerto dipenuhi oleh yogyakarta 4000 kg dan magelang 1000 kg.

4. Tabel awal dengan metode biaya terkecil, $X_{23} = 8$

Tabel 2.13 langkah ke empat metode aproksimasi least cost

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwokerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	**4000**
Magelang	1000 6	X_{22} 3	4000 8	**5000**
Surakarta	X_{31} 5	4500 2	1500 3	**6000**
Kebutuhan tujuan	**5000**	**4500**	**5500**	15000

Karena tinggal permintaan madiun yang belum terpenuhi. Satu-satunya alternatif yang bisa memenuhi yaitu magelang. Oleh karena itu sel 23 harus dialokasikan distribusi 4000 kg untuk memenuhi permintaan madiun.

Biaya distribusi berdasarkan alokasi beban distribusi sementara menurt metode biaya terkecil adalah:

Tabel 2.14 biaya transportasi metode aproksimasi least cost

Sel	Biaya × beban	Biaya
(1, 1)	4,- × 4000	16.000,-
(2, 1)	6,- × 1000	6.000,-
(2, 3)	8,- × 4000	32.000,-
(3, 2)	2,- × 4500	9.000,-
(3, 3)	3,- × 1500	4.500,-
	Total	67.500,-

Jadi, biaya minimun solusi layak awal dengan menggunakan metode biaya terkecil adlah Rp. 67.500,-

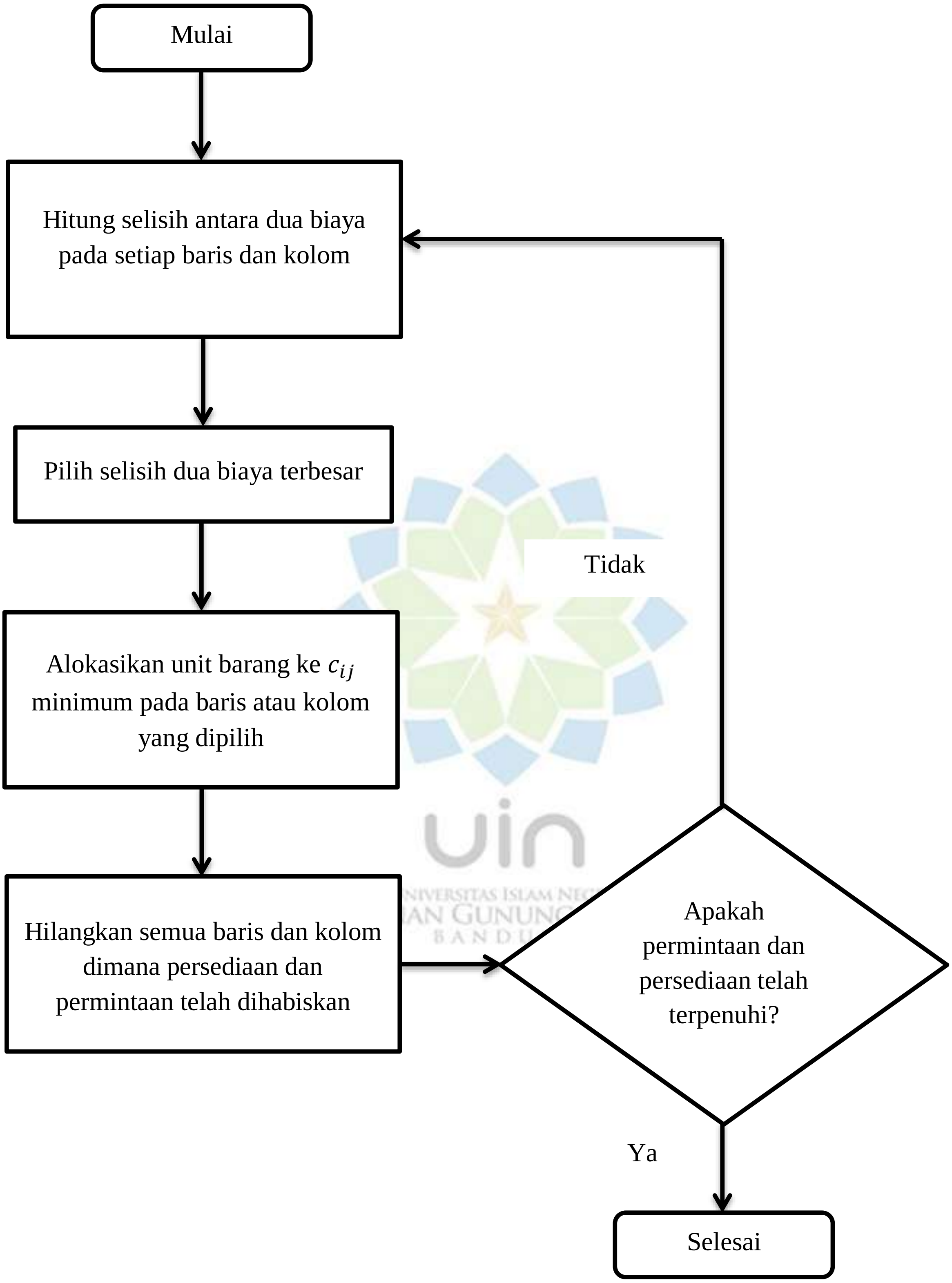
2.4.4 Metode Vogel (*Vogel's Aproximation Method*/ VAM)

Metode vogel adalah metode untuk menentukan alokasi distribusi pada sel dengan mencari selisih atau perbedaan biaya terkecil pertama dan biaya terkecil kedua pada baris dan kolom dan dipilih selisih terbesar.

Metode vogel juga merupakan metode yang lebih mudah dan lebih cepat untuk dapat mengatur alokasi dari beberapa sumber ke beberapa tujuan permintaan. Oleh karena itu, ada beberapa tahap yang harus ditempuh pada setiap alokasi distribusi yaitu sebagai berikut:

1. Atur nilai matriks dari biaya transport dan nilai dari kapasitas setiap sumberdaya kedalam kolom dan baris
2. Temukan dua biaya paling rendah dari setiap baris dan kolom lalu hitung perbedaan dari dua biaya terendah.
3. Temukan satu perbedaan paling besar dari perbedaan antara baris dan kolom.
4. Memilih sel dengan biaya transportasi terendah didalam kolom atau baris yang memiliki nilai terendah yang berbeda lalu alokasikan produk ke dalam sel
5. Ulangi langkah kedua sampai empat, sampai semua produk didistribusikan
6. Apabila alokasi telah sempurna maka hitung biaya distribusi.

Untuk lebih jelas dalam memahami metode aproksimasi Vogel maka disajikan flowchartnya sebagai berikut:



Gambar 2.4 flowchart metode aproksimasi Vogel

Adapun contoh penyelesaian solusi layak awal dengan dengan menggunakan metode biaya terkecil yaitu sebagai berikut:

Misal diberikan tabel matriks transportasi sebagai berikut;

Tabel 2.15 contoh soal masalah transportasi

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Langkah- langkah penyelesaian dengan menggunakan metode biaya terkecil

Keterangan : Kolom yang terpenuhi

Langkah 1. Mencari perbedaan dari dua baiya terkecil, yaitu biaya terkecil dan biaya terkecil kedua untuk setiap baris dan kolom pada matriks.

Baris 1 $\rightarrow 4 - 5 = -1$

Baris 2 $\rightarrow 3 - 6 = -3$

Baris 3 $\rightarrow 2 - 3 = -1$

Kolom 1 $\rightarrow 4 - 5 = -1$

Kolom 2 $\rightarrow 2 - 3 = -1$

Kolom 3 $\rightarrow 3 - 7 = -4$

Langkah 2. Memilih sel yang memiliki nilai negatif terbesar dari perhitungan langkah 1 (satu).

Kolom 3 $\rightarrow 3 - 7 = -4$

Langkah 3. Memilih sel dengan biaya transportasi terendah yang ada di kolom atau baris yang memiliki nilai terkecil selisihnya kemudian mengalokasikan produk / barang pada sel.

Tabel 2.16 langkah ke tiga metode aproksimasi vogel

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	X_{32} 2	5500 3	500
Kebutuhan tujuan	5000	4500	0	9500

Karena kolom 3 memiliki nilai selisih biaya terbesar maka barang dialokasikan pada kolom tiga yang memiliki biaya distribusi terkecil yaitu terletak pada kolom 3 baris 3. Dan karena kebutuhan di Madiun telah terpenuhi seluruhnya, maka kolom 3 tidak dihitung lagi.

Langkah 4. Tentukan kembali perbedaan (selisih) biaya untuk setiap kolom dan baris yang belum terisi. Ulangi langkah 2 sampai 4 sampai semua baris dan kolom sepenuhnya teralokasikan.

Baris 1 $\rightarrow 4 - 5 = -1$

Baris 2 $\rightarrow 3 - 6 = -3$

Baris 3 $\rightarrow 2 - 5 = -3$

Kolom 1 $\rightarrow 4 - 5 = -1$

Kolom 2 $\rightarrow 2 - 3 = -1$

Memilih sel yang memiliki selisih terbesar dari perhitungan langkah 4 kemudian mengalokasikan barang kedalam sel.

Sel yang memiliki selisih terbesar yaitu terletak pada baris ke dua dan baris ketiga

Tabel 2.17 langkah ke empat metode aproksimasi vogel

Sumber	Tujuan		Kapasitas Sumber
	Purwakerto	Semarang	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	4000
Magelang	X_{21} 6	X_{22} 3	5000
Surakarta	X_{31} 5	500 2	0
Kebutuhan Tujuan	5000	4000	9000

Karena seluruh kapasitas di Surakarta telah teralokasikan, maka alokasi barang dari Surakarta tidak dihitung lagi.

Langkah 5. Ulangi langkah empat sampai semua barang teralokasikan keseluruh tujuan permintaan.

Tentukan kembali perbedaan (selisih) biaya untuk setiap kolom dan baris yang belum terisi.

Baris 1 $\rightarrow 4 - 5 = -1$

Baris 2 $\rightarrow 3 - 6 = -3$

Kolom 1 $\rightarrow 4 - 6 = -2$

Kolom 2 $\rightarrow 3 - 5 = -2$

Memilih sel yang memiliki selisih terbesar dari perhitungan langkah 5 (lima) kemudian mengalokasikan barang kedalam sel.

Sel yang memiliki selisih terbesar yaitu terletak pada baris ke dua

Tabel 2.18 langkah ke lima metode aproksimasi vogel

Sumber	Tujuan		Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	
Yogyakarta	X_{11} 4	X_{12} 5	4000
Magelang	X_{21} 6	4000 3	1000
Kebutuhan tujuan	5000	0	5000

Karena seluruh permintaan di Semarang telah terpenuhi, maka kolom 2 tidak dihitung lagi.

Langkah 6. Ulangi langkah empat sampai semua barang teralokasi ke seluruh gudang.

Tabel 2.19 langkah ke enam metode aproksimasi vogel

Sumber	Tujuan	Kapasitas sumber
	Purwakerto	
Yogyakarta	4000 4	0
Magelang	1000 6	0
Kebutuhan tujuan	0	0

Jadi matriks alokasi dengan metode aproksimasi vogel seperti tabel berikut:

Tabel 2.20 matriks alokasi metode aproksimasi vogel

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Karena semua beban sisa telah dialokasikan, maka semua kapasitas yang ada pada sumber telah dialokasikan ke semua tujuan. Dan kebutuhan setiap tujuan telah terpenuhi. Jadi biaya distribusi berdasarkan alokasi beban distribusi sebagai berikut:

Tabel 2.21 biaya distribusi metode aproksimasi vogel

Sel	Biaya × Beban	Biaya
(1, 1)	4,- × 4000	16.000,-
(2, 1)	6,- × 1000	6.000,-
(2, 2)	3,- × 4000	12.000,-
(3, 2)	2,- × 500	1.000,-
(3, 3)	3,- × 5500	16.500,-
	Total	51.500,-

Jadi, biaya minimal solusi layak awal dengan metode aproksimasi vogel adalah Rp. 51.500,-

2.5 Solusi Optimal Masalah Transportasi

Langkah pertama dalam menyelesaikan persoalan transportasi ialah menentukan solusi layak awal yang memenuhi semua kendala dan sistem transportasi. Setelah didapat solusi layak awal maka dapat dicari solusi optimal yaitu solusi yang meminimumkan biaya transportasi. Metode yang dapat digunakan antara lain metode *stepping stone* dan metode *modified distribution* (MODI).

2.5.1 Metode Batu Loncatan (*Stepping Stone*)

Solusi optimal menggunakan metode *stepping stone* yaitu dengan melakukan perbaikan bertingkat dari solusi awal yang telah disusun. Sebagaimana dilihat dari *unit disturbance method* (metode gangguan yang diakibatkan perubahan alokasi sebanyak satu satuan), oleh karena itu sel-sel yang belum mendapat alokasi (non basis) mempunyai sederet sel basis, yang memberikan nilai evaluasi bagi sel yang bersangkutan. Deretan sel-sel bersama dengan sel yang akan dievaluasi itu membentuk lingkaran evaluasi.

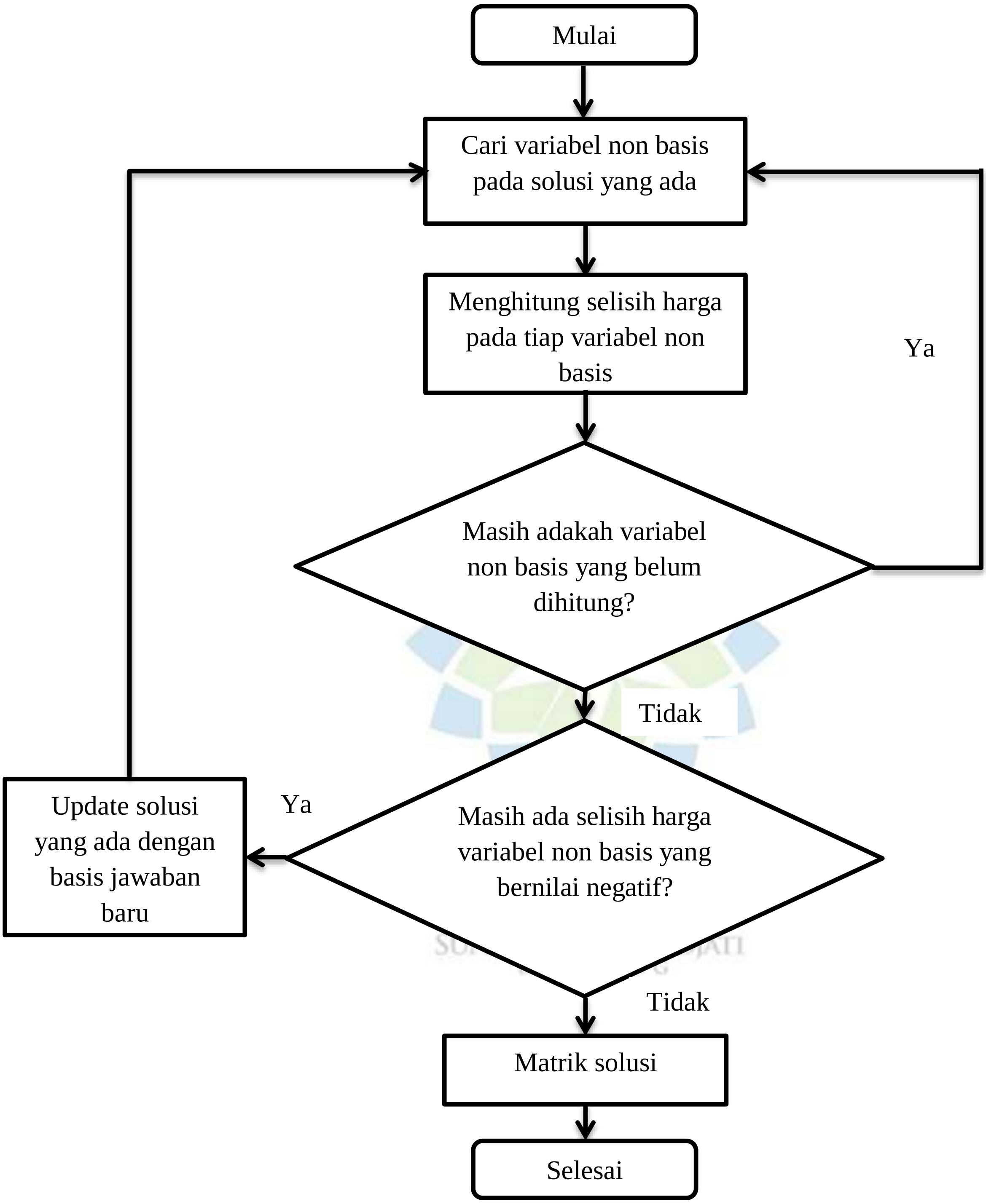
Pada setiap tingkat perbaikan solusi, pelu melakukan evaluasi bagi semua sel yang tidak terletak dalam basis. Hal itu berarti perlu mengevaluasi semua sel non basis sel-sel pada setiap perbaikan. Bila ada tingkat perbaikan solusi optimal diperoleh, apabila tidak maka perlu mengevaluasi sel. Dalam setiap tingkat perbaikan dipilih satu sel non basis yang menggantikan sel basis, dimana total ongkos transportasi baru lebih kecil dari total ongkos transportasi sebelumnya. Kriteria pemmilihan ialah mencari sel non basis dengan harga evaluasi minimum. Masalah utama dalam metode ini adalah mencari lingkaran evaluasi bagi setiap sel non basis. Longkaran evaluasi bagi setiap sel non basis ialah dengan membentuk sebuah persegi dari satu sel non basis dan tiga buah sel basis dengan putara arah berlawanan dengan arah jarum jam dengan rumus sel non basis $(nb) -$ sel basis 1 $(b1) +$ sel basis 2 $(b2) -$ sel basis 3 $(b3)$ [8].

Metode *stepping stone* adalah cara mengubah solusi layak awal menjadi pemecahan yang optimal. Cara ini digunakan untuk mengevaluasi biaya transportasi dengan mengubah rute yang belum terpakai. Langkah selanjutnya yaitu menekan kebawah biaya transportasi dengan memasukan variabel non basis (yaitu alokasi barang ke kotak kosong) ke dalam solusi. Proses evaluasi variabel non basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikannya kembali [8].

Langkah-langkah metode *stepping stone* yaitu sebagai berikut:

1. Mencari solusi layak awal.
2. Hitung pengecekan dengan membuat lingkaran evaluasi dari sel basis dan non basis dengan rumus sel $(nb - b1 + b2 - b3)$.
3. Jika terdapat hasil negatif pada setiap jalur, maka solusi belum optimal. Pilih jalur dengan nilai negatif terbesar untuk diperbaiki.
4. Alokasikan barangdari sel yang diperbaiki sesuai dengan lingkaran evaluasi terkait.
5. Ulangi langkah 1 sampai 4 sehingga semua nilai tidak bernilai negatif.

Untuk lebih jelas dalam memahami metode *stepping stone* maka disajikan flowchartnya sebagai berikut:



Gambar 2.5 flowchart metode *stepping stone*

Adapun contoh penyelesaian solusi optimal dengan dengan menggunakan metode *stepping stone* yaitu sebagai berikut:

Penyelesaian:

1. Mencari solusi layak awal. Penulis gunakan tabel 2.20 untuk solusi layak awal dengan metode VAM.

Tabel 2.22 langkah pertama metode stepping stone

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

2. Menghitung *opportunity cost* pada sel X_{31}.

Tabel 2.23 langkah kedua metode stepping stone

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	1000 6 −	4000 3 +	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5 +	500 2 −	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Pertama penulis membuat jalur tertutup yaitu $+5-6+3-2=0$. Pemindahan satu unit ditribusi ternyata akan membuat biaya distribusi naik untuk setiap unit distribusi yang di pindahkan.

3. Menghitung *opportunity cost* pada sel X_{12}.

Tabel 2.24 langkah ketiga metode *stepping stone*

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4 −	X_{12} 5 +	X_{13} 7	4000
Magelang	1000 6 +	4000 3 −	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Buat kembali jalur tertutup yaitu $+5-3+6-4=+4$. Pemindahan satu unit distribusi sepanjang jalur tersebut ternyata akan membuat biaya distribusi naik untuk setiap unit distribusi yang dipindahkan.

4. Menghitung *opportunity cost* pada sel X_{13}.

Tabel 2. 25 langkah keempat metode stepping stone

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4 (−) 4000	5 X_{12}	7 (+) X_{13}	4000
Magelang	6 (+) 1000	3 (−) 4000	8 X_{23}	5000
Surakarta	5 X_{31}	2 (+) 500	3 (−) 5500	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

Membuat lagi jalur tertutup yaitu $+7-3+2-3+6-4=+5$. Pemindahan satu unit sepanjang jalur tersebut ternyata akan membuat biaya distribusi naik untuk setiap unit distribusi yang dipindahkan.

Maka bisa dikatakan biaya Rp. 51.500,- sudah optimal.

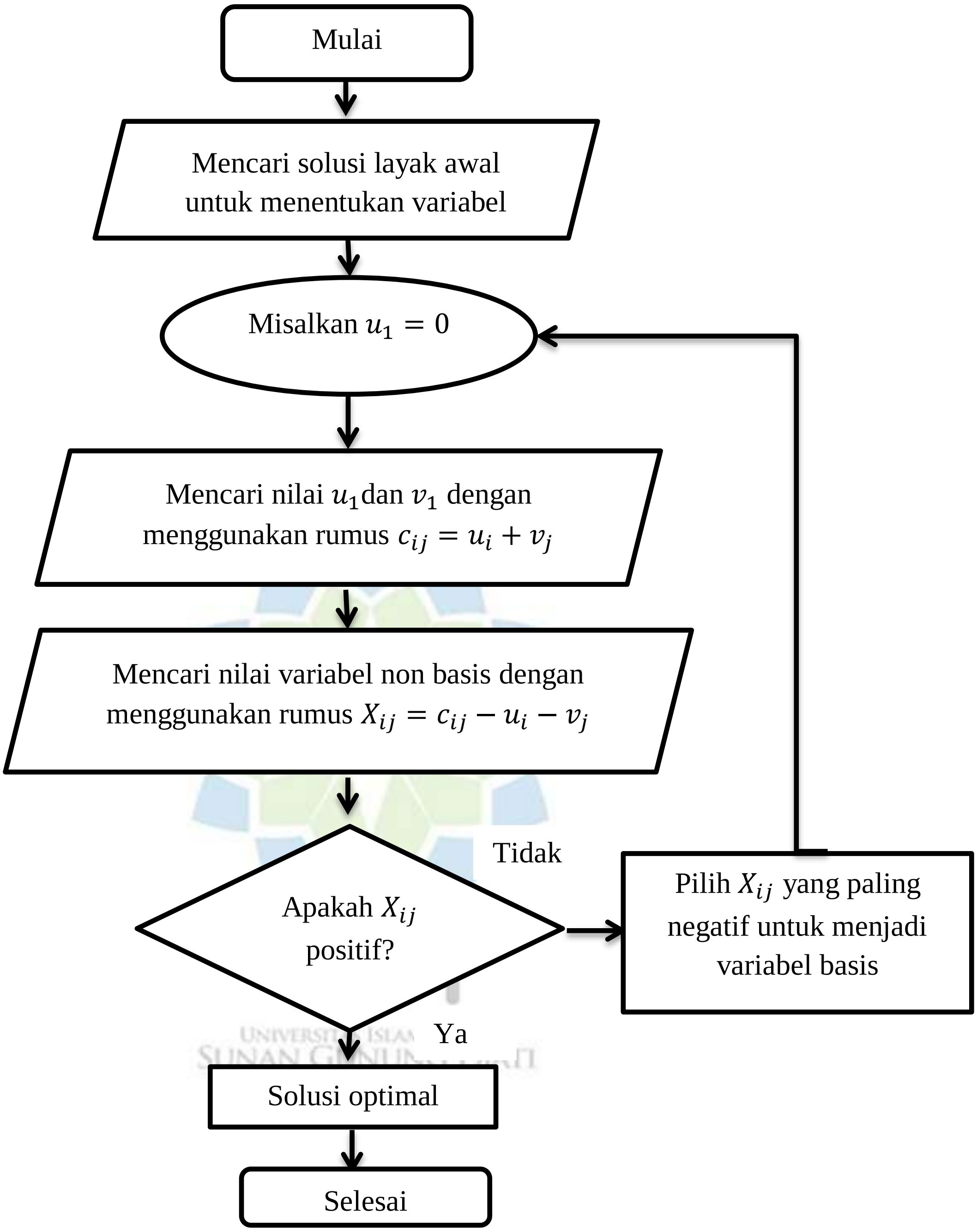
2.5.2 Metode MODI (*Modified Distribution Method*)

Solusi optimal menggunakan metode MODI (*modified distribution method*) yaitu dengan cara menelusuri jejak tertutup dari tiap sel yang tidak terpakai untuk menghitung indeks yang ditingkatkan sehingga sel yang tidak terpakai dengan potensi peningkatan terbesar (harga negatif terbesar) terpilih sebagai basis. Namun cara MODI ini tidak menggambarkan semua jejak tertutup, tetapi cukup menelusuri satu saja jejak tertutup. Jejak ditemukan sesudah ditemukan sel dengan indeks yang mempunyai harga negatif terbesar untuk dapat menentuan sel yang akan masuk ke dalam penyelesaian berikutnya seperti pada cara stepping stone.

Perbedaan metode MODI dan stepping stone adalah bagaimana cara mengevaluasi setiap sel dalam matriks. Dalam metode MODI lingkaran evaluasi hanya dicari untuk sel yang mempunyai harga paling negatif pada matriks evaluasi. Dalam prose mencari harga-harga sel evaluasi matriks, metode MODI harus menyusun dahulu satu matriks perantara, sedangkan pada metode stepping stone langsung melakukan evaluasi sel demi sel. Adapun langkah-langkah metode MODI yaitu:

1. Menentukan solusi layak awal dengan metode yang tersedia
2. menentukan nilai-nilai U_i untuk setiap baris dan nilai-nilai V_j untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan $C_{ij} = U_i + V_j$ untuk semua variabel basis dan tetapkan bahwa nilai U_i adalah nol.
3. Hitung perubahan biaya untuk setiap variabel non basis dengan menggunakan hubungan $X_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$.
4. Jika terdapat nilai X_{ij} negatif, maka solusi belum optimal. Pilih variabel X_{ij} dengan nilai negatif terbesar, alokasikan sesuai dengan proses *stepping stone* untuk sel yang terpilih.
5. Ulangi langkah 2 sampai dengan langkah 4 sehingga semua nilai X_{ij} bernilai nol atau positif. [3]

Untuk lebih jelas dalam memahami metode MODI maka disajikan flowchartnya sebagai berikut:



Gambar 2.6 flowchart metode *modified distribution*

Adapun contoh penyelesaian solusi optimal dengan dengan menggunakan metode *stepping stone* yaitu sebagai berikut:

Penyelesaian:

1. Mencari solusi layak awal. Penulis gunakan tabel 2.20 untuk solusi layak awal dengan metode VAM.

Tabel 2. 26 langkah pertama metode MODI

Sumber	Tujuan			Kapasitas sumber
	Purwakerto	Semarang	Madiun	
Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	5000
Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan	5000	4500	5500	15000

2. Menghitung nilai U_i dan V_j dengan formula $U_i + V_j = C_{ij}$ pada setiap sel yang telah memiliki alokasi.

Misalkan $U_1 = 0$, maka

Yogyakarta, Purwakerto $\rightarrow U_1 + V_1 = 4 \rightarrow V_1 = 4$

Magelang, Purwokerto $\rightarrow U_2 + V_1 = 6 \rightarrow U_2 = 6 - 4 = 2$

Magelang, Semarang $\rightarrow U_2 + V_2 = 3 \rightarrow V_2 = 3 - 2 = 1$

Surakarta, Semarang $\rightarrow U_3 + V_2 = 2 \rightarrow U_3 = 2 - 1 = 1$

Surakarta, Madiun $\rightarrow U_3 + V_3 = 3 \rightarrow V_3 = 3 - 1 = 2$

Tabel 2. 27 langkah kedua metode MODI

Sumber		Tujuan			Kapasitas sumber
		$V_1 = 4$	$V_2 = 1$	$V_3 = 2$	
		Purwakerto	Semarang	Madiun	
$U_1 = 0$	Yogyakarta	4000 4	X_{12} 5	X_{13} 7	4000
$U_2 = 2$	Magelang	1000 6	4000 3	X_{23} 8	5000
$U_3 = 1$	Surakarta	X_{31} 5	500 2	5500 3	6000
Kebutuhan tujuan		5000	4500	5500	15000

3. Hitung perubahan biayanya dengan formula $X_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

Yogyakarta, Purwakerto $\rightarrow X_{y,p} = 4 - 0 - 4 = 0$

Magelang, Purwokerto $\rightarrow X_{m,p} = 6 - 2 - 4 = 0$

Magelang, Semarang $\rightarrow X_{m,s} = 3 - 2 - 1 = 0$

Surakarta, Semarang $\rightarrow X_{s,s} = 2 - 1 - 1 = 0$

Surakarta, Madiun $\rightarrow X_{s,m} = 3 - 1 - 2 = 0$

Karena pada langkah tiga ini tidak ada nilai yang negatif, artinya bisa dikatakan bahwa biaya Rp. 51.500,- sudah optimal.