Dr Wati Susilawati M.Pd.

SEJARAH & FILSAFAT MATEMATIKA

Penerbit: CV. INSAN MANDIRI

ISBN. 978-602-7755-16-1

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warohmatullohi Wabarokatuh

Salah satu kebutuhan dasar manusia adalah membangun sistem berpikir untuk menyelesaikan masalah kehidupan. Kebutuhan tersebut diperoleh melalui berlatih mengembangkan strategi berpikir. Dengan demikian, belajar matematika dapat dipandang sebagai salah satu wahana untuk memenuhi kebutuhan dasar manusia.

Kebutuhan belajar matematika seseorang akan mengalami perkembangan, sesuai perkembangan IPTEKS. Perkembangan kebutuhan belajar matematika tersebut dapat ditunjukkan dengan adanya peran serta semua insan akademik, baik dari lingkungan sekolah maupun perguruan tinggi, ikut memberi andil secara berarti dalam mengembangkan kualitas pembelajaran sejarah matematika. Produk yang dihasilkan dari para pakar pendidikan matematika dari berbagai kalangan, ikut memberi warna terhadap peningkatan kualitas pembelajaran sejarah matematika di Indonesia.

Sebuah buku berjudul "Sejarah Matematika" mengupas sedikit berbagai konsep Sejarah Matematika dan perkembangan materi-materi matematika modern serbagai alternatif pembelajaran sejarah matematika pada era globalisasi.

Sebagai seorang muslim, saya meyakini bahwa ilmu yang bermanfaat yang kita peroleh hendaknya disebarluaskan, karena merupakan suatu amalan yang tidak terputus. Buku ini dapat dipergunakan sebagai bahan bacaan baik bagi guru maupun calon guru matematika.

Akhirul kata, semoga apa yang diberikan dalam buku ini mendapat ridlo-Nya dan mohon maaf segala kesalahan yang telah saya lakukan. *Wassalamu'alaikum Warohmatullohi Wabarokatuh.*

Penulis, 1 September 2017

DAFTAR ISI

BAB I
SISTEM BILANGAN

1.1 PENDAHULUAN

Lambang bilangan itu beraneka ragam, sedangkan yang sering digunakan serta dikenal oleh kebanyakan orang paling sedikit dua bentuk simbul bilangan, yaitu lambang bilangan romawi misalnya: I, II, III, IV, . . . dan lambang bilangan hindu-arab yang lebih bermanfaat terutama untuk perhitungan, misalnya: 1, 2, 3, . . .

Dalam penulisan lambang bilangan itu dipilih lambang bilangan tertentu dengan aturan tertentu pula untuk menggabungkannya. Sedangkan sistem numerasi adalah suatu sistem pemberian nama bilangan. Sistem tersebut memiliki simbul-simbul pokok atau simbul-simbul dasar dengan aturan-aturan penggabungan bilangan, dipakai untuk menulis lambang bilangan tertentu. Jadi pada sistem numerasi mempunyai dua bagian penting:

(1) Simbul-simbul pokok

(2) Aturan menyatukan simbul-simbul pokok untuk menulis semua lambang bilangan.

Kapankah lambang bilangan itu diperoleh? Lambang bilangan yang sempurna sesungguhnya membutuhkan waktu yang cukup lama untuk berkembang. Selama beribu-ribu tahun manusia mencatat kejadian dan mengirim berita dalam bentuk gambar-gambar yang akhirnya cara ini berkembang menjadi suatu cara untuk menulis.

Perkembangan semacam ini akan menghasilkan kemampuan berhitung yang cukup tinggi pada bangsa Sumerian, Babylonia, Mesir kuno dan bangsa-bangsa kuno lainnya. Diantara reruntuhan kuno, diketemukan beratus-ratus bata bertulis dari tanah liat yang semua ditulisi simbul-simbul, gambar-gambar dan berpuluh-puluh tanda-tanda. Sebab itu kita percaya bahwa pada masa itu merupakan masa timbulnya tulisan yang pertama dalam sejarah kehidupan manusia.

1.2 PERHITUNGAN PRIMITIF

Suatu catatan sejarah yang berisikan asal-usul dari bilangan sampai saat ini tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tepat: dimana, kapan, bagaimana dan oleh siapa berhitung itu digunakan. Hal ini tidaklah mustahil sebab terlalu sedikitnya data dari zaman purbakala yang dapat diketemukan maupun dikumpulkan oleh para ahli sejarah. Sedangkan kenyataannya semua manusia rata-rata dalam masa amat primitifpun telah mengetahui beberapa arti bilangan. Atau mereka sedikitnya mengetahui apabila beberapa obyek bertambah atau berkurang dari suatu kelompok kecil. Adanya perubahan susunan masyarakat mengakibatkan perhitungan sederhana menjadi perlu, misalnya suatu suku telah mengetahui berapa banyak anggotanya dan berapa banyak musuh-musuhnya. Seseorang perlu juga mengetahui jika sekumpulan domba atau ternaknya berkurang jumlahnya.

Terlihat bahwa pengertian mereka tentang berhitung masih bersifat kualitatif, yaitu hanya sekedar dapat membedakan ”satu, dua dan banyak”.

Agaknya cara pertama kali untuk mengetahui suatu bilangan dengan metode yang sangat sederhana yaitu: bilangan itu selalu dikaitkan pada benda atau obyek yang akan dihitung atau dengan kata lain bilangan mereka masih memiliki bentuk. Akibatnya bilangan mereka akan selalu bersifat terbatas dan bilangan terkecilnya tentu SATU. Misalnya dalam menghitung sekelompok domba, sebuah jari dilipat ke bawah untuk setiap domba atau dapat pula dilakukan dengan mengumpulkan batu-batu kerikil atau potongan-potongan kayu atau membuat coretan-coretan batu atau dengan membuat takikan pada sepotong kayu atau membuat simpul pada seutas tali. Perkembangan berikutnya dengan merubahnya dalam bentuk bunyi suara dibandingkan dengan sejumlah/sekelompok obyek.

1.3 BASIS BILANGAN

Perkembangan kebudayaan manusia pada saat itu mendorong diperlukannya untuk membuat perhitungan-perhitungan yang lebih luas sehingga proses perhitungan harus dibuat lebih sistematis.Tujuan tersebut dilakukan dengan mengatur bilangan-bilangan dalam basis bilangan yaitu: suatu bilangan b dipilih sebagai dasar atau basis (disebut juga ”radix” atau ”scale”) untuk menghitung dan nama-nama diberikan pada bilangan : 1, 2, 3, . . . , b. Sedangkan untuk bilangan yang lebih besar dari b ternyata diberi kombinasi dari nama-nama bilangan yang telah disebutkan terdahulu.

Sejak jari manusia utuh keadaannya seperti sekarang maka tidak mengherankan kalau akhirnya basis sepuluh lebih banyak yang menggunakannya dari pada basis bilangan b yang lain. Hasil penelitian W.C. Eels dari 307 sistem bilangn bangsa Amerika primitif ternyata terdapat 146 yang menggunakan sistem basis 10 (sistem desimal). Sedangkan kata desimal berasal dari kata latin ”decem” yang artinya sepuluh.

Nama-nama : one, two, / . . . , ten untuk bilangan 1, 2, 3, . . . ,10. bilangan 11 dinamakan “eleven” yang berasal dari kata “ ein lifon “ artinya “sepuluh lebih satu”. Demikian juga ”twelve” dari ”twe lif” artinya sepuluh lebih dua”, ”thirteen” dari ”three and ten” , ”fourteen” dari ”four and ten” sampai ”nineteen” dari ”nine and ten” dan seterusnya.

Kata hundred (seratus) berasal dari sepuluh kali sepuluh. Ada pula suatu bukti bahwa 2, 3 dan 4 telah digunakn sebagai basis perhitungan primitif, contohnya: penduduk asli di Queensland yang menghitung, satu,dua, dua dan satu, banyak dan orang katai di Afrika (Afrika Pygmies) menghitung ”a, oa, ua, oa-oa, oa-oa-a, dan oa-oa-oa untuk 1, 2, 3, 4, 5, 6. suku Tierra del fuego mempunyai beberapa nama bilangan basis tiga dan suku-suku di Amerika selatan dengan basis 4.

Sampai sekarang beberapa suku Amerika selatan masih menghitung dengan tangan ”satu, dua, tiga, empat, tangan, tangan dan seterusnya. Orang Yukaghirs di Siberia menggunakan cara campuran: satu, dua, tiga, tiga dan satu, lima, tiga kali dua, lebih satu, empat kali dua, sepuluh kurang satu, sepuluh.

Penanggalan para petani Jerman menggunakan ”puluhan” sampai tahun 1.800. Suku primitif di kepulauan Andaman sekarang hanya dapat menghitung dengan bilangan basis dua; beberapa suku di Australia dengan basis tiga ; suku bangsa Indian Mundurucu di Brasil sampai lima; Suku bangsa Hottentot di Afrika hanya dapat menghitung sampai tiga, jika jumlah itu melebihi tiga, maka mereka hanya akan mengatakan ”banyak”.

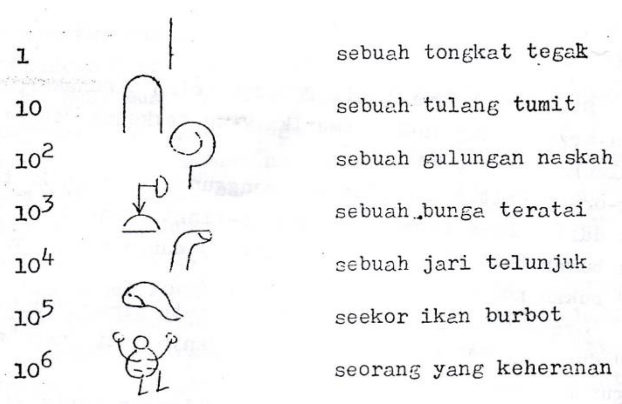
Ada pula petunjuk bahwa 12 telah digunakan sebagai basis bilangan yang biasanya berhubungan dengan ukuran. Hal tersebut diilhami oleh banyaknya bulan dalam setahun atau mungkin 12, mempunyai banyak bagian yang utuh (faktor pembagi). Misalnya : satu ”foot” ada 12 inchi, dahulu satu pound ada 12 ounce, (sekarang satu pound ada 16 ounce), satu shilling pound ada 12 penni, satu inchi ada 12 garis, satu hari ada 12 jam, satu tahun ada 12 bulan dan adanya kata lusin dan satu gros.

Sistem bilangan basis 20 juga telah digunakan, misalnya orang-orang Indian Amerika yang terkenal dengan nama bilangan MAYA (MAYAN). Orang-orang Celtic (Prancis) menggunakan basis 20 terlihat dari bahasa Prancis ”Quatra-Vingt” empat dua puluhan bukan hitante (delapan puluh) dan ”Quatre-Vingtdix” bukan nonante (sembilan puluh).

Orang Greenland menggunakan ”satu orang” untuk 20, ”dua orang” untuk 40 dan seterusnya; di Inggris menggunakan kata score. Bangsa Babylonia menggunakan bilangan Basis 60 dan sekarang masih digunakan dalam menghitung waktu dengan menit dan detik. Derajat dibagi dengan 60 menit dan satu menit dalam 60 detik. Di negara kita sendiri masih dijumpai istilah: kodi, abad, windu, selapan, sepasar dan sebagainya.

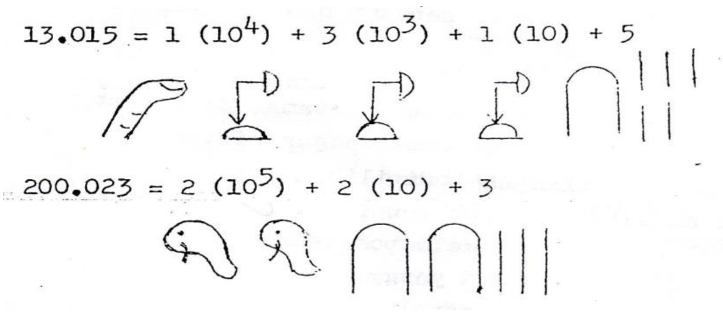
1.4 SISTEM KELOMPOK SEDERHANA

Barangkali tentang bentuk pertama, dari system bilangan yang dikembangkan disebut dengan sistem kelompok sederhana yaitu: bilangan b dipilih sebagai basis bilangan dengan simbul: 1, b, b^2, b^3, . . . Contoh dari system kelompok sederhana ini adalah bilangan HIEROGLYPHIC MESIR yang digunakan jauh sebelum 3.400 SM dengan basis sepuluh. Setiap kelipatan sepuluh dinyatakan dengan lambang tersendiri. Dengan demikian akan terdapat banyak kelompok bilangan berbentuk: satuan, puluhan, ratusan, ribuan, puluh ribu, ratus ribu, dan jutaan yang lambangnya seperti berikut:



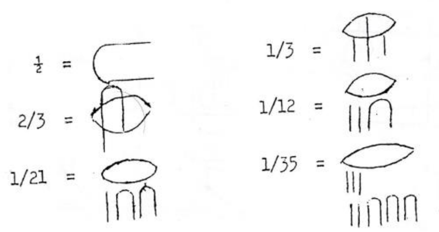
Setiap bilangan selalu dapat ditulis dengan symbol tersebut, misalnya penulisan lambang bilangan 729 harus ditulis dengan 7 lambang ratusan, 2 lambang puluhan, 9 lambang satuan, sehingga kesemuanya terdiri atas 18 lambang.

Jadi untuk bilangan 13.015 ditulis:



Walaupun Mesir kuno tidak mengenal bilangan nol tetapi dalam penulisan bilangan mereka tidak pernah menjumpai kesulitan, mengapa? Mereka juga telah mengenal bilangan positif yang lebih kecil dari satu. Bilangan itu ditulis dalam bentuk pecahan dengan pembilang sebesar satu atau dalam hal tertentu sebesar dua (untuk bilangan 2/3).

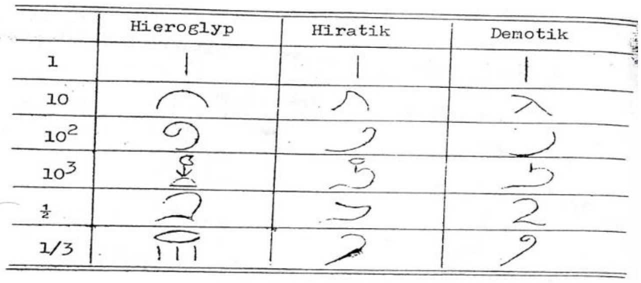
Dengan metode ini, pecahan 5/8 ditulis sebagai penjumlahan ½ + 1/8. berikut ini adalah beberapa lambang pecahan:



Pada umumnya kita menulis bilangan tersebut di atas dari kiri ke kanan, sedangkan orang mesir kuno menulisnya dari kanan ke kiri. Serta lambang-lambang yang digunakan banyak berbentuk gambar yang kini dinamakan: hieroglyp yang artinya "tulisan ukiran keramat", karena tulisan tersebut banyak dipakai pada ukiran yang berkaitan dengan masalah keagamaan.

Penulisan-penulisan itu sangat sulit, maka untuk mempermudah sering dilakukan penyederhanaan, tetapi ternyata penyederhanaannya lebih banyak digunakan oleh para pendeta sehingga sekarang disebut: tulisan hiratik yang artinya "tulisan pendeta".

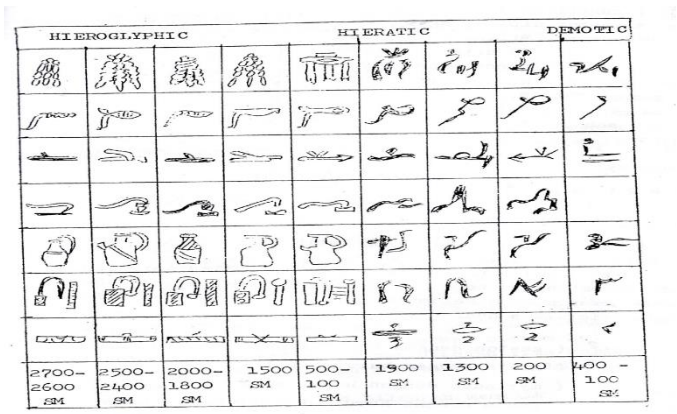
Hiratik pun masih dirasakan terlalu sulit untuk ditulis sehingga pada abad ke-VII SM muncul tulisan yang lebih sederhana, hal ini banyak digunakan oleh rakyat. Pada umumnya tulisan tersebut dinamakan : demotik yang berarti " tulisan rakyat ". Beberapa lambang bilangan mesir kuno yang berbentuk hieroglyp, hiratik dan demotik seperti yang terdapat pada uraian berikut ini:



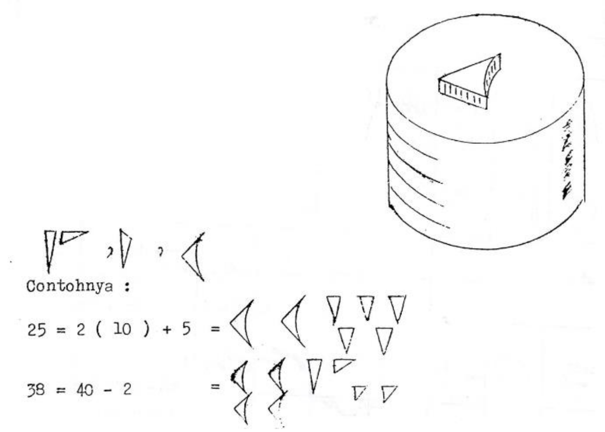
Pada zaman kuno dikenal cara menulis urutan huruf-huruf dalam empat macam yaitu:

1) dari kiri ke kanan
2) dari kanan ke kiri
3) dari atas ke bawah
4) Boustrofedon, yakni gabungan antara menulis ke kiri ke kanan dan dari kanan ke kiri; jika baris di atas dari kiri ke kanan maka baris selanjutnya ditulis dari kanan ke kiri dan baris selanjutnya ditulis dari kiri ke kanan lagi, dan demikian seterusnya.

Lambang bilangan Mesir Kuno seperti tersebut di atas, ternyata mengalami beberapa kali perubahan, maka tidak aneh bila tulisannya juga akan mengalami perubahan dari tulisan hieroglyp sampai ketulisan demotik. Hal tersebut ditunjukkan pada gambar, (termasuk adanya variasi cara penulisan, misalnya pada lambang bilangan 1.000 berbentuk bunga teratai ada yang menghadap ke kiri ada yang ke kanan), di bawah ini ditunjukkan gambar dari atas ke bawah berarti:Kulit rubah yang terikat; cemeti; seruit; beliung yang sedang digunakan; tempayan; alat untuk menulis dan gulungan surat yang terikat.



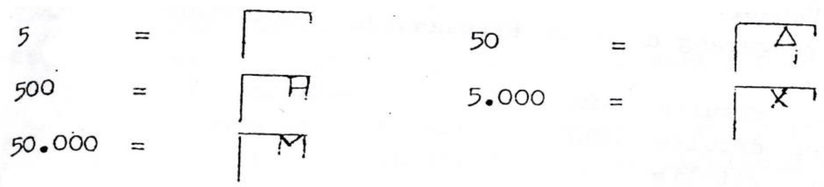
Orang Babylonia menuliskan bilangannya pada daun papyrus dengan alat cetak dari tanah liat yang berbentuk baji (cuneiform). Alat tersebut dibakar agar keras dan menulisnya permanent. Bilangan yang lebih kecil dari 60 ditulis dengan sistem kelompok sederhana basis sepuluh yang digunakan pada 2000 SM sampai 200 SM. Simbul kurang, satu dan sepuluh adalah sebagai berikut:



Bilangan-bilangan yang lebih besar akan dibahas pada halaman selanjutnya. Bilangan dari bangsa Attic atau Hirodianic Yunani kuno dikembangkan beberapa waktu sebelum abad ke-3 SM, berdasarkan sistem kelompok sederhana dengan basis 10. simbul-simbulnya adalah:

I = 1 = 10 (deka dengan huruf delta)
H = 10^2 (ecaton dengan huruf eta)
X = 10^3 (xilia dengan huruf chi)
M = 10^4 (myriades dengan huruf mu)
II = 5 (pente dengan huruf pi)

Untuk mengurangi banyaknya pengulangan penulisan pada sistem tersebut digunakan juga lambang pengganti pada setiap pertengahan kelipatan sepuluh. Jadi terdapat lambang pengganti untuk bilangan:



Lambang tersebut tidak mengikuti sistem pengelompokan hanya sebagai penulisan pendek untuk lima pengulangan. Lambang bilangan attic ini juga tidak mengenal lambang bilangan nol. Contoh:

Contoh lain dari sistem kelompok sederhana basis 10 adalah bilangan Roman (Romawi) yang juga tidak mengenal lambang nol. Serta tidak berdasarkan sistem letak dan adanya lambang pengganti untuk pengulangan lima kali, simbulnya: I, X, C, M, V, L dan D untuk 1, 10, 10^2, 10^3, 5, 50 dan 500. Orang Romawi dalam menuliskan bilangan memiliki aturan sebagai berikut: pertama menuliskan ribuan, ratusan, puluhan dan akhirnya satuan.

Jadi 232 ditulis CCXXXII, 499 ditulis CCCCXXXXXXXXXIIIIIIIII.

Perkembangan berikutnya untuk menghemat pengulangan dalam sistem pengelompokan yang terlalu panjang digunakan angka empat dituliskan 5-1, sedangkan untuk sembilan sebagai 10-1; empat puluh sebagi 50-10; sembilan puluh sebagai 100-10 dan seterusnya.

Pengertian pengurangan ini dilakukan dengan menempatkan pengurangan di depan bilangan yang dikurangi. Contoh :

499 ditulis CDXCIX

654 ditulis DCLIV

1.009 ditulis MIX

1.944 ditulis MCMXLIV

Tidak ada yang dapat menerangkan simbul-simbul bilangan Romawi yang asli, sedangkan keterangan yang lebih masuk akal oleh pengarang sejarah latin tentang asal-usul bilangan : I, II, III, IIII berasal dari jari-jari tangan.

Lambang bilangan sepuluh yang berbentuk huruf X diduga berasal dari dua sumber. Pertama, kerangka dua tangan dengan jumlah sepuluh jari yang diletakan bertolak belakang menyerupai X dan kedua, sepuluh coretan pada pencacahan yang digaris silang kemudian diambil sebagai lambang X untuk bilangan sepuluh. Lambang bilangan lima yang berbentuk V berasal dari setengah lambang bilangan sepuluh, karena nilai bilangan lima adalah setengah dari nilai bilangan sepuluh.Lambang bilangan lima puluh yang berbentuk huruf L diperkirakan berasal dari huruf chi pada abjad Yunani yang berangsur-angsur berubah menjadi lambang L, semua lambang lima puluh ini pernah digunakan.

Lambang bilangan seratus yang berbentuk C diperkirakan adalah bentuk perubahan dari huruf theta pada abjad Yunani, secara kebetulan bilangan seratus dalam bahasa latin adalah CENTUM yakni kata yang diawali dengan huruf C.

Variasi huruf phi pada abjad Yunani berkembang menjadi lambang bilangan M atau seribu, sedangkan setengah sebelah kanan dari bentuk tersebut berkembang menjadi lambang D atau lima ratus karena nilai lima ratus adalah setengah dari nilai seribu.

Simbul untuk 1000 dan 500 digunakan paling akhir sampai tahun 1715. sedangkan bilangan yang lebih besar dari 1000 ditulis dengan cara perkalian. Sebuah tanda setrip / garis mendatar di atas sebuah bilangan berarti bahwa bilangan tersebut dikalikan dengan 1000. jadi :

CCXXX Artinya 230.000

XXI Artinya 21.000

yang sudah tidak kita gunakan sekarang adalah lambang bilangan pecahan. Untuk bilangan pecahan Romawi hanya mengenal satu jenis penyebut yakni 12. dengan peyebut ini, mereka memiliki pecahan dari 1/12 sampai 11/12. khusus bilangan 6/12 (sama dengan setengah) mereka menggunakan huruf S yang berasal dari singkatan kata ”samis” berarti setengah.

Orang Romawi menamakan bilangan seperdua belas : uncia (jamak : unciae). Kata inilah yang dibawa oleh Legium Caesar ke Inggris dan disana Uncia menjelma menjadi kata inch yang berarti seperdua belas foot, serta juga menjadi kata ounce yang berarti seperdua belas pound.

Contoh:

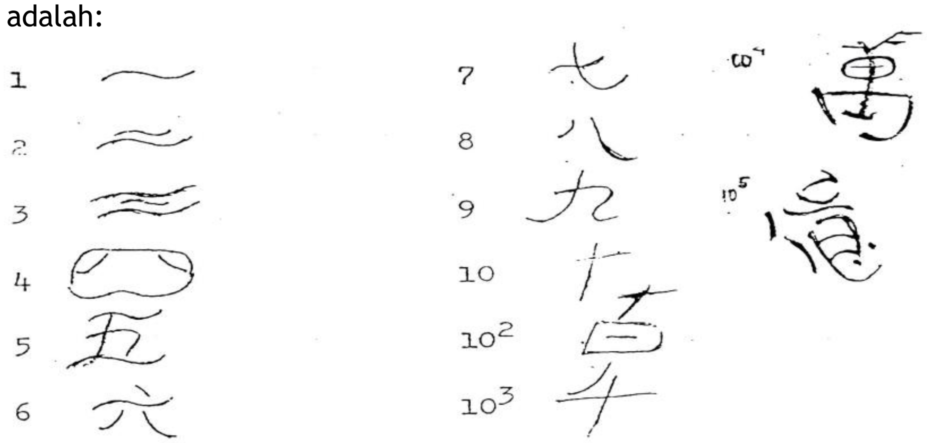
1/2	____	7/12	S ____
2/12	____	8/ 12	S ____
3/12	____	9/12	S ____
4/12	____ ____	10/12	S ____ ____
5/12	____ ____ ____	11/12	S ____ ____ ____
6/12	S (dari semis)		

1.5 SISTEM KELOMPOK PERKALIAN

Dalam sistem ini basis b di pilih dengan kelompok pertama : 1, 2, 3, . . . ,b-1 dan kelompok kedua: b, kedua kelompok ini digunakan dalam perkalian untuk menunjukkan berapa buah satuan kelompok yang lebih tinggi diperlukan. Jadi bila kita menentukan bilangan satu sampai sembilan dengan simbul yang biasa digunakan, sedangkan sepuluh, seratus dan seribu digunakan a, b, c, . . . misalnya : 5.625 = 5 c 6 b 2 a 5

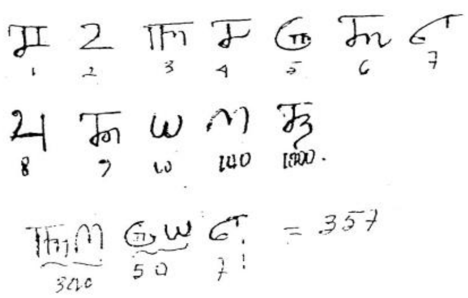
Sebagai contoh sistem di atas adalah bilanngan Cina – Jepang dengan bilangan basis sepuluh serta ditulis dari atas ke bawah.

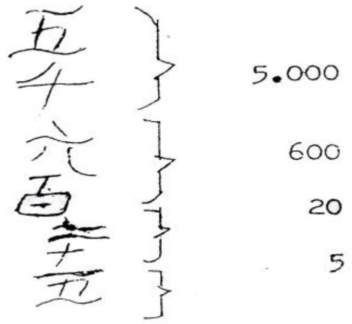
Simbul-sumbulnya adalah:



Contoh:

Bilangan 5.625 di tulis





1.6 SISTEM BILANGAN BERHITUNG

Dalam sistem bilangan ini, basis b dipilih dan digunakan simbul untuk : 1, 2, 3, . . . , b-1; b, 2b, 3b, . . . (b-1)b; b^2, $2b^2$, . . . , $(b-1)b^2$; dan seterusnya. Meskipun banyak simbul yang harus di hapal dalam sistem ini, tetapi gambaran dari bilangan yang dimaksud dapat dipahami. Rupanya terdapat perbedaan pada orang-orang di Mesopotamia dan Mesir kuno yang diperkirakan telah mengenal lambang bilangan sebelum mereka memiliki bahasa tulisan, sedangkan orang-orang Yunani kuno dan Romawi lebih dulu mengenal bahasa tulisan sebelum mereka mengenal lambang bilangan. Itulah sebabnya maka ada diantara lambang bilangan yang dinyatakan dalam bentuk huruf pertama dari nama bilangan yang bersangkutan. Ada yang selengkapnya ditulis dengan abjad, dan ada juga yang merupakan bentuk perubahan dari abjad-abjad tertentu, misalnya lambang bilangan Yunani Kuno.Lambang bilangan Yunani Kuno terbagi dalam dua jenis yaitu: pertama berasal dari zaman sekitar 2.800 tahun yang lalu berkembang di wilayah Afrika (telah diuraikan sebelumnya); yang kedua berkembang pada zaman sekitar 2.500 tahun lalu di Yunani (kepulauan Ionia). Lambang bilangan ini sepenuhnya ditulis dengan abjad dan dikenal sebagai lambang bilangan Ionik.

Lambang bilangan Ionik ini tidak dikelompokan, Penulisannya dengan sistem bilangan dasar desimal serta tanpa pengelompokan, sehingga setiap bilangan dari satu sampai sembilan mempunyai bilangan yang berbeda-beda. Di samping itu lambang bilangan tersebut tidak mengenal sistem penulisan berdasarkan letak/posisi bilangan. Oleh karena itu lambang bilangannya berbeda untuk setiap bilangan atau kelipatan bilangan yang lebih besar. Maka terdapat lambang bilangan untuk bilangan sepuluh, duapuluh, tigapuluh, . . . , dan untuk bilangan seratus, duaratus, tigaratus, . . . , dan juga bilangan seribu, dua ribu, tiga ribu, . .

Simbul bilangan Ionik tersebut menggunakan 27 huruf yang terdiri dari 24 huruf alfabet Yunani dengan ditambah simbul gamma, koppa dan sampi.

1	α'	alpha	60	ξ'	xi
2	β'	beta	70	ο'	omicron
3	γ'	gamma	80	π'	pi
4	δ'	delta	90	ϙ'	obsolete koppa
5	ε'	epsilon	100	ρ'	rho
6	ϛ'	obsolete digamma	200	σ'	sigma
7	ζ'	zeta	300	τ'	tau
8	η'	eta	400	υ'	upsilon
9	θ'	theta	500	φ'	phi
10	ι'	iota	600	χ'	chi
20	κ'	koppa	700	ψ'	psi
30	λ'	lambda	800	ω'	omega
40	μ'	mu	900	ϡ	obsolete sampi
50	ν'	nu	1.000	,α	
2.000	,β		3.000	,γ	
10.000	,M				

Sedangkan kelipatan bilangan sepuluh ribu ditulis dengan membubuhkan angka kelipatannya di atas M itu. Demikian untuk M dengan lambang bilangan delapan di atasnya berarti : 8 x 10.000 atau 80.000 dan demikian seterusnya.

$$\chi\mu\delta' = 600 + 40 + 4 = 644$$

$$,\theta\psi\lambda\beta' = 9.000 + 700 + 30 + 2 = 9.732$$

$$\overset{\beta}{\mathrm{M}} = 2 \times 10.000 = 20.000$$

$$\overset{\delta}{\mathrm{M}} = 4 \times 10.000 = 40.000$$

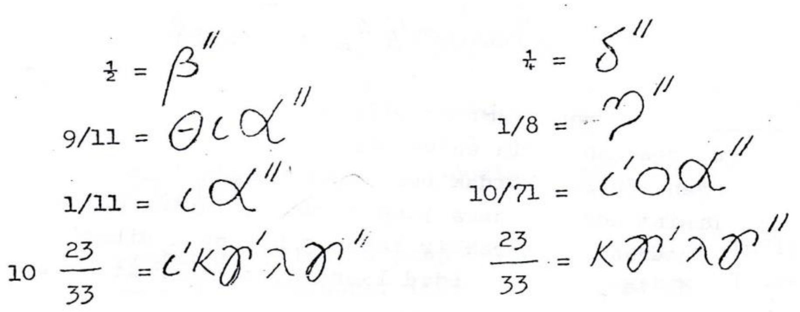
$$\overset{\eta}{\mathrm{M}}\ o\theta' = 80.000 + 70 + 9 = 80.079$$

$$\overset{\sigma\lambda}{\mathrm{M}}\ \omega\kappa\alpha' = 2.300.000 + 800 + 20 + 1 = 2.300$$

$$\overset{\nu\delta}{\mathrm{M}}\ ,\varsigma = 546.000$$

$$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}\ ,\beta\upsilon' = 62.400$$

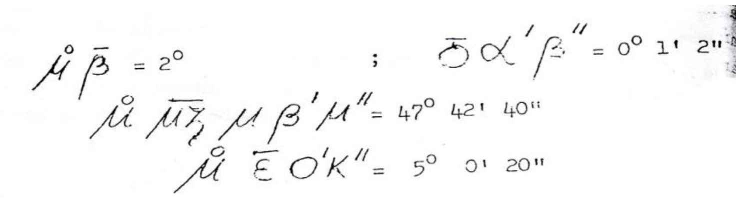
Pada umumnya penulisan lambang bilangan pecahan dilakukan dengan memberi tanda aksen ganda pada penyebut pecahan itu. Dengan demikian maka bentuk itu menyatakan bahwa nilainya adalah seperbilangan yang bertanda aksen ganda apabila pembilangnya tidak sama dengan satu maka lambang pembilang itu diletakan di depan lambang penyebut. Berikut ini adalah beberapa contoh lambang bilangan pecahan :



Namun ada juga penulisan bilangan pecahan itu yang dilakukan dengan jalan menempatkan lambang bilangan penyebut dan pembilang di atas dan di bawah garis seperti cara kita menulis pecahan sekarang ini. Perbedaannya terletak pada penempatan yakni mereka menempatkan penyebut di atas sedangkan pembilang di bawah atau kebalikan dari cara penulisan pecahan yang dilakukan sekarang ini.

Lambang bilangan Ionik ada tiga hal yang penting yaitu: penulisan bilangan bulat pada sistem basis sepuluh, lambang bilangan pecahan atau yang bercampur dengan pecahan dan penulisan lambang bilangan pada sistem basis seksagesimal. Untuk menyatakan besaran-besaran tertentu, terutama digunakan untuk besaran sudut. Lambang bilangan nol memang tidak dikenal dalam sistem bilangan Ionik pada basis sepuluh, tetapi pada basis seksagesimal untuk tempat kosong mereka lukiskan sebagai lingkaran, serta memberikan tanda-tanda khusus untuk setiap kelipatan enampuluh. Penulisan besaran sudut dilakukan dengan menuliskan kata dearajat atau singkatannya berupa huruf mu dengan nol kecil di atasnya di depan bilangan.

Contoh:



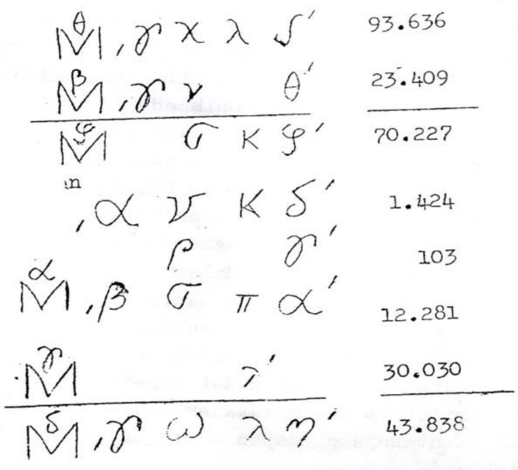
Karena lambang bilangan ditulis dengan abjad maka dirasakan perlu untuk memberi tanda kepala lambang bilangan itu agar tidak bercampur dengan tulisan lainnya. Disini ada dua cara yang digunakan untuk memberi tanda

1) pada abjad terakhir lambang bilangan diberi tanda
2) diatas seluruh abjad lambang bilangan itu dibubuhi garis mendatar.

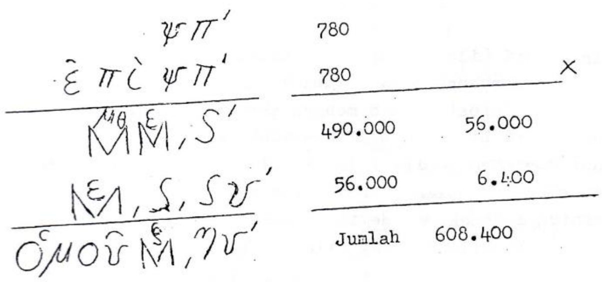
Operasi bilangan Yunani Kuno menyerupai cara kita sekarang. Di bawah ini ditunjukan operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian.

a. Pengurangan

b. Penjumlahan



c. Perkalian bilangan bulat



Perkembangan bilangan yang serupa terjadi di India pada abad ke-enam dan ke-tujuh. India Kuno ini mengenal beberapa lambang bilangan, dua jenis diantaranya yang berkembang lebih dahulu kini dikenal sebagai lambang bilangan Brahmi dan Kharosti.

Lambang bilangan brahmi yang berasal dari Zaman raja Asoka tidak menggunakan secara sempurna sistem kelompok sederhana. Pengelompokan hanya terjadi sampai lambang bilangan tiga. Dan selanjutnya setiap bilangan lainnya menggunakan lambang bilangan tersendiri yaitu sistem basis sepuluh serta tidak ditulis dalam sistem letak / posisi bilangan. Hal ini kecuali bilangan satu, dua dan tiga, menyebabkan penulisan bilangan Brahmi sama dengan cara penulisan lambang bilangan kita sekarang. Bahkan mereka bertindak lebih jauh yaitu lambang bilangan yang berbeda itu dilanjutkan sampai ke bilangan-bilangan yang lebih besar. Terdapat lambang bilangan yang berbeda untuk sepuluh, dua puluh, tiga puluh, . . . , dan juga untuk seratus, dua ratus, tiga ratus, ...

Dengan demikian penulisan lambang bilangan Brahmi adalah sama dengan sistem penulisan sistem bilangan Ionik.

Lambang bilangan Brahmi ini juga belum mengenal lambang bilangan nol tetapi hal ini tidak mengganggu penulisan lambang bilangan selanjutnya. Karena lambang bilangan Brahmi serupa dengan lambang bilangan Ionik yang penulisannya agak sulit, maka dalam buku ini contoh-contoh lain dari bilangan tersebut tidak dituliskan.

Berbeda dengan lambang bilangan brahmi lambang bilangan kharosti basis sepuluh tetapi tidak ditulis menurut sistem posisi/ letak bilangan. Lambang bilangan satu sampai sembilan dituliskan melalui pengelompokan dua bentuk lambang dan demikian pula untuk bilangan puluhan.

Apabila lambang bilangan satu ditulis sebagai S dan lambang bilangan empat sebagai E maka beberapa lambang bilangan kharosti beserta nilai-nilainya dapat dituliskan sebagai berikut:

SSS	= 3	E	= 4	SSSE	= 7
EE	= 8	SEE	= 9		

Terlihat bahwa letak bayangan yang bernilai lebih kecil diletakan di depan lambang yang bernilai lebih besar. Selanjutnya apabila lambang bernilai sepuluh dimisalkan sebagai A, dan lambang bilangan yang bernilai dua puluh dimisalkan sebagai B, maka beberapa kharosti dapat dituliskan sebagai :

A	= 10	AB	= 30	BB	= 40
ABB	= 50	ABBB	= 70	ABBBE	= 90
ABBSSE	= 56	BBBEE	= 68		

Disini letak A dan B mengikuti ketentuan penempatan bilangan yang bernilai lebih terletak di depan lambang yang bernilai lebih besar. Lambang bilangan kharosti juga belum mengenal lambang bilangan nol namun sistem penulisannya tidak mengalami kesulitan. Contohnya: beberapa lambang kharosti beserta nilainya adalah sebagai berikut:

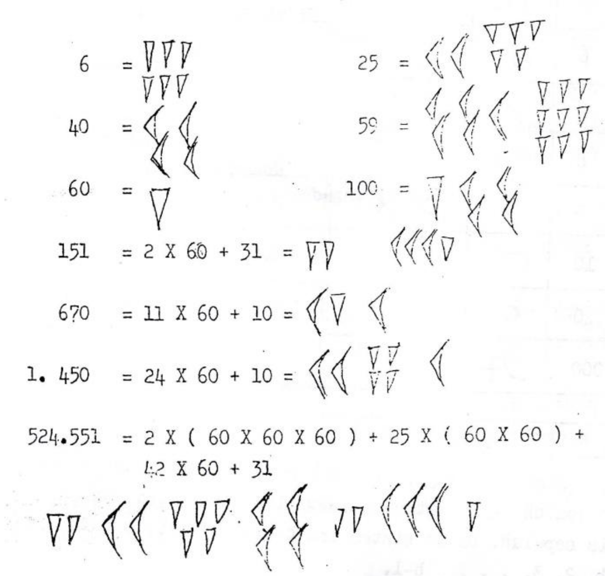
1.7 SISTEM POSISI BILANGAN

Sistem bilangan kita sekarang adalah merupakan sebuah contoh dari sisem posisi / letak bilangan dengan basis sepuluh. Dalam sistem ini basis b dipilih untuk 0, 1, 2, 3,............,b-1. Simbol b pada umumnya disebut digits (0 – 9) dalam sistem sekarang.

Sistem bilangan Hindu-Arab dalam bilangan 206,....angka 2 berarti 2 (10 pangkat2) atau 200, tetapi dalam bilangan 26, angka 2 berarti 2(10) atau 20. Untuk melengkapi simbul-simbul tersebut digunakan pula simbul bilangan nol.

Orang-orang Babylonia (Babylon) antara 2.000 dan 3.000 SM menggunakan suatu sistem seksagasimal (basis bilangan enam puluhan)dengan sistem posisi bilangan.

Contoh:



Sistem ini dapat bertahan sampai 300 SM, hal ini disebabkan karena tidak adanya lambang bilangan nol, yang unik adalah sistem penulisan lambang bilangan maya (mayan di amerika) didasarkan pada sistem pengelompokan bilangan dasar yang mereka gunakan adalah sistem basis vigesimal (sistem basis dua puluh) yang tidak diterapkan secara murni. Dengan sistem ini kita akan memiliki sembilan belas lambang satuan, sembilan belas lambang bilangan dua puluhan, sembilan belas bilangan dua puluh kali dua puluhan, dan demikian seterusnya.

Lambang bilangan mayan agak menyimpang dari aturan ini, mereka hanya meggunakan tujuh belas bilangan dua puluhan dan tetap menggunakan sembilan belas lambang bilangan untuk semua kelipatan lainnya.

Apabila lambang bilangan mayan untuk satu kita menyatakan sebagai S dan lambang bilangan lima kita nyatakan sebagai L, maka beberapa lambang bilangan mayan beserta nilainya dapat kita tuliskan sebagai berikut:

3	= SSS	8	= LSSS	10	= LL
11	= LLS	12	= LLSS	19	= LLLSSSS

Karena lambang mereka ditulis berdasarkan sistem posisi, maka lambang yang sama akan berulang pada kelipatan yang lebih besar tetapi dengan nilai yang berbeda. Penulisan lambang bilangan berdasarkan posisi ini memungkinkan kita untuk melihat bilangan – bilangan itu pada setiap letak bilangan dalam sistem bilangan basis vigesimal yang lebih murni.

Letak bilangan pertama terdiri dari bilangan yang bernilai satu sampai sembilan belas, masing-masing dituliskan melalui gabungan bilangan satu dan lima yang dapat dituliskan secara berulang dalam sistem pengelompokan. Letak bilangan kedua terdiri atas bilangan yang bernilai 1x20, 2x20, 3x20,.........,17x20. Berhenti pada 17x20 inilah yang menyebabkan sitem di atas tidak murni. Dengan cara ini berarti bahwa lambang bilangan berikutnya akan bernilai 18x20 atau 360.

Kiranya penanggalan orang Mayan dengan 360 hari setahun menyebabkan mereka membuat letak bilangan kedua ini 360 atau 18x20. Letak bilangan ketiga terdiri dari bilangan yang bernilai 1x(18x20), 2x(18x20), 3x(18x20), ...,19x(18x20), yakni kembali lagi ke sisitem bilangan vigesimal. Dan demikian seterusnya untuk letak bilangan yang lebih tinggi lagi.

Dengan sistem bilangan Mayan, ditemukan beberapa contoh lambang bilangan beserta nilainya sebagai berikut:

S LSSS = 1x20+8=28

S LLS LLLS = 1x(18x20)+11x20+16=596

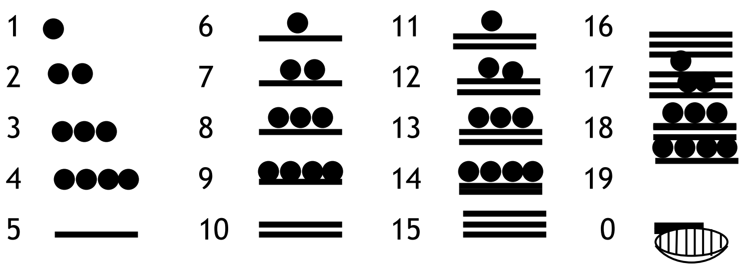
L S SSS LSSSS = 5 x (20x18x20) +1 x (18x20) + 3 x 20 + 9 = 36.429

Lambang bilangan mayan juga mengenal lambang bilangan nol sehingga apabila lambang bilangan nol kita nyatakan sebagai O, maka lambang bilangan yang mengandung nol bilangan mayan adalah sebagai berikut:

L O LLLS = 5 x (18 x 20)+ 0 x 20 + 6 = 1.816

S O SS LLSS SS = 1x(20x20x18x20)+0x(20x18x20)+2x(18x20)+12x20 =144.962

Lambang bilangan nol mereka lukiskan sebagai mata tang hampir tertutup atau sebagai kerang, sedangkan lambang bilangan satu sebagai titik dan lambang bilangan lima sebagai garis mendatar.



Orang mayan menamakan satu sebagai hun, bilangan dua puluh sebagai kal, bilangan 18x20 sebagai bak, bilangan 20x18x20 sebagai pik, bilangan 20x20x18x20 sebagai calab, bilangan 20x20x20x18x20 sebagi kinchel dan 20x20x20x20x18x20 sebagai alce.

Untuk melengkapi tentang aneka ragam bilangan pada uraian berikutnya diketengahkan lambang bilangan aztek dan bilangan cina ilmiah. Penyelidikan sejarah aztek dimeksiko menunjukkan bahwa bangsa aztek antara abad kedua belas dan abad keempat belas telah memiliki lambag bilangan. Penulisan lambang bilangan dilakukan berdasarkan sistem pengelompokan dengan mengikuti basis vigesimal pengulangan sehingga menyebabkan penulisan lambang tersebut menjadi panjang. Lambang bilangan aztek tidak ditulis bedasarkan sistem posisi bilangan, sehingga setiap kelipatan dua puluh dituliskan dengan lambang bilangan tersendiri. Menurut sistem penulisan bilangan ini apabila lambang bilangan satu dimisalkan P maka lambang bilangan 1,2,3,4,......,19 harus ditulis dengan pengulangan P, sehingga banyak bilangan yang dimaksud. Untuk bilangan 15 misalnya ditulis PPPPPPPPPPPPPPP.

Lambang bilangan berikutnya adalah dua puluh, jika lambang bilangan dua puluh Q maka pengulangan lambang Q dilakukan dari 1x20, 2x20, 3x20,......,19x20 lambang bilangan yang setingkat lebih tinggi adalah 20x20 misalkan dinyatakan dengan R, maka pengulangan R dilakukan dari: 1x(20x20), 2x(20x20), 3x(20x20),......,19x(20x20).sedangkan lambang bilangan tertinggi yang mereka gunakan adalah 20x20x20 jika dimisalkan dengan S maka pengulangan lambang bilangan S dilakukan dari: 1x(20x20x20), 2x(20x20x20), 3x(20x20x20),......,19x(20x20x20). Bilangan aztek tidak mengenal lambang bilangan nol. Contoh lambang bilangan aztek beserta nilainya sebagai berikut:

12 =PPPPPPPPPPPP

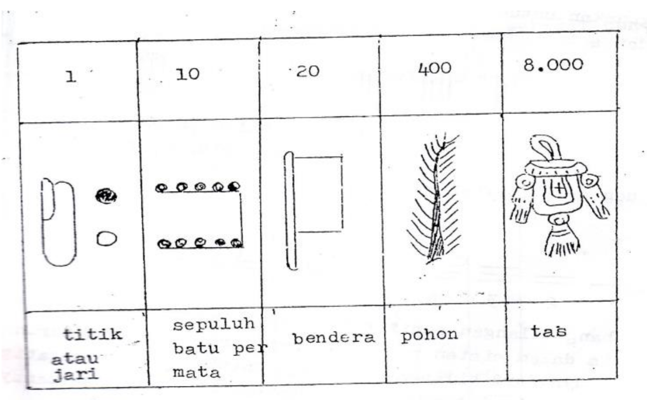
57 =2x20+17=QQPPPPPPPPPPPPPPPPP

824 =2x(20x20)+1x20+4=RRQPPPP

16.443=2x(20x20x20)+1x(20x20)+2x20+3=SSRQQPPP

8.005 =1x(20x20x20)+5=SPPPPP

Lambang bilangan, mereka dituliskan sebagai gambar benda, satu diantaranya sebagai titik atau jari telunjuk, dua puluh dengan bendera, 20x20 dengan pohon berdaun, sedangkan 20x20x20 dengan tas.lambang bilangan axtek dan penggunaannya:

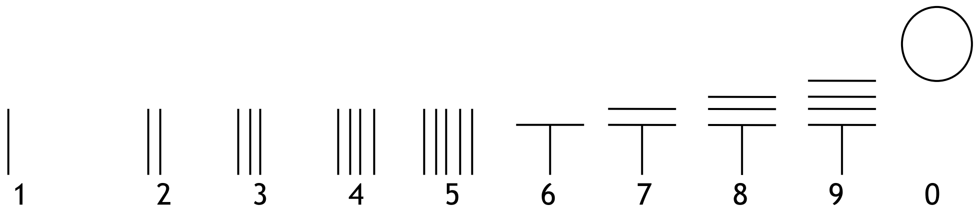


Dari contoh di atas, kiranya dalam uraian selanjutnya tidak perlu dilukiskan lambang-lambang bilangan yang lain.

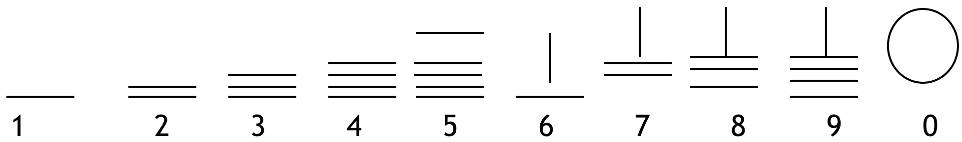
Zaman dinasti Sung sekitar 1000 tahun yang lalu telah menggunakan lambang bilangan nol pada penulisan bilangan, hal tersebut sangat penting sebab mereka menulis bilangan berdasarkan sistem letak/posisi. Lambang bilangan zaman kuno Cina ilmiah menggunakan dua macam simbul diantaranya tegak dan mendatar secara bersama-sama, sedangkan langkah untuk menyederhanakan dilakukan pada pengulangan sebanyak lima kali pada bilangan yang lebih besar dari lima.

Penulisan secara bersama-sama itu ditentukan dengan suatu aturan antara lain:

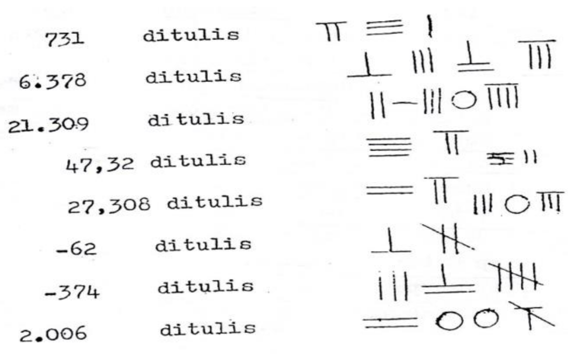
a. Tempat ganjil merupakan lambang bilangan tegak yang digunakan untuk bilangan satuan, ratusan, puluh ribuan, dan seratus ribuan.



b. Tempat genap merupakan lambang bilangan mendatar yang digunakan untuk bilangan puluhan, ribuan, ratus ribuan, dan seterusnya.



c. Lambang bilangan positip yang lebih kecil dari satu ditulis dalam sistem pisisi dengan cara sedikit menurunkan letak dari bilangan lainnya. Untuk bilangan negatip mereka memberi tanda dengan mencoret bilangan satuannya. Contoh:



Cina kuno pun telah mengenal perkalian, sebagai contoh perkalian bilangan antara 234 dengan 645 jika ditulis dengan lambang kita sekarang adalah sebagai berikut:

2	3	4
6	4	5

1	2				
		8			
		1	0		
		8			
		1	2		
			1	5	
		2	4		
			1	6	
				2	0
1	5	0	9	3	0

1.8 PERMULAAN BERHITUNG

Suatu alat tulis yang ada persamaannya dengan kertas pertama kali dinamakan papyrus diperoreh dari orang mesir pada 650 SM yang telah dikenalkan ke Yunani.

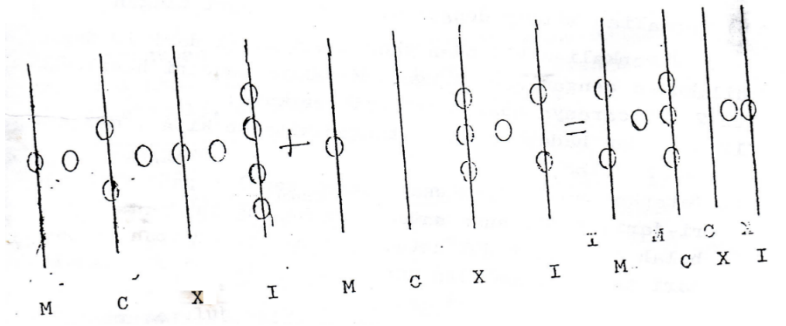
Alat itu dibuat dari tumbuh-tumbuhan air yang dinamakan papu, batang dari tumbuhan tersebut dipotong menjadi jalur jalur yang panjang dan diletakan berjajar yang dibentuk menjadi satu lembaran seperti kertas. Lapisan lain diletakan diatasnya kemudian direndam kedalam air terlebih dahulu. Lembaran-lembaran itu selanjutnya dipres dan dijemur dipanas matahari, setelah kering maka telah siap untuk digunakan.

Ternyata papyrus pada saat itu cukup mahal, apabila digunakan dalam jumlah yang besar seperti penggunaan kertas bergaris, cara penulisan lain dilakukan pada kulit binatang yang biasanya kulit domba, biri-biri dan kulit anak sapi.

Penggunaan kertas dari kulit juga cukup mahal, sehingga dalam abad pertengahan menghapus tulisan tinta pada naskah yanga telah ditulisi secara berulang-ulang, hal ini biasa dinamakan ”palinpsets” (palin = sekali lagi) sedangkan (psao = menggosok).

Kerusakan dalam derhitung pada saat itu oleh para ahli matematika diatasi dengan ditemukannya abacus (yunani: abax = talam pasir). Penemuan ini merupakan suatu hasil pemikiran yang cukup besar dalam perkembangan perhitungan pertama yang menggunakan mekanik. Prosesnya dengan melukis empat garis vertikal parallel dari kiri kekanan yang menggambarkan: M< C< X dan I simbul bilangan: 1.000, 100, 10 dan 1 contoh dalam menjumlah:

MDCCLXIX dengan MXXXVII

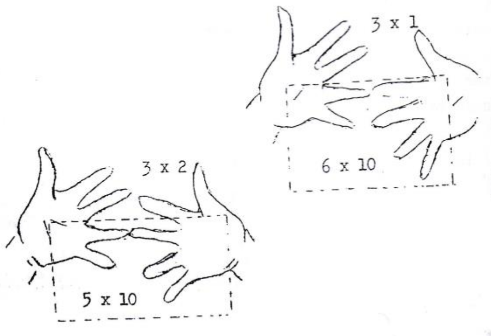


Usaha semacam muncul yaitu perkalian dengan jari-jari tangan yang berasal dari zaman kuno dan sampai sekarang oleh para petani Wallchia di Rumania Selatan masih digunakan.

a. Perkalian dangan 9 menggunakan jari sebagai berikut.
   Buka dan hadapkan tangan kearah kita berilah nomor kesepuluh jarinya dari nomor satu sampai sepuluh, nonor satu untuk ibu jari kiri, nomor dua untuk telunjuk jari kiri,....,nomor lima untuk kelingking jari kiri, nomor enam untuk kelingking jari kanan,...,nomor sepuluh untuk ibu jari kanan. Misalkan menghitung 6 x 9, tentukanlah jari yang bernomor enam (kelingking jari kanan) maka di bawah jari yang ditekuk ada lima jari yang merupakan angka puluhan, sedangkan di atas jari yang ditekuk ada empat jari yang merupakan satuanya jadi 6 x 9 = 54

b. Perkalian silang dengan menggunakan jari tangan.
   Perkalian bilangan yang lebih kecil dari sepuluh dapat dilakukan dengan jari tangan. Misalnya mencari hasil kali 7x8 caranya adalah sebagai berikut:

1. buka dan hadapkan kedua tangan kita ke kita (menghadap kedepan).
2. tetapkan nomor dari enam sampai sepuluh pada semua jari-jari, nomor enam untuk jari kelingking pada kedua belahan tangan, tujuh untuk jari manis, delapan untuk jari tengah, sembilan untuk jari telunjuk dan sepuluh untuk ibu jari.
3. Lekatkan/temukanlah ujung jari yang bernomor tujuh (jari manis kiri) dengan jari yang bernomor delapan (jari tengah kanan).
4. Kedua jari yang bertemu sama-sama jari-jari dibawahnya berjumlah lima dan dihitung sebagai 5 x10 = 50.
5. Diatas jari-jari yang bertemu ujung nya terdapat tiga jari tangan kiri dan dua jari pada tangan kanan. Kalikan kedua bilangan itu: 3 x 2 = 6 dan tambahkan hasilnya dengan hasil di atas (nomor 4) akan diperoleh hasilnya 7 x 8 = 56.



Kita dapat mengubah sedikit saja aturannya, maka dengan jari-jari ini di peroleh suatu perkalian bilangan di atas 10, di atas 15, diatas 20 dan seterusnya.

1.9 BASIS SEBARANG

Apabila ditinjau kembali bahwa untuk menggambar suatu bilangan dalam suatu sistem posisi bilangan basis, diperlukan simbul-simbul dasar bilangan: nol, bilangan bulat positif sampai b-1.

Basis sepuluh merupakan suatu hal yang sangat penting bagi perkembangan peradaban manusia, jika b $\leq$ 10 kita dapat mengunakan simbul angka biasa, sebagai contoh 3012 dapat dianggap sebagai bilangan basis empat dengan simbul: nol, satu, dua, tiga. Jelasnya apabila bilangan itu dianggap basis 4 ditulis (3.012)4 kecil, jika tidak ditulis basisnya umumnya merupakan bilangan basis sepuluh, sedangkan bagi basis bilangan yang lebih besar dari sepuluh perlu ditambah simbul baru. Misalnya pada bilangan basis dua belas maka simbulnya: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 t dan e artinya t untuk simbul 10 (ten) dan e untuk simbul 11 (eleven).

$(3.012)_4 = 3.4^3 + 4^2 + 1.4 + 2.4^0 = 198.$

$(3.\text{tle})_{12} = 3.12^3 + 10.12^2 + 1.12 + 11.12^{\,0} = 6.647$

Merupakan bilangan dengan basis 10 ke basis

N = $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ \dots + a_1 b + ab + a_0$

$0 \leq a_1 < b$

Persamaan di atas jika dibagi dengan b akan diperoleh:

N/b = $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ \dots + a_2 b + a_1 + \frac{a_0}{b}$

N/b = $N^1 + \frac{a_0}{b}$

Sisa a_0 dari pembagian tersebut adalah angka terakhir yang diperlukan, sebagai contoh: merupakan bilangan 198 menjadi bilangan dengan basis 4 bilangan 6.647 menjadi basis 12.

4/198/sisa2

4/49/sisa1

4/12/sisao

4/3/sisa3, maka 198= (3.012)

12/6.647/ sisa e

12/553/ sisa l

12/46/ sisa t

12/3/sisa 3, maka 6.647= (3.tle)

Kita dapat pula membuat penjumlahan dan perkalian basis 4 dalam bentuk tabel seperti:

+	0 1 2 3
0	0 1 2 3
1	1 2 3 10
2	2 3 10 11
3	3 10 11 12

x	0 1 2 3
0	0 1 2 3
1	1 2 3 10
2	2 3 10 11
3	3 10 11 12

Suatu permainan yang menggunakan basis bilangan dua.

a. Permainan NIM

Suatu permainan yang dilakukan oleh dua orang. Permainan ini dilakukan dengan membuat beberapa himpunan batang korek api (dapat pula kelereng, kerikil, biji-bijian yang kering). Misalkan terdapat 4 himpunan batang korek api yang setiap himpunan memiliki jumlah korek api sebarang.kemudian salah seorang pemain mengambil satu atau beberapa batang korek api yang diambil terserah kepada pemain, boleh satu, boleh dua, boleh semua (asal pada salah satu dari himpunan).

Giliran pada permainan kedua mengambil satu, dua atau beberapa buah korek api juga terserah pada pemain kedua ini. Begitu seterusnya kedua pemain bergaintian sampai semua batang korek api tersebut habis terambil. Sedangkan pemain yang mengambil paling akhir merupakan pemain yang dinyatakan kalah.

b. Menebak umur seseorang

Misalkan kita akan menebak umur seseorang yang umurnya kurang atau sama dengan 60 tahun. Perlu kita susun bilangan-bilangan 1,2,3,4,.....,60 itu dalam 6 buah kartu sebagai terlihat di bawah ini:

I 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59	II 2 3 6 7 10 11 14 15 18 19 22 23 26 27 30 31 34 35 38 39 42 43 46 47 50 51 54 55 58 59
III 4 5 6 7 12 13 14 15 20 21 22 23 28 29 30 31 36 37 38 39 44 45 46 47 52 53 54 55 60	IV 8 9 10 11 12 13 14 15 24 25 26 27 28 29 30 31 40 41 42 43 44 45 46 47 56 57 58 59 60
V 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 58 60	VI 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60

Mintalah pada orang yang akan ditebak umurnya untuk meneliti serta menunjukkan pada kartu nomor beberapa saja tertera umurnya. Atau dapat pula orang tersebut diminta menjawab”ya” jika umurnya tercantum pada kartu dan ”tidak” jika tak tertera pada semua kartu (dari nomor I sampai dengan VI). Misalkan ia mengatakan ya pada kartu yang bernomor II, III, V, maka umurnya pada saat ini adalah 22 tahun. Ini diperoleh dengan cara menjumlahkan semua bilangan pada sudut kiri atas dari setiap kartu yang ia nyatakan ”ya”. Cara tersebut di atas dapat pula digunakan untuk menebak tanggal lahir seseorang. Bagaimana cara menyusun bilangan-bilangan yang terdapat dalam masing-masing kartu?

Berikut ini disajikan beberapa bahasa dalam berhitung.

Bilangan	Sansekerta	Yunani	Latin	Jerman	Jepang
1	Eka	En	Unus	Eins	Ici
2	Dwa	Duo	Duo	Zwei	Ni
3	Tri	Tri	Tres	Drei	San
4	Catur	Tetra	Quatuor	Vier	Si (yon)
5	Panca	Pente	Quinque	Funf	Go
6	Sas	Hex	Sex	Sechs	Roku
7	Sapta	Hepta	Septem	Siaben	Sici
8	Asta	Octo	Octo	Acht	Haci
9	Nawa	Ennea	Novem	Neun	Ku
10	Dasa	Deca	Decem	Zehn	Zyu
100	Cata	Ecaton	Centum	Hundett	Syaku
1.000	Sehastre	Xilia	Mille	Tausend	Sen
10.000		Myriades			Man

Sedangkan ciri-ciri dari bilangan kuno adalah sebagai berikut:

Nama	pengelompokan	Lambang bilangan pengganti	Dasar bilangan	Sistem letak	Lambang nol
Mesopotania	Ada	Ada	60	Ada	Tak ada
Mesir kuno	Ada	Tidak ada	10	Tak ada	Tak ada
Attika	Ada	Ada	10	Tak ada	Tak ada
Ionik	Tak ada	Tak ada	60 & 10	Tak ada	Tak ada
Romawi	Ada	Ada	10	Tak ada	Tak ada
Cina kuno	Ada	Ada	10	Ada	Ada
Maya	Ada	Tak ada	20	Ada	Ada
Arab kuno timor	Tak ada	Tak ada	10	Ada	Ada
Kharosti	Ada	Tak ada	10	Tak ada	Tak ada

Soal

1. Tuliskan ke dalam sistem bilangan Babylonia, Mayan, Cina Ilmiah, Yunani kuno
   a. 176 b. 789 c. 2.648 d. 19.635. e. 33.627.
2. Sebuah neraca dengan lengan yang sama panjang dilengkapi batu timbangan sebesar: 1, 2, 2^2 , 2^3 dan seterusnya. Bagaimana cara menimbang berat benda b gram dalam gram dengan batu timbangan di satu piringan neraca tersebut.

BAB II

MATEMATIKA ZAMAN BABYLONIA DAN MESIR

Mula-mula matematika berkembang berdasarkan kebutuhan praktis yang di sesuaikan dengan kebudayaan suatu bangsa. Seperti halnya akibat dari adanya sungai-sungai besar yang baru terbentuk di Asia dan Afrika yaitu sungai Nil di Afrika, sungai Tigris dan Euphrates di sebelah barat Asia, sungai Indus dan sungai Gangga di pusat Asia Selatan, sungai Hwang Ho dan sungai Yangste di sebelah timur Asia. Serta adanya tuntutan kebutuhan masyarakat saat itu antara lain: pengeringan rawa, pembagian petak-petak sawah garapan, pengaturan irigasi untuk pertanian, keahlian mengatur keuangan dan administrasi telah dilaksanakan sesuai dengan perkembangan penduduk.

Jadi mula-mula matematika dapat dikatakan terbentuk di negara timur kuno sebagai matematika praktis dalam pertanian, pembangunan, perhitungan kalender, sistem berat dan ukuran untuk melengkapi perhitungan hasil panen, cara menyimpan hasil pertanian/pengawetan, cara mengukur luas tanah/membagi petak-petak sawah, perdagangan serta beraneka ragam masalah kehidupan masyarakat saat itu.

Dari sinilah terlihat bahwa aljabar di kembangkan dalam bentuk ilmu hitung (aritmetika), sedangkan ilmu ukur/geometri timbul dari dorongan kebutuhan akan proses pengukuran.

Perhitungan yang digunakan biasanya secara khusus tidak secara umum, misalnya penyelesaian persamaan kuadrat di lakukan dalam bentuk khusus yang diterangkan sebagian demi sebagian.

Kesulitan lain yang dihadapi para matematisnya adalah mencatat dan memelihara hasil penemuan-penemuannya pada waktu itu dalam bentuk tulisan dan gambar.

Babylonia menulis hasil karyanya di batu peringatan dari tanah, Mesir di batu dan daun Papyrus yang akhirnya lenyap karena iklim panas yang melanda di daerah itu.

Tetapi Tiongkok dan India dari kulit kayu dan bambu, sehingga jumlah definisi dan informasinya sekarang tentang matematika dari babylonia kuno dan Mesir sedikit yang diketahui daripada Tiongkok dan India.

A. BABYLONIA

A.I. SUMBER-SUMBER

Ahli tanah Mesopotania telah mengadakan penelitian yang di milai sejak sebelum pertengahan abad ke-19 menemukan setengah milion bata tertulis ($\pm$ 50.000 tablet) yang di gali di Nipur Kuno, berapa penemuan yang dapat dikatagorikan utama disimpan di Musium paris, Berlin dan London. Penelitian ditanah Yale Columbia dan Universitas Bennsylvania terdapat 50.000 bata tertulis.sekitar 300 di antaranya dikemukakan ada persamaannya dengan matematika yang cukup bernilai yaitu terdiri dari daftar dan soal-soal matematika.

Dari kertas-kertas kuno dan bata tertulis inilah yang dapat dianggap sebagai petunjuk tentang semua fase perkembangan kehidupan sejarah Babylonia termasuk kemajuan-kemajuan matematika yang telah dan pernah tercapai.

Matematika Sumerian sekitar 2.100 SM merupakan suatu kelompok terbesar dari hasil dinasti Babylonia I raja Hammurabi sekitar 1.600 SM,raja Nebuchadnezzar sekitar 600 SM sampai 300 SM yang dilanjutkan pemerintahan Persian dan Seleucidan.

Berdasarkan peninggalan tersebut di atas dapat merupakan suatu bukti bahwa Sumerian Kuno telah mengenal tentang kepentingan keperluan rumah tangga seperti: uang, resep, surat perjanjian, perhitungan, sistem berat dan ukuran.

Proses ilmu hitung dari tiga ratus bata tertulis yang berisikan matematika dua ratus diantaranya menunjukkan perkalian dan pertimbal-balikan tentang tabel kuadrat pangkat tiga dan bahkan tabel eksponen (pangkat). Tabel kebalikan biasanya digunakan untuk membantu dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan pembagian dan perkalian. Orang Babylonia menggunakan kalender yang di mulai pada saat matahari berada tepat pada katulistiwa dan bulan tersebut di namakan sesudah Taurus (keadaan matahari di Taurus sekitar tahun 4.700 SM).

Jadi kemungkinan besar orang Babylonia telah mempunyai ilmu hitung jauh sebelum abad ke- 4 atau ke-5 millenium sebelum masehi.

A.2. GEOMETRI

Orang Babylonia pada 2.000 sampai 1.600 SM mungkin telah mengetahui tentang luas bujur sangkar, luas segitiga siku-siku, segitiga sebarang, luas trapesium yang mempunyai sisi tegak pada sisi sejajarnya, isi paralellepipedium tegak, isi prisma tegak dengan alas berbentuk trapesium.

Keliling lingkaran sama dengan tiga kali diameter, luasnya sama dengan seperduabelas kuadrat kelilingnya (sebagai dasar untuk koreksi hasilnya di ambil $\pi = 3$). Isi kalender sama dengan Luas alas kali tingginya, isi Limas sama dengan isi kerucut sama dengan isi piramid sama dengan tinggi kali setengah Luas alasnya. Juga mereka telah mengetahui bahwa dalam segitiga sama kaki garis tegak lurus ke alas akan membagi alas sama panjang dan sudut siku-siku sama dengan setengah sudut $\frac{1}{2}$ lingkaran.

Jasa orang Babylonia yang sangat penting artinya bagi kita yaitu atas hasil penemuan tentang keliling lingkaran yang dibagi menjadi 360 bagian, keterangan ini belum dapat dikemukakan sampai sekarang.

Ukuran waktu bangsa Sumerian pertama kali di ambil dari satu unit jarak terpendek " Mile Babylonia" atau kira-kira tujuh mile kita, sedangkan satu hari sama dengan dua belas mile waktu, satu hari penuh sama dengan satu revolusi bumi di angkasa yang kelilingnya dibagi dalam dua belas bagian. Tetapi mile Babylonia sendiri dibagi dalam tiga puluh bagian yang sama dan didapat dari (12) (30) sama dengan 360 bagian yang sama dari sebuah lingkaran.

A.3. ALJABAR

Pada tahun 2.000 SM ilmu hitung Babylonia telah berkembang menjadi bentuk aljabar, bahkan tidak hanya pemecahan persamaan kuadrat saja tetapi telah membicarakan persamaan pangkat tiga dan empat.

Sebuah bata bertulis diketemukan berisi tidak hanya daftar kuadrat dan pangkat tiga dari bilangan bulat satu sampai tiga puluh, tetapi juga kombinasi $n^3 + n^2$. sejumlah soal yang berbentuk $x^3 + x^2 = b$ yang dapat diselesaikan dengan tabel $n^3 + n^2$.

Dari bata bertulis Yale sekitar tahun 1.600 SM terdapat suatu soal yang tak dapat diselesaikan dengan persamaan kuadrat, misalnya : $xy = 600$, $150 (x - y) - (x + y)^2 = -1.000$.

Contoh lain : $xy = a$, $bx^2 / y + cy^2 / x + d = 0$ yang menjadi persamaan pangkat enam dalam x, yang mana merupakan persamaan kuadrat dalam x^3.

Neugebauer menemukan dua buah soal yang cukup penting di bata tertulis Louvre sekitar 300 SM yang beisikan :

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1 \text{ dan}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{5}\right)\right]55 = 385$$

Penemuan tersebut merupakan suatu bukti bahwa orang Babylonia telah mengenal rumus :

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{\left(r^{n+1} - 1\right)}{r - 1} \qquad \text{dan}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{[2n+1]}{3} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$$

Yang pertama diketemukan pada zaman Yunani dan yang kedua oleh Archimedes. Di samping itu matematisi Babylonia juga memberi beberapa pendekatan penting untuk akar kuadrat dan tak kuadrat, seperti $\frac{17}{12}$ untuk V2 dan $\frac{17}{24}$ untuk $\frac{1}{v2}$, kemungkinan orang Babylonia telah menggunakan rumus :

$$\sqrt{a^2 + h} = \left(a^2 + h\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{a + h}{2a}$$

Pendekatan penting untuk V2 adalah :

$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1{,}414213$ dikemukakan pada bata bertulis Yale sekitar 1.600 SM

A.4. PLIMPTON 322

Yang cukup menarik dari bata tertulis matematika Babylonia yaitu Plimpton 322 artinya bagian angka log 322 dalam G.A PLIMPTON di Universitas Columbia, seperti gambar di bawah ini.

199	169	1
3.369	4.825 (11.521)	2
4.601	6.649	3
12.709	18.541	4
65	97	5
319	481	6
2.291	3.541	7
799	1.249	8
481 (541)	769	9
4.961	8.161	10
45	75	11
1.679	2.929	12
161 (25.921)	289	13
1.771	3.229	14
56	106 (53)	15

Bata tertulis dalam penulisan Babylonia kuno yang didapat sekitar 1.600 SM di lukiskan oleh Neugebauer dan Sachs tahun 1945.

Penemuan benda peninggalan tersebut sedikit disesalkan sebab sebagian sudut kirinya robek sampai sedikit ketengah. Bata tertulis itu terdiri dari tiga kolom lengkap yang telah di usahakan untuk digambar kembali edalam benttuk angka desimal kita. Kolom kedua sepintas lalu terlihat tak karuan, tetapi seseorang telah menemukan hubungan angka ini dengan empat buah kecualian yang merupakan hypotenusa dan kaki-kaki dari segitiga siku-siku. Pada baris ke dua sukar dijelaskan, sedangkan yang lain sudah dapat di atasi, baris ke sembilan , 481 dan 541 adalah (8,1) dan (9,1) dalam sistem sexagesimal.

Baris ke tiga belas adalah kuadrat dan baris terakhir adalah setengah dari harga tersebut. Sedangkan tiga bilangan bulat positif (3 , 4 , 5) merupakan sisi segitiga siku-siku yang diketahuio sebagai dalil Pythagoras asli (a, b,c), menunjukkan suatu para meter sebagai berikut :

$$a = 2uv, b = u^2 - v^2, c = u^2 + v^2$$

Dimana u dan v relatif pime dan u > v, jika u = 2 dan v = 1 diperoleh segitiga asli a = 4, b = 3 dan $c = 5$.

Babylonia pada saat sebelumnya telah mengenal parameter untuk sisi siku-siku a, b dan sisi miring c. Bukti tersebut diperkuat dengan diketahuinya u dan v juga $a(a = 2uv)$ angka sexagesimal yang berurutan.

B. MESIR

Matematika Mesir kuno tidak setinggi seperti matematika babylonia. Mungkin karena perkembangan ekonomi babylonia lebih maju disamping tempat perdagangan yang cukup ramai, sedangkan mesir letaknya agak terisolir. Sesuai dengan bata bertulis yang ditemukan ternyata Babylonia lebih banyak menuliskan soal-soal matematika, sedangkan bangsa Mesir menurut sejarah merupakan negara pertanian.

Bangsa Mesir memiliki peninggalan yang berniai cukup tinggi yaitu makam-makam yang berbentuk piramid, candi dengan kerajaan yang dindingnya penuh dengan tulisan dan beberapa daun papyrus serta masih banyak pula yang sudah hilang. Sedangkan peniggalan-peninggalan yang dapat disajikan disini antara lain :

1. Tahun 1.300 SM di mesium Oxford terdapat tongkat kerajaan mesir, bertuliskan bilangan jutaan dan ribuan angka hieroglyp Mesir tentang catatan kemenangan militernya.
2. Piramid Gizeh yang besar didirikan sekitar 2.900 SM yang dapat diselesaikan berkat pengetahuan matematika dan teknik yang cukup tinggi. Bangunan ini meliputi 13 hektar yang tersusun dari 2.000.000 batu balok seberat 2,5 ton diikat secara bersama. Batu ini dibuat dari batu pasir berbentuk bujur sangkar yang diletakan disisi sungai nil. Atapnya dibuat dari lima puluh empat ton balok granit, dua puluh tujuh feet panjangnya dan empat feet tebalnya yang diletakan pada lubang galian enam ratus mil panjangnya dan dua ratus feet lebarnya di atas tanah. Ternyata sisi alas perseginya terdapat kesalahan relatif 1/14.000 dan kesalahan relatif dari sudut siku-sikunya 1/ 27.000, pekerjaan ini diselesaikan oleh 100.000 tenaga kerja militer selama tiga puluh tahun.
3. Tahun 1.850 SM matekatika papyrus Moskow berisikan dua puluh lima soal dan diterbitkan pada tahun 1930.

4. Tahun 1.850 SM alat astronomi tertua yang masih ada sebagai gabungan garis tegak dengan sinar tongkat, sekarang tersimpan di musium Berlin.
5. Tahun 1.650 SM papyrus Rhind (Ahmes) merupakan buku saku metematika mengenai alam dan berisikan delapan puluh lima buah soal yang disalin dalam huruf hieratic oleh Ahmes dari tulisan aslinya. Papyrus tersebut dipindah dari Mesir oleh A. Hennry Rhind yang kemudian diminta oleh musium Inggris. Papyrus Moskow lah yang banyak mengandung matematika mesir kuno. Papyrus Rhind diterbitkan pada tahun 1927.
6. Pada tahun 1500 SM terdapat obelisk terbesar yang menjulang keatas di depan candi matahari di Thabes. Panjang seratus lima feet, alasnya berbentuk bujur sangkar dengan sisi sepuluh feet yang beratnya sekitar empat ratus tiga puluh ton.
7. Tahun 1.500 SM musium Berlin memiliki sebuah alat waktu matahari Mesir yang tertua.
8. Tahun 1.350 SM papyrus Rollin yang sekarang tersimpan di louvre berisikan beberapa perhitungan tentang luas yang cukup teliti, merupakan suatu bukti penggunaan praktis dari matematika.
9. Tahun 1.167 SM papyrus Harris merupakan sebuah dokumen dari Ramses ke IV ketika bertahta.

B.1. ARITMATIKA DAN ALJABAR

Batu bertulis yang berisikan seratus sepuluh soal aritmatika didapat di Moskow dan papyrus Rhind, umumnya sangat sederhana dan bersifat praktis misalnya cara orang mesir dalam menjumlah.

Perkalian menurut orang mesir dengan menggunakan sistem menduakalikan.

Untuk mencari perkalian 26 x 33, yaitu 26 = 16 + 8 + 2

1	33
2	66
4	132
8	264
16	<u>528</u>
	858

Sehingga diperoleh :

26 x 33 = (2 + 8 + 16) x 33
= 66 + 264 + 528 = 858

Dalam membagi 753 dengan 26 mereka lakukan sebagai berikut :

1	26
2	52
4	104
8	208
16	416
28	

753 = 416 + 337
= 416 + 208 + 129
= 416 + 208 + 104 + 25

Jadi hasilnya = 16 + 8 + 4 = 28

Sisa pembagian tersebut = 25

Sedangkan dalam menuliskan pecahan dijadikan bentuk jumlah pecahan satuan (pecahan dengan pembilang satu), kecuali 2/3.

Pecahan yang dibuat (papyrus Rhind) berbentuk 2/n dengan 5 < n < 101.

Misalnya :

2/7 = ¼ + 1/ 28

2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/ 776

Banyak soal-soal matematika dari papyrus Rhind dan Moskow diselesaikan dengan metode “ kedudukan palsu “.

Untuk mencari suatu bilangan yang apabila di jumlahkan dengan sepertujuhnya menghasilkan dua puluh empat.

Misalkan bilangan itu x, maka diperoleh persamaan x + x/7 =24. mereka umpamakan jawabannya adalah tujuh (merupakan jawaban palsu), setelah dimasukan nilai tersebut diperoleh hasil 7 + 7/7 = 8.

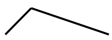
Tetapi pada pernyataan telah diketahui bahwa hasil jumlah tersebut seharusnya 24 dan bukan 8. Ini berarti bahwa bilangan yang harus dicari adalah tiga kali jawaban palsu atau 3 x 7 = 21.

Sebuah papyrus sekitar tahun 1.950 SM didapat di kahun berisikan soal “suatu luas dari 100 satuan, merupakan jumlah luas dua buah bujur sangkar yang panjang sisinya berbanding senagai 1 : ¾”

Apabila kita tulis dalam simbol aljabar $x^2 + y^2 = 100$ dengan x = 3y/4.

Dengan kedudukan palsu kita mengambil y = 4, x = 3 ternyata hasilnya adalah $x^2 + y^2 = 25$, jika dibandingkan dengan persamaan di atas akan diperoleh : x = 2 x 3 = 6 dan y = 2 x 4 = 8.

Dalam papyrus Rhind diketemukan pula simbol untuk tanda “plus” adalah 

Dan tanda “minus” 

B.2. GEOMETRI

Dalam papyrus Moskow dan Rhind terdapat dua puluh enam soal geometri tentang perhitungan luas tanah dan isi. Para ahli rupanya telah membuktikan bahwa orang Mesir kuno telah dapat menghitung luas segitiga yaitu hasil kali setengah alas dan tinggi. Sedangkan luas lingkaran diambil 8/9 kali panjang diameter dikuadratkan, isi slinder sama dengan luas alas kali tinggi. Nilai dalam perhitungan ini ditentukan sebesar 256/81 atau sekitar 3,160...

Luas segi empat sembarang dengan sisi a, b, c dan d adalah

K = ¼ (a + c) (b + d), ternyata kita ketahui penemuan ini salah (rumus yang salah).

Dalam papyrus Moskow terdapat pula perhitungan isi limas beraturan segiempat terpancung yang tepat.

Contoh soal no 79 ... papyrus Rhind.

Dalam soal ini ditunjukan sekumpulan data sebagai berikut :

Houses	(Rumah-rumahan)	7
Cats	(kucing)	49
Mice	(tikus)	343
Head of wheat	(kepala gandum)	2.401

Hekat measuares (ukuran berat) 16.807

19.807

Barangkali penulis matematika saat itu memperkenalkan bentuk simbul : rumah, kucing, dan seterusnya sebagai pangkat satu, dua dan seterusnya.
Hal ini bandingkan dengan “ ada tujuh orang nelayan pergi ke Roma, setiap nenek membawa tujuh keledai, setiap keledai membawa tujuh karung, setiap karung berisi tujuh roti, setiap roti terdapat tujuh buah pisau dan setiap pisau memiliki tujuh buah sarung”

Nenek, keledai, karung, roti, pisau dan sarung, berapakah jumlahnya yang ada dalam perjalanan ke roma ? soal ini terdapat dalam buku “Liber Abaci” oleh Leonardo Fibonacci tahun 1.202

SOAL LATIHAN

1. Carilah suatu bilangan apabila dijumlahkan dengan sepertujuhnya menghasilkan 192? (dengan metode Mesir “kedudukan palsu”)
2. Pecahan satuan.
    a. Tunjukkan z/pq = 1/pr + 1/qr
       Dimana r = (p + q) / z
       Rumus ini terdapat dalam papyrus yang di tulis dalam bahasa Yunani (500-800) di kota Akhmir di Sungai Nil Mesir.
    b. Ubahlah 2/7 dalam dua pecahan satuan.
    c. Ubahlah 2/99 dalam dua pecahan satuan secara lima cara.
3. Aljabar Mesir (dari papyrus Rhind)
    a. Suatu bilangan, 2/3 bagiannya, ½ bagiannya, 1/7 bagiannya dijumlahkan hasilnya adalah 291. berapakah bilangan itu. (dengan kedudukan palsu, hasilnya 126)
    b. Bagilah 100 roti kepada lima orang sehingga bagian-bagian mereka merupakan deret aritmetik dan 1/7 dari jumlah ketiga bagian terbesar sama sengan jumlah kedua bagian yang terkecil (jawab denagn cara modern)
4. Soal geometri Babylonia bersifat aljabar hal ini ditunjjukan sebagai berikut “Luas daerah A terdiri dari jumlah dua bujur sangkar adalah 1.000. Panjang sisi salah satu bujur sangkar tersebut adalah 10 lebih kecil dari 2/3 panjang sisi bujur sangkar yang lain carilah sisi dari bujur sangkar tersebut?
5. Jika panjang sisi-sisi AB, BC, CD dan DA dari sebuah segiempat adalah a, b, c, dan d. K merupakan luasnya, buktikan bahwa K ≤ (ad + bc) / 2. K = (ad + bc) / 2 jika dan hanya jika sudut A dan B adalah siku-siku.
6. Sebuah bata bertulis Babylonia diketemukan menunjukan daftar nilai dari n3 + n 2 untuk n = 1 sampai ke 30. Buatkan sebuah daftar tersebut untuk n = 1 sampai dengan n = 10.
7. Dari soal no. 21 diatas buktikan bahwa : K ≤ (a + c)(b + d) /4, bernilai sama jika ABCD merupakan suatu persegi panjang.
8. sebuah soal Babylonia sekitar 1.800 SM yang rupanya diselesaikan dengan sistem simultan : xyz + xy = 7/6, y = 2x/3 dan z = 12x. Dengan menggunakan tabel (daftar) di soal no. 22 di atas, carilah nilai x, y, dan z.

BAB III
MATEMATIKA PYTHAGORAS

A. LAHIRNYA MATEMATIKA DEMONTRATIF

Pada abad terakhir dari tahun 2000 SM banyak perubahan ekonomi dan politik, beberapa peradaban hilang, kekuasaan Babylonia dan Mesir berakhir; bangsa-bangsa baru teristimewa Hebrew (Urani), Assyria, Punisia dan Yunani telah bangkit. Zaman besi timbul yang membawa perubahan yang luas dalam peperangan maupun munculnya alat-alat baru.

Alfabet diketemukan dan mata uang diperkenalkan, sehingga dapat merangsang perdagangan serta penemuan-penemuan geografis, maka dunia telah siap dengan peradaban baru. Kemajuan peradaban mengakibatkan munculnya kota perdagangan di sepanjang pulau asia kecil, Yunani, Sicilia dan pantai Italia.

Pantai timur yang statis dan kuno tenggelam sebab dengan munculnya perkembangan ratio, manusia mulai bertanya “mengapa” sebagai ganti “bagaimana”.

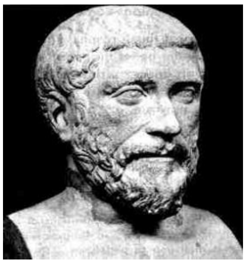
Untuk pertama kalianya matematika, mulai bertanya prinsip-prinsip dasar seperti: “mengapa sudut-sudut alas suatu segitiga samakaki sama besarnya, mengapa garis tengah suatu lingkaran membagi lingkaran sama besar”, terlihatlah pada pertanyaannya sudah bersifat ilmiah. Beberapa usaha telah dilakukan, hal ini menyebabkan munculnya metode DEMONTRATIF yang kemudian dilanjutkan dengan metoda deduktif yang biasa disebut oleh para pelajar modern sebagai ciri pokok matematika.

Geometri demontratif dimulai oleh Thales dari Miletus, salah seorang dari tujuh orang bijaksana pada zaman kuno. Thales memulai kariernya sebagai seorang pedagang kaya, sehingga waktunya cukup untuk belajar dan mengadakan perjalanan. Menurut ceritanya pada waktu ia tinggal di mesir ia telah menghitung tinggi pyramid berdasarkan bayangan yang terjadi. Sekembalinya ke Miletus maka ia terkenal sebagai seorang ahli pemerintahan, penasehat, insinyur, pedagang, filusuf, ahli matematika dan ahli astronomi.

Dalam geometi ia berjasa karena penemuannya:

- Suatu lingkaran di bagi dua sama besar oleh garis tengahnya.
- Sudut alas suatu segitiga samakaki adalah sama besar.
- Sudut siku-siku yang dibentuk oleh dua garis yang berpotongan adalah sama besar.
- Dua segitiga yang sama dan sebangun bila keduanya mempunyai dua sudut dan satu sisi yang sama.
- Suatu sudut yang dilukis dalam setengah ligkaran adalah siku-siku (ini telah dikenal oleh orang-orang Babylonia tahun 1.400 SM)

B. PYTHAGORAS



Kita telah mengetahui bahwa tidak ada sumber asli mengenai matematika Yunani yang pertama, kita hanya berdasarkan manuskrip-manuskrip dari arab dan zaman ke-Kristenan. Dari ketekunan para pelajar dalam mengumpulkan teks-teks asli, seperti dari: Euclid, Appolonius Archemides dan lain-lainnya. Setelah melalui diskusi para ahli, maka sejarah matematika yang pertama dapat diketahui meskipun sebagian besar bersifat hipotesa. Sangat disayangkan sejarah geometri dan astronomi Yunani yang lengkap sejak permulaan sampai tahun 355 SM yang ditulis Eudemus seorang murid Aristoteles telah hilang.

Catatan sejarah ini kemudian diberikan oleh Proclus dalam *Commentary on Euclidny* (sekitar 450). Hal ini terkenal sebagai Eudemian Summary yang berisi tentang sumber informasi mengenai matematika Yunani pertama dan sekarang sedang menjadi bahan diskusi.

Seorang ahli matematika pertama yang dicatat dalam Eudemian Summary ialah Pythagoras, kemungkinan ia lahir sekitar tahun 572 SM di Aegean di kepulauan Samos, anak dari Mnesorches seorang pandai perak dan batu permata.

Karena ia lima puluh tahun lebih muda dari Thales dan tempat tinggalnya sangat dekat dengan kota kediaman thales yaitu Miletus, maka kemungkinan Pythagoras belajar di bawah bimbingan Thales.

Kemudian ia tinggal untuk sementara waktu di Mesir dan selanjutnya mengadakan beberapa perjalanan. Ketika ia kembali keadaan pulau Samos di bawah kekuasaan Polycrates dan Iona di bawah kekuasaan Persia, oleh sebab itu ia pergi ke kota pelabuhan Yunani yaitu Crotona, di daerah Italia sebelah selatan.

Disini ia mendirikan sekolah Pythagoras (Pythagorean) yang terkenal, serta merupakan suatu akademi untuk mempelajari: filsafat, matematika dan fisika yang kemudian berkaitan dengan upacara-upacara keagamaan yang bersifat rahasia. Pada waktu itu pengaruhnya perkumpulan ini sangat besar sehingga kaum demokratis dari Italia sebelah selatan menghancurkannya.

Hal ini menyebabkan perkumpulan itu bubar dan menurut laporan, Pythagoras lari ke Metapontum yang akhirnya ia meninggal dalam usia sekitar 75-80 tahun serta ada kemungkinan ia terbunuh.

Fislafat Pythagoras berdasarkan pada dugaan bahwa seluruh bilangan merupakan sebab dari adanya bermacam-macam sifat dari suatu unsur. Ini mengakibatkan pelajaran tentang sifat bilangan dalam bentuk aritmetika, geometri, musik dan astronomi yang merupakan dasar untuk menyusun kesenian Pythagoras. Pada abad pertengahan dikenal sebagai Quadrivium yang kemudian di tambah dengan trivium yaitu tatabahasa, logika dan ilmu berpidato. Tujuh dasar ilmiah yang merupakan syarat penting bagi seorang yang dikatakan terdidik. Kata matematika berasal dari kata Yunani “mathein” yang berarti belajar.

Pythagoras mengajar dengan cara lisan dan persaudaraan atau dapat juga kita katakan sebagai perguruan yaitu yang mengatakan bahwa semua penemuan akan kembali pada pendiri yang dipuja, oleh sebab itu sekarang sangat sulit untuk mengetahui yang mana matematika yang ditemukan oleh Pythagoras sendiri dan yang mana diketemukan oleh para anggota yang lainnya.

C. ARITMETIKA PYTHAGORAS

Yunani kuno membedakan antara mempelajari hubungan-hubungan abstrak yang menghubungkan bilangan dan perhitungan praktis. Yang pertama dikenal sebagai aritmetika yang terakhir sebagai logistik.

Klasifikasi ini digunakan selama abad pertengahan sampai abad ke-15 ketika kedua aspek teoritis dan praktis berkenaan dengan pengerjaan bilangan yang di beri nama sama yaitu: aritmetika.

Aritmetika di Benua Eropa tetap mempunyai arti yang asli, sedangkan Inggris dan Amerika, aritmetika mempunyai arti yang sama dengan pengertian logistik pada zaman kuno dan di dua Negara ini istilah teori bilangan (*number theory*) digunakan untuk pelajaran yang abstrak mengenai bilangan.

Secara umum diakui bahwa Pythagoras dan pengikutnya telah mengambil langkah-langkah yang berkaitan dengan filsafat serta menyimpulkan pertama kali dalam pengembangan teori bilangan serta meletakan dasar-dasar bagi masa depan mistikisme bilangan.

Ketahayulan perguruan Pythagoras yang tampak dapat diuraikan disini dalam pengertian mereka terhadap bilangan misalnya: mereka menganggap semua bilangan genap adalah betina atau bersifat wanita dan semua bilangan ganjil adalah jantan atau bersifat pria. Dalam hal bilangan genap dan ganjil ini mereka juga menganggap bahwa bilangan genap adalah jahat dan bilangan ganjil adalah baik.

Anggapan ini timbul karena bilangan genap dapat dipecah sama besar, 2 = 1 + 1, 4 = 2 +2, 8 = 4 + 4 dan pemecahan demikian menimbulkan kekhawatiran mereka akan kemungkinan terjadinya pemecahan yang terus menerus tak berkesudahan.

Tak berkesudahan inilah yang mengerikan mereka. Dalam hal ini bilangan ganjil akan mencegah pemecahan tak berkesudahan itu sehingga oleh karenanya bilangan ganjil adalah bersifat baik.

Diantara bilangan-bilangan itu bilangan sepuluh mereka anggap sebagai bilangan yang ideal, antara lain karena sepuluh merupakan jumlah dari bilangan berurutan 1+2+3+4.

Juga mereka menganggap bahwa semua obyek di dalam alam semesta dapat dilukiskan oleh sepuluh sifat:

1. Terbatas - Tak terbatas
2. Ganjil - Genap
3. Tunggal - Jamak
4. Kanan - Kiri
5. Jantan - Betina
6. Diam - Bergerak
7. Lurus - Bengkok
8. Terang - Gelap
9. Baik - Jahat
10. Bujur sangkar - Persegi panjang

Karena bilangan sepuluh demikian idealnya maka mereka juga yakin bahwa dalam alam semesta terdapat sepuluh macam benda langit.

Mereka baru mengenal sembilan benda-benda tersebut diantaranya adalah: bumi, matahari, bulan, kelompok bintang dan lima planet yang telah mereka kenal, sehingga menurut mereka pasti ada yang kesepuluh. Benda langit yang kesepuluh ini mereka namakan lawan bumi dan terletak diseberang api pusat sehingga tidak tampak dari bumi kita. Lamblichus seorang filusuf Neoplatonic yang berpengaruh di sekitar tahun 320 menganggap Pythagoras sebagai seorang yang menemukan bilangan Amicable atau bilangan sekawan.

Sepasang bilangan adalah sekawan bila setiap bilangan sama dengan jumlah pembagi-pembagi bilangan yang lain contoh: 284 dan 220 dinyatakan sebagai sepasang bilangan sekawan yang ditemukan oleh Pythagoras. Pembagi 220 adalah 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 jumlahnya 284. sedangkan 284 adalah: 1, 2, 4, 71, 142 dan jumlahnya 220. pasangan bilangan ini mempunyai mistik dan ketahayulan yang mengatakan bahwa dua jimat yang menyatakan bilangan-bilangan ini akan mengikat persahabatan secara sempurna diantara pemakainya. Bilangan ini memainkan peranan yang cukup penting dalam ilmu gaib, ilmu sihir, astrologi dan horoscope.

Tampaknya tidak ada pasangan bilangan amicable baru yang ditemukan, sampai seorang ahli bilangan bangsa Prancis yaitu Fermat dalam tahun 1636 menemukan 17.296 dan 18.416. dua tahun kemudian ahli matematika dan filasafat prancis Rene Descrates menunjukkan pasangan yang ketiga. Ahli matematika bangsa Swiss Leonhard Euler melakukan penelitian yang sistematis mengenai pasangan bilangan yang amicable dalam tahun 1747 dan memberikan daftar yang berisi pasangan 30 buah bilangan amicable dan akhirnya daftar itu diperpanjang menjadi lebih dari 60 pasang. Satu hal yang mengherankan dalam sejarah bilangan ialah penemuan selanjutnya oleh seorang anak laki-laki Italia yang berumur 16 tahun bernama: Nicolo Paganini dalam tahun 1886 telah menemukan pasangan bilangan amicable yang relative kecil yaitu 1184 dan 1210. sekarang telah diketahui lebih dari 400 pasang bilangan amicable.

Bilangan yang mempunyai hubungan mistik dan dianggap diketemukan oleh Pythagoras ialah bilangan sempurna (Perfect), abundant dan deficient. Bilangan perfect ialah bilangan yang sama dengan jumlah pembagi-pembaginya.

Bilangan deficient adalah bilangan yang lebih besar dari pada jumlah pembagi-pembaginya.

Bilangan abundant ialah bilangan yang lebih kecil dari pada jumlah pembagi-pembaginya.

Tuhan telah menciptakan bilangan dunia dalam 6 hari, suatu bilangan perfect sebab 6 = 1 + 2 + 3. dipihak lain sebagaimana diselidiki oleh Alcuin (735-804) seluruh umat manusia berasal dari 8 jiwa yang keluar dari bahtera nabi Nuh dan penciptaan yang kedua ini tidak sempurna karena lebih besar dari 1 + 2 + 4, jadi 8 adalah bilangan deficient.

Sampai tahun 1952 hanya ada 12 bilangan perfect yang diketahui, semua merupakan bilangan genap, empat pertamanya adalah: 6, 28, 496 dan 8.128.

Suatu dalil dalam buku Euclid “Elements” (300 SM) dibuktikan bahwa 2n – 1 bilangan prima.

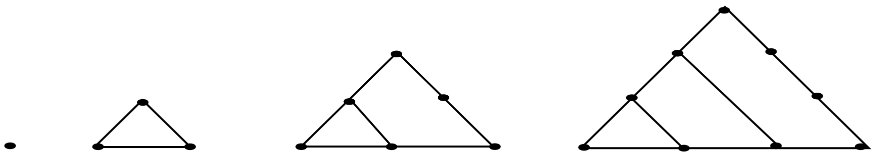
Bilangan perfect yang menggunakan dalil Euclid adalah genap dan Euler telah membuktikan bahwa setiap bilangan yang genap harus mempunyai bentuk seperti itu, ada tidaknya bilangan perfect yang ganjil merupakan suatu problema yang belum terselesaikan dalam teori bilangan.

Dalam tahun 1952 dengan bantuan computer SWAC diketahui lima buah bilangan perfect lagi yaitu untuk n = 521, 607, 1.279, 2.203 dan 2.281 dalam rumus Euclid.

Dalam tahun 1957 mesin BESK dari swedia menemukan dua bilangan lagi untuk n = 4.253 dan 4.423. dengan demikian tidak ada bilangan perfect untuk n > 5.000. bilangan perfect untuk n = 4.423 terdiri dari 2.663 angka.

Tidak semua ahli matematika menyetujui bahwa bilangan amicable dan perfect didapatkan oleh Pythagoras, tetapi secara umum mereka menyetujui bahwa bilangan gambar (*figurate number*) mempunyai anggota yang ada hubungannya dengan perguruan Pythagoras. Bilangan ini dinyatakan dengan jumlah titik-titik dalam bagun geometri yang tertentu, hal ini merupakan penghubung antara geometri dan aritmetika.

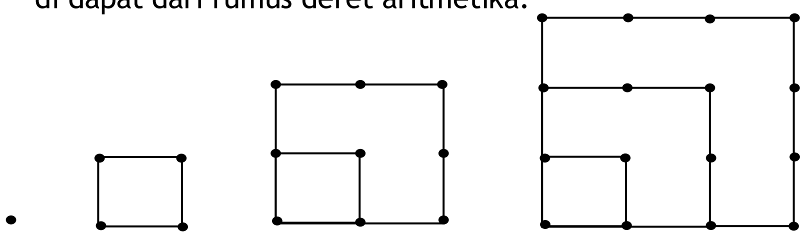
Gambar di bawah ini menunjukkan bilangan segitiga, bujur sangkar, segilima.



1 3 6 10

Bilangan segitiga untuk n = 1, 2, 3, 4.

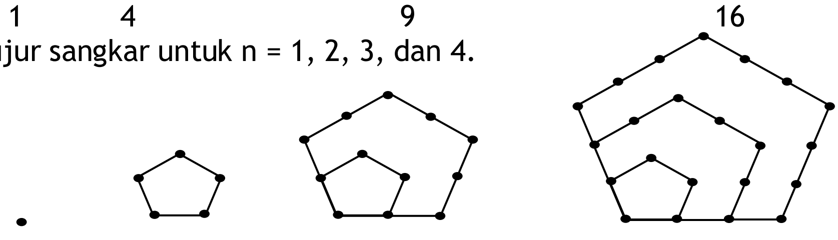
Tn = $\dfrac{n(n+1)}{2}$ di dapat dari rumus deret aritmetika.



1 4 9 16

Bilangan bujur sangkar untuk n = 1, 2, 3, dan 4.

$S_n = n^2$



1 5 12 22

Bilangan segilima untuk n = 1, 2, 3, 4.

$P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

Banyak teori yang cukup menarik mengenai bilangan gambar yang dapat dibuat dari bangun geometri sebagai contoh, dikemukakan dalam:

Dalil:

Yang menyatakan bahwa setiap bilangan bujur sangkar sama dengan jumlah dua bilangan segitiga yang berurutan.

Dalil:

Bilangan segilima ke n sama dengan n ditambah tiga kali bilangan segitiga ke (n-1)

Dalil:

Jumlah setiap bilangan ganjil yang berurutan di mulai dengan satu adalah bilangan kuadrat murni. Bukti dalil di atas sebagai berikut:

$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n+1)/2$

$S_n = n^2 = n (n + 1) / 2 + (n-1) n / 2 = T_n + T_{n-1}$

$P_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2)$

$= n (3n-1)/2 = n + 3n (n-1) / 2$

$= n + 3 T_{n-1}$

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)= n (2n) / 2 = n^2$

Penemuan Pythagoras yang terakhir yaitu tentang pembagian interval musik berdasarkan perbandingan bilangan. Pythagoras juga terkenal dengan pemikirannya tentang bumi. Baginya bumi membentuk bola yakni suatu anggapan yang menyerupai pengetahuan kita sekarang ini.

Kasus mengenai bilangan ini muncul juga pada saat raja Yu yang disebut dengan “Lo Shu” yaitu yang sekarang terkenal dengan istilah “Bujur sangkar ajaib” dikemukakan sekitar tahun 2.200 SM (dari daratan China).

D. DALIL PYTHAGORAS DAN TRIPLE PYTHAGORAS

Telah diakui bahwa Pythagoras yang menemukan dalil tentang segitiga siku – siku: kuadrat sisi miring suatu segitiga siku – siku sama dengan jumlah kuadrat sisi siku – sikunya.

Dalil ini telah di kenal oleh orang Babylonia pada zaman Hammurabi, lebih dari 1.000 tahun sebelumnya, tetapi bukti secara umum baru diberikan oleh Pythagoras.

Beberapa pembuktian Dalil Pythagoras, yaitu:

Cara 1 :

ABCD adalah (gambar sebuah persegi dengan panjang sisinya (a + b), sedangkan EFGH adalah sebuah persegi dengan panjang sisi c.

Persegi ABCD kongruen dengan persegi KLMN, dengan panjng sisi (a+b). Luas empat buah segitga yang diarsir pada persegi ABCD = luas empat buah segitiga yang diarsir pada persegi KLMN, maka luas daerah yang tidak diarsir pada persegi ABCD = luas daerah yang tidak diarsir pada persegi KLMN.

Luas persegi dengan panjang sisi a adalah 9 satuan luas (9 kotak) atau a^2 Luas persegi dengan panjang sisi b adalah 16 satuan luas (16 kotak) atau b^2

Luas persegi dengan panjang sisi c = luas persegi dengan panjang sisi a + luas persegi dengan panjang sisi b. **Kesimpulan :** $c^2 = a^2 + b^2$

Problema lain yang muncul dari dalil Pythagoras adalah suatu usaha untuk menemukan bilangan a, b, dan c yang menyatakan sisi segitiga siku – siku.

Tiga buah bilangan tersebut dikenal sebagai Triple Pythagoras dan telah dipelajari dan dianalisa dalam Plimpton 322, hal ini merupakan bukti bahwa bangsa Babylonia kuno telah mengetahui bagaimana menentukan Triple Pythagoras tersebut.

Pythagoras merumuskan sebagai berikut :

$$m^2 + \left[\frac{m^2 - 1}{2}\right]^2 = \left[\frac{m^2 + 1}{2}\right]^2$$

bukti itu untuk *m* ganjil.

Rumus yang semacam adalah :

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

Dimana *m* merupakan bilangan genap atau ganjil yang dikemukan oleh plato sekitar tahun 380 SM.

Apakah benar rumus di atas menghasilkan Triple Pythagoras?

E. PENEMUAN BILANGAN IRRASIONAL

Bila kita definisikan bilangan rasional sebagai hasil bagi dua bilangan bulat $\frac{p}{q}, q \neq 0$ maka sistem bilangan rasional ini mengandung semua bilangan bulat dan bilangan pecahan. Bilangan rasional secara sederhana ditunjukkan sebagai bentuk geometri. Letakan dua titik 0 dan 1 pada sebuah garis lurus dengan 1 sebelah kanan 0 dan segmen 01 ($\overline{01}$) sebagai satuan panjang. Jika 0 dan 1 melukiskan bilangan 0 dan 1, maka bilangan positif dan negatif dapat dilukiskan dalam himpunan titik – titik pada garis lurus tersebut dengan satuan tertentu. Bilangan bulat positif sebelah kanan nol dan negatif sebelah kiri nol, sedangkan bilangan pecahan dengan penyebut q dapat dilukiskan pada titik – titik yang membagi tiap – tiap satuan interval menjadi q bagian. Jadi setiap bilangan rasional dapat dilukiskan pada garis bilangan tersebut.

Suatu penemuan yang cukup besar ditunjukkan oleh Pythagoras bahwa tidak ada bilangan rasional yang dilukiskan titik P pada garis tersebut dengan OP = panjang diagonal persegi yang besisi 1 satuan.

Maka dihasilkan bilangan baru yang dikaitkan dengan titik tersebut serta dinamakan : BILANGAN IRRASIONAL.

Penemuan ini merupakan suatu hal yang cukup penting dalam sejarah matematika. Untuk membuktikan bahwa panjang diagonal bujur sangkar dengan sisi satu satuan bukan bilangan rasional cukup dengan membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah irrasional.

Untuk bilangan bulat positif s, s^2 adalah genap jika dan hanya jika s genap. Misalkan $\sqrt{2}$ adalah rasional, maka $\sqrt{2}$ = a/b, dimana a dan b bilangan relatif prima maka:

$$a = \sqrt{2} \,.\, b$$
$$a^2 = 2\,b^2$$

karena a^2 sama dengan 2 kali suatu bilangan bulat, maka a^2 harus genap. Jadi a juga harus genap. Missal : a = 2 c , maka

$$(2c)^2 = 2b^2$$
$$4c^2 = 2b^2$$
$$2c^2 = b^2$$

Kesimpulan diperoleh bahwa b^2 genap jadi b tentu juga genap. Ini tidak mungkin sebab a dan b relatif prima. Jadi pemisalan di atas adalah salah.

Bukti secara geometri yaitu dengan jalan membuktikan bahwa diagonal suatu bujur sangkar adalah tak terukur.

Ada segment AP sedemikian sehingga diagonal AC dan AB dari bujur sangkar ABCD merupakan kelipatan dari AP ; maka AC dan AB terukur terhadap AP.

Pada AC terletak CB_1 = AB, lukislah B_1C_1 tegak lurus CA, maka dapat dibuktikan C_1B = C_1B_1 = AB_1 , AC_1 = AB – AB_1 , AB_1 terukur terhadap AP. Tetapi AC_1 dan AB_1 adalah diagonal dan sisi dari persegi yang lebih kecil daripada persegi yang pertama.

Dengan cara yang sama dan akhirnya diperoleh diagonal AC_n dan AB_n terukur terhadap AP dan AC_n < AP, ini tak mungkin.

F. IDENTITAS ALJABAR

Bangsa Yunani Kuno menggunakan proses geometri untuk menyelesaikan operasi aljabar. Dalil 4 dalam buku III Element Euclid menyatakan sebagai berikut: Bila sebuah garis lurus dibagi manjadi dua bagian, maka persegi dengan sisi garis itu sama dengan jumlah persegi – persegi dengan sisi masing – masing bagian garis itu ditambah dengan dua segi empat yang sisi – sisinya adalah kedua bagian garis itu.

Hal ini sebenarnya membuktikan identitas aljabar :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

yaitu dengan membagi bujur sangkar dengan sisi a+b menjadi bujur sangkar dengan sisi a dan b dan dua segi empat dengan sisi a dan b.

Dalil : Bila suatu garis lurus dibagi dua sama dan juga tidak sama, maka segi empat dengan sisi bagian yang tidak sama ditambah dengan persegi dengan sisi jarak titik potongnya sama dengan persegi dengan sisi setengah garis itu.

Misalkan AB garis yang diketahui, dibagi dua sama di P, dan tidak sama di Q, maka : $(AQ)(QB) + (PQ)^2 = (PB)^2$ .... (1)

Bila AQ = 2a dan QB = 2b, maka (1) merupakan identitas aljabar :

$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$ atau bila AB = 2a dan PQ = b, maka (1) merupakan identitas aljabar $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ yang dibuktikan sbb:

PCDB dan QFLB bujur sangkar dengan sisi – sisi PB dan QE. Jadi :

$$\begin{aligned}(AQ)(QB) + (PQ)^2 &= AGFQ + HCEF \\ &= AGHP + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + PHFQ + HCEF \\ &= PHLB + FEDL + HCEF \\ &= (PB)^2\end{aligned}$$

Dalil : Bila suatu garis lurus dibagi dua sama dan diperpanjang ke suatu titik, segi empat dengan sisi semua garis yang diperpanjang dan kepanjangannya ditambah dengan persegi dengan sisi setengah garis itu sama dengan persegi dengan sisi setengah garis itu ditambah dengan perpanjangan.

Misal garis tersebut adalah AB dan P tengah – tengahnya, BQ perpanjangannya, maka :

$(AQ)(QB) + (PB)^2 = (PQ)^2$ .... (2)

Bila AQ = 2a dan BQ = 2b, maka (2) merupakan identitas :

$4ab + (a - b)^2 = (a + b)^2$

Dalil ini dapat dibuktikan sebagai berikut AB = a, BC = b, maka $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$

G. PENYELESAIAN PERSAMAAN KUADRAT SECARA GEOMENTRI

Dalil tersebut di atas disajikan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat secara geometri.

Dalil: untuk membagi suatu garis yang diketahui sedemikian rupa sehingga segi empat dengan sisi – sisi bagian garis itu sama dengan luas tertentu, tetapi luas ini tidak boleh lebih besar dari luas persegi dengan sisi setengah garis yang diketahui.

Misalkan AB dan q suatu garis yang diketahui dan $q < \frac{1}{2}AB$. AB dibagi Q sehingga $(AQ)(QB) = q^2$

Untuk menyelesaikan soal ini dilakukan penyelesaian sebagai berikut :

P tengah – tengah AB, PE = q dan tegak lurus AB di titik P. E sebagai pusat dan PE sebagai jari – jari dibuat busur lingkaran sehingga memotong AB di Q.

Dalil di atas mengatakan :

$$\begin{aligned}(AQ)(QB) &= (PB)^2 - (PQ)^2 \\ &= (EQ)^2 - (PQ)^2 \\ &= (EP)^2 \\ &= q^2\end{aligned}$$

Bila panjang AB dinyatakan dengan P, maka dari aljabar elementer diketahui bahwa r + s = p dan $r.s = q^2$. Dari persamaan $x^2 - px + q^2 = 0$ dengan r dan s akar – akarnya.

Sedang AQ dan QB jumlahnya sama dengan AB atau p, sedangkan hasil kalinya = q^2 , maka AQ dan QB merupakan r dan s.

Pada persamaan $x^2 + px + q^2 = 0$ dinyatakan dengan negatifnya panjang AQ dan QB.

Dalil : memperpanjang suatu garis lurus yang diketahui sehingga segi empat dengan sisi segment – segment garis diantara titik ujung dan titik perpanjangannya dama dengan luas yang diketahui.

Misalnya AB adalah garis yang dikatahui dan q suatu segment garis. Kita harus memperpanjang AB ke titik Q sehingga (AQ) (QB) = q^2. Buatlan BE tegak lurus AB di B, dengan P (pertengahan AB) sebagai pusatnya dan PE jari – jarinya. Buatlah busur lingkaran sehingga memotong AB di Q.

Menurut dalil : (AQ) (QB) = (pq)2 - (PB)2
= PE2 - PB2
= BE2
= q2.

Dengan AQ positif dan BQ negatif, maka AQ dan BQ merupakan akar persamaan $x^2 - px - q^2 = 0$, dimana hanya tandanya yang berubah.

H. TRANSFORMASI LUAS

Pythagoras juga tertarik dalam persoalan-persoalan transformasi luas suatu bentuk ke bentuk lain. Misalnya ada segi banyak ABCD ... lukislah gambar BR//AC sampai memotong DC di R.

Maka segitiga ABC dan ARC mempunyai luas yang sama yaitu AC dan juga tinggi yang sama ke alas ini, jadi ABC dan ARC mempunyai luas yang sama.

Sehingga segi banyak ABCD ... dan ARD ... mempunyai luas yang sama. Dengan cara yang sama akhirnya didapat suatu segitiga dengan luas yang sama dengan luas segi banyak yang diketahui.

Soal – soal

1. lukislah sebuah persegi yang luasnya sama dengan segiempat sebarang ABCD.
2. Kita tentukan tiga buah rata – rata dari dua bilangan positif a dan b sebagai :

$$A = \frac{a+b}{2}$$ rata – rata hitung

$$G = \sqrt{ab}$$ rata – rata ukur

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$ rat – rata harmonis

   a. Buktikan bahwa H rata – rata harmonis antara a dan b. Jika ada sebuah bilangan n sehingga a= H +a/n dan H = b+b/n . Ini merupakan definisi Pythagoras dari rata-rata harmonis a dan b.

BAB IV
MENDUAKALIKAN, MEMBAGI TIGA DAN MENGKUADRATKAN

A. ZAMAN THALEUS SAMPAI EUCLID

Orang Yunani yang pertama kali menggunakan geometri adalah Thales kira-kira tahun 600 SM dan mencapai puncak kebesarannya pada saat Euclid yaitu sekitar tahun 300 SM. Thales mendirikan sekolah Ionia di Miletus dan Perguruan Pythagoras yang pertama di Crotona.

Kira-kira tahun 1.200 SM bangsa Doria yang primitif bergerak ke arah selatan ke semenanjung Yunani, meninggalkan daerah pegunungan sebelah utara ke daerah yang lebih menguntungkan, berkembang menjadi kota Sparta. Sebagian penduduk asli yang diserbu pergi ke Asia Kecil dan pulau-pulau Ionoia mendirikan koloni perdagangan bangsa Yunani. Pada koloni sekitar abad VI SM, Ionia mendirikan sekolah yang berakibat filsafat Yunani berkembang dan menunjukkan bahwa geometri demonstratif mulai lahir.

Semenjak Persia telah menjadi sebuah kerajaan militer yang besar, menyusul rencana perluasan daerah kerajaan serta didorong oleh suatu perekonomian yang berdasarkan perbudakan, maka kota Ionia dan Koloni Yunani di Asia Kecil itu direbut pada tahun 546 SM. Akibatnya ahli-ahli filsafat Yunani seperti Pythagoras dan Xenophanes meninggalkan tanah asal mereka dan pergi ke kolonial Yunani yang menguntungkan di bagian selatan Italia. Sekolah filsafat dan matematika dikembangkan di Crotona di bawah Pythagoras, di Elea di bawah Xenophanes, Zeno dan Parmenides. Akibat adanya penindasan dan perbudakan di kota Ionia, maka mengakibatkan suatu pemberontakan dalam tahun 499 SM.

Athena yang sementara menjadi suatu pusat kebudayaan Barat dengan kemajuan Politik ke arah demokrasi, membantu revolusi itu dengan mengirim pasukan. Walaupun pemberontakan itu dapat dihancurkan, kemarahan raja Darius dari Persia telah memutuskan untuk menghancurkan Athena. Dalam tahun 492 SM, ia menyusun sebuah angkatan darat dan angkatan laut yang besar untuk menyerbu tanah yang terpenting dari Yunani, tetapi angkatan lautnya dihancurkan oleh suatu angin topan. Dan 2 tahun kemudian tentara Persia menyusup masuk Attica dimana terjadi pertempuran yang akhirnya mereka dikalahkan oleh orang Athena di Marathon. Athena menerima bantuan dari pemimpin Yunani.

Tahun 480 SM Xerxes, putera raja Darius berusaha mencari daratan dan laut lain untuk menyerbu Yunani. Orang Athena bertemu dengan angkatan laut Persia, dalam pertempuran laut yang sengit di laut Salamis dan orang Persia menang. Meskipun kekuatan negeri Yunani itu di bawah pimpinan orang Sparta dikalahkan dan disapu keluar di Thermopylae, orang Yunani mengatasi kekuatan orang Persia tahun berikutnya di Plataea dan memaksa penyerbu-penyerbu keluar dari Yunani. Pemerintah Negara Athena diperkuat sehingga setengah abad dalam keadaan damai ini merupakan zaman keemasan sejarah Athena, kota Perticles merupakan pusat perkembangan demokrasi dan intelektual. Ahli-ahli matematika ditarik dari semua penjuru Yunani antara lain Anaxagoras, pengikut-pengikut Phytagoras, Zeno dan Parmenidas dari sekolah Elestic pergi ke Athena dan mengutarakan hubungan geometri.

Perdamaian berakhir pada tahun 432 SM dengan timbulnya perang Peloponnesia antara Athena dan orang Sparta. Orang Athena pada permulaannya berhasil, tetapi kemudian menderita kehancuran dengan terbunuh seperempat dari penduduknya dan akhirnya pada

tahun 404 SM menerima kekalahan. Sejak terjadi pertempuran ini sedikit kemajuan yang dibuat dalam geometri di Athena, hanya berasal dari daerah yang aman di Magna Graecia.
Pengikut Pythagoras dari daerah bagian selatan Italia telah diijinkan kembali dengan dibersihkan dari ikatan politik, sebuah sekolah aliran Pythagoras muncul di Tarentum di bawah pengembangan Archytas.
Dengan berakhirnya perang Peloponnesia, orang Athena walaupun hanya tinggal memiliki kekuatan politik yang kecil tetapi mereka memperoleh kembali pimpinan kebudayaan dan sekolah di Athena kembali berkembang. Plato dilahirkan di Athena ketika bencana besar itu, mempelajari filsafat di bawah Socrates, matematika di bawah Theodorus di Cyrene pantai Afrika (teman karib dari Archytas), sekembalinya ke Athena dalam tahun 380 SM mendirikan akademi termashur.
Eudoxus yang belajar di bawah Archytas dan plato mendirikan sekolah di Cyzicus di bagian utara Asia Kecil. Menaechmus, seorang anggota perkumpulan Plato dan murid dari Eudoxus menemukan irisan kerucut : Dinostratus saudara Menaechmus seorang yang pandai geometri juga murid dari Plato.
Aristoteles meskipun bukan seorang yang diakui ahli matematika adalah penyusun logika deduktif dan seorang penulis dasar-dasar fisika, beberapa bagian dari analitika posteori yang menunjukkan suatu pemikiran istimewa.

B. ALAT-ALAT EUCLID

Dengan mistar, kita dapat menggambarkan garis lurus yang tak hingga panjangnya melalui dua titik berlainan yang diketahui. Dengan jangka, kita dapat menggambarkan sebuah lingkaran dengan suatu titik yang ditentukan sebagai pusat dan melalui titik yang kedua yang ditentukan. Lukisan-lukisan dengan mistar dan jangka, dipandang sebagai suatu permainan yang dimainkan sesuai dengan aturan di atas.
Sejak Euclid menggunakan mistar dan jangka dengan aturan di atas, alat-alat ini begitu digunakan telah menjadi terkenal sebagai "alat-alat Euclid". Perlu diketahui bahwa mistar itu belum berskala, juga jangka berbeda dengan dengan jangka modern kita sekarang sebab jangka kita dapat menggambarkan sebuah lingkaran yang mempunyai setiap titik C sebagai titik pusat dan segment AB sebagai jari-jari.

TIGA PROBLEMA YANG TERKENAL

Ketiga persoalan yang terkenal itu adalah :

1. Perbanyakan duakali kubus, atau soal pembentukan sisi sebuah kubus yang mempunyai duakali isi kubus yang diketahui
2. Per bagian tiga sudut, atau soal membagi sebuah sudut sebarang atas tiga bagian yang sama.
3. Pembentukan bujur sangkar dari lingkaran, atau soal membentuk suatu bujur sangkar yang mempunyai luas yang sama dengan sebuah lingkaran yang ditentukan.

PERBANYAKAN DUA KALI KUBUS .B

Menurut pujangga matematika Yunani kuno soal perbanyak duakali sebuah kubus bukan dari sekolah melainkan berasal dari raja Minos sewaktu tidak menyetujui tentang besar sebuah monumen kuburan yang didirikan untuk puteranya Glaucus. Raja memerintahkan supaya monumen itu diduakalikan besarnya.

Hal ini dilakukan dengan menduakalikan setiap ukuran monumen, kesalahan matematika inilah yang mendorong para ahli geometri untuk membetulkannya. Bagaimana caranya seseorang dapat memperbanyak dua kali isi sebuah benda padat tertentu dengan tetap mempertahankan bentuk aslinya..

Soal ini oleh Plato diserahkan kepada penggemar-penggemar matematika. Hippocrates tahun 440 SM membentuk dua pembanding di tengah antara segment garis yang diberikan dari panjang s dan 2s.

Jika ditunjukkan dua pembanding tengah itu dengan x dan y maka

$s : x = x : y = y : 2s$.

Dari perbandingan ini didapatkan

$x^2 = s\, y$ dan $y^2 = 2\, s\, x$

Eliminasikan y diperoleh bahwa $x^3 = 2\, s^3$.

Jika x adalah sisi kubus yang mempunyai isi dua kali kubus yang bersisi s.

MEMBAGI TIGA YANG SAMA SEBUAH SUDUT .C

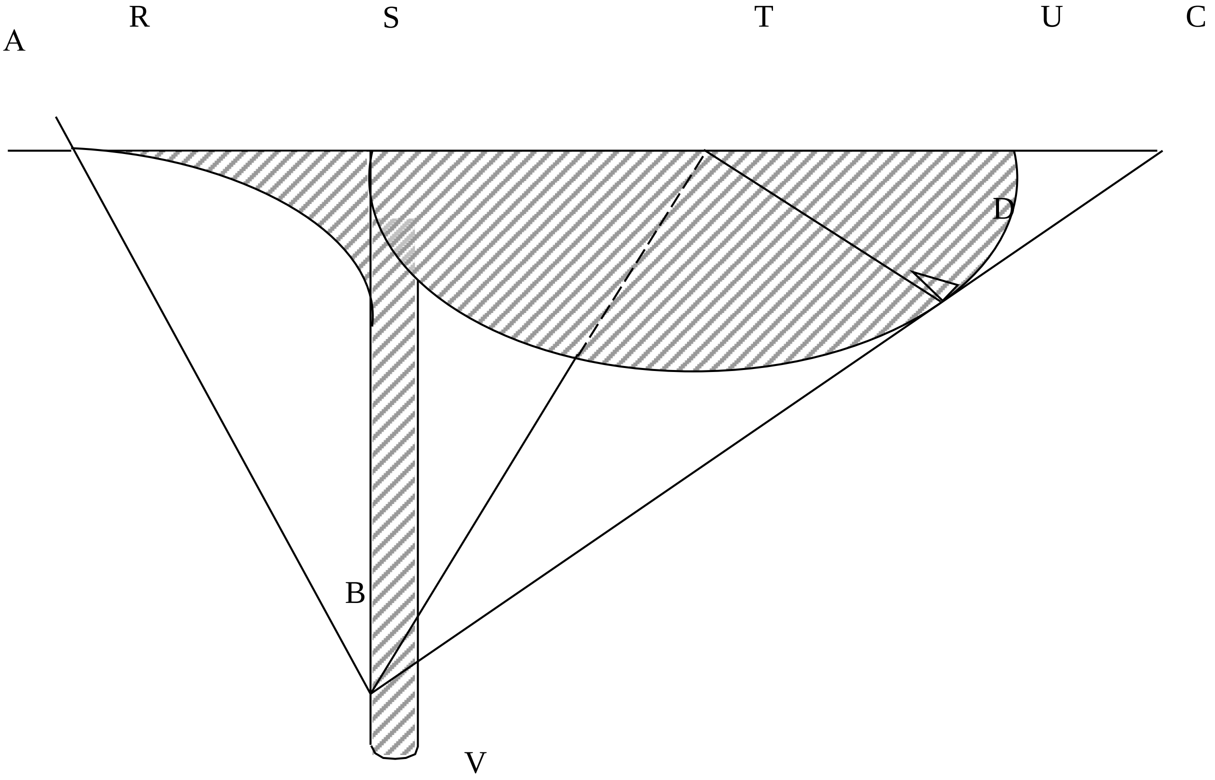
Dari tiga soal yang termasyhur zaman Yunani, maka membagi suatu sudut lancip ABC dapat di ambil sebagai sudut diantara sebuah diagonal BA dari segi empat BCAD. Tarik sebuah garis melalui B yang memotong CA di E dan perpanjangannya DA di F sedemikian sehingga EF = 2 BA. Misalkan G titik tengah EF. Tentu EG = GF = GA = BA, maka diperoleh $\angle ABG = \angle AGB = \angle GAF + \angle GFA = 2\angle GFA = 2\ \angle GBC$, dan BEF membagi tiga sudut ABC.

Dengan terka-terkaan Euclid, kita dapat menentukan tanda pada mistar sebuah segmen garis E'F' = 2 BA, kemudian mulai mengatur mistar itu sedemikian sehingga melalui B dan titik yang telah diberi tanda E' dan F' pada AC dan perpanjangan DA, sudut ABC akan terbagi tiga bagian yang sama.

Bermacam-macam kurva bidang datar telah diketemukan oleh Nocomedes (sekitar tahun 240 M).

Misalnya sebuah garis c dan O suatu titik tidak terletak di c. Pada perpanjangan OP, dimana P adalah suatu titik pada c, bertanda PQ yang sama panjang dengan konstanta "k" yang diketahui. Maka tempat kedudukan Q, jika P bergerak sepanjang c, adalah suatu bentuk conchoids, untuk membagi sudut atas tiga bagian yang sama dengan sebuah kapak (TOMAHAWK). Membuat sebuah kapak tersebut caranya adalah sebagai berikut : Sebuah segmen garis RU dibagi tiga bagian yang sama di S dan T. Lukislah setengah lingkaran pada SU sebagai diameter dan lukislah SV tegak lurus RU.

Untuk membagi tiga sebuah sudut ABC dengan Tomahawk tempatkan alat tersebut pada sudut sedemikian sehingga R jatuh pada BA dan SV lewat B dan setengah lingkaran menyinggung BC di D



Kita dapat menunjukkan bahwa segitiga RSB, TSB dan DTB adalah sama sebangun, maka BS dan BT membagi tiga sama sudut yang ditentukan. Bangun kapak itu dapat dibuat dengan mistar dan jangka pada kertas gambar dan kemudian diatur pada sudut yang ditentukan.

Meskipun sebuah sudut sebarang tak dapat dengan tepat dibagi tiga sama dengan alat Euclid ini, tetapi ada bangun dengan alat ini dengan sempurna memberikan pendekatan terhadap pembagian tiga sama.

Suatu contoh yang diberikan oleh Albrecht Durer tahun 1525. Ambil sudut AOB yang ditentukan sebagai sudut pusat lingkaran. Misalkan titik C titik yang membagi tiga bagian yang sama, tali busur AB yang mana lebih dekat ke B. Di C dilukis garis tegak lurus AB memotong lingkaran di D. Dengan B sebagai pusat dan BD sebagai jari-jari lukis sebuah busur sampai memotong AB di E. Letakkan F yang membagi tiga sama EC yang mana dekat ke E lagi dengan B sebagai pusat dan BF sebagai jari-jari lukis sebuah busur sampai memotong lingkaran di G. Maka OG adalah garis yang mendekati pembagian tiga sama sudut AOB.

KRONOLOGI π .D

Perhitungan π, yaitu perbandingan keliling suatu lingkaran dengan diameternya. Kita telah mengetahui bahwa dalam pandangan kuno nilai π sering diambil sebesar 3 dan orang mesir dalam Papyrus Rhind menganggap $\pi = (4/3)^4 = 3,1604…$.

Archimedes menemukan kenyataan bahwa π berada di antara 223/71 dan 22/7, atau dua decimal π diberikan dengan 3,14.

Sekitar tahun 150, Claudius Ptolemy dari Alexanderia (orang Yunani kuno yang terkenal bekerja di bidang astronomi) memberikan nilai π sama dengan 38' 30" (dalam notasi sexagesimal) adalah 337/120 atau 3,1416.

Sekitar tahun 480: orang Tiongkok pertama dalam ilmu Mekanika Tsu Ch'ung-Chih memberikan pendekatan rasional yang menarik, 335/113 = 3,1415929….. yang mana ketelitiannya sampai 6 desimal.

Sekitar tahun 530: Ahli matematika Hindu pertama Aryabhata memberikan 62.832/20.000 = 3,1416 sebagai pendekatan nilai. Tidak diketahui bagaimana caranya hasil itu diperoleh. Hal itu barangkali berasal dari beberapa sumber Yunani yang lebih dulu atau mungkin dari perhitungan garis keliling segibanyak beraturan yang dilukiskan dalam lingkaran dari 384 sisi.

Sekitar tahun 1150: Ahli matematika Hindu Bhaskara, memberikan beberapa pendekatan untuk nilai π. Dia memberikan 3927/1250 sebagai suatu nilai yang teliti dan 22/7 sebagai suatu nilai yang kurang teliti dan $\sqrt{10}$ untuk pekerjaan biasa (hasil yang biasa).

Tahun 1579: Ahli matematika Perancis yang cukup mengagumkan: Franqois Viete menemukan ketelitian nilai π sampai dengan 9 desimal dengan cara kuno yaitu menggunakan segi banyak beraturan yang berisi 6 (2^{16}) = 393.216. Ia juga menemukan kesetaraan dari hasil kali tak hingga.

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\frac{\sqrt{\left\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right\}}}{2}..............$$

Tahun 1585: Andriaen Anthoniszoon menemukan kembali perbandingan 335/113 Tiongkok kuno ini merupakan suatu kenyataan yang kebetulan 333/106 < π < 337/120

Kemudian ia merata-ratakan pembilang dan penyebut untuk memperoleh nilai "eksak" dari π.

Tahun 1593: Adriaen van Roomen, secara umum lebih dikenal dengan Adrianus Romanus dari Belanda memperoleh ketelitian untuk π sampai 15 desimal dengan menggunakan metoda klasikal, dengan segi banyak bersisikan 2^{30}.

Tahun 1610: Ludolph van Ceulen dari Jerman menghitung sampai 35 desimal dengan menggunakan metoda klasikal, menggunakan segi banyak 2^{62}.

Tahun 1650: Ahli matematika bangsa Inggris John Wallis menemukan:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.....}{1.3.3.5.5.7.7......}$$

Lord Brouncker mengubah hasil Wallis kedalam pecahan kontinu:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+....}}}$$

Tahun 1671: Ahli matematika Scoth, James Gregory memperoleh deret tak terhingga:

Arc tg x = $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 +$ ………. ($-1 \le x \le 1$)

untuk x = 1 deret menjadi:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+............$$

Tahun 1699: Abraham Sharp mendapat ketelitian 71 desimal dengan menggunakan deret Gregory dengan x = $\sqrt{\frac{1}{3}}$

Tahun 1706: John Machin memperoleh 100 desimal dengan menggunakan deret Gregory

π/4 = 4 arc tg (1/5) – arc tg (1/239)

Tahun 1719: Ahli matematika bangsa Perancis De Lagny mendapat ketelitian 112 desimal dengan menggunakan deret Gregory dengan x = $\sqrt{\frac{1}{3}}$

Tahun 1841: William Rutherford dari Inggris menghitung sampai 208 desimal, menggunakan deret Gregory:

π/4 = arc tg (1/2) + arc tg (1/5) + arc tg (1/8)

Dase dilahirkan di Hamburg dalam tahun 1824, mati pada umur muda 37 tahun. Ia penghitung dengan cara berfikir yang luar biasa yang pernah hidup di dunia ini. Dengan berfikir hasil kali dari dua bilangan 8 angka dalam waktu 54 detik. Bilangan yang terdiri dari 20 angka dalam waktu 6 menit, dari dua bilangan 40 angka dalam waktu 40 menit dan dari dua bilangan 100 angka dalam waktu 8, 45 jam. Ia menghitung akar dua dari sebuah bilangan 100 angka dalam waktu 52 detik.

Dase menggunakan kemampuannya untuk membuat tabel 7 desimal dari logaritma bilangan asli dan tabel dasar semua bilangan antara 7.000.000 dan 10.000.000.

Tahun 1853: Rutherford kembali ke soal itu dan memperoleh ketelitian 400 desimal.

Tahun 1873: William Shanks dari Inggris dengan menggunakan rumus Machin menghitung π dengan 707 desimal.

Tahun 1948: dalam tahun 1946 D,F. Ferguson dari Inggris dan J.W.Wrench, Ir dari Amerika mengumumkan suatu nilai π, 808 desimal dengan rumus :

π/4 = 3 arc tg (1/4) + acr tg (1/20) + arc tg (1/1985)

Tahun 1949: Alat-alat penghitung elektronik yang bernama ENIAC di laboratorium Penyelidikan Peluru Kendali Balistic Militer di Aberdeen, Maryland menghitung π sampai 2037 desimal.

Tahun 1959: Francois Genuys di Paris menghitung sampai 16.167 desimal dengan menggunakan IBM 704.

Tahun 1961: Wrench dan Daniel Shanks dari Washington menghitung π sampai 100.265 desimal, dengan menggunakan IBM 7090.

BAB V
UNSUR-UNSUR EUCLID

1. ALEXANDRIA

Setelah perang Peloponesia terdapat suatu politik pemecahan di antara Negara-negara Yunani, pembalasan kepada orang Yunani merupakan suatu hal yang mudah, karena pada waktu itu kerajaan Macedonia yang terletak di sebelah utara merupakan suatu kerajaan yang kuat. Raja Philip dari Macedonia berusaha secara beransur-angsur memperluas kekuasaannya ke arah selatan.

Seorang yang bernama Demosthenes mengirimkan peringatan yang diabaikan saja oleh orang Yunani. Sedangkan orang Yunani terlambat dalam mempersiapkan terhadap serangan orang Macedonia, sehingga dengan kekalahannya pada tahun 338 SM orang Yunani menjadi bagian dari kerajaan Macedonia.

Dua tahun setelah jatuhnya negara Yunani, cita-cita Alexander Agung berhasil sepeti ayahnya Raja Philip ialah memperluas daerah-daerah kekuasaan. Alexander Agung mendirikan rentetan kota baru di tempat yang terpilih. Rencana kota disusun oleh Alexander sendiri dan untuk pembangunan gedung-gedung kota di serahkan kepada kebijaksanaan arsitek yang terkenal Dimocrates.

Dan permulaannya Alexandria merupakan suatu kota yang menarik, begitu pula pada masa-masa yang akan datang. Dalam waktu yang singkat banyak sekali diperoleh keuntungan karena kota tersebut merupakan pusat perdagangan yang penting dan merupakan kota metropolitan yang sangat indah di dunia. Setelah Alexander Agung meninggal pada tahun 323 SM kerajaan Macedonia dibagi atas tiga kerajaan sesuai dengan pimpinan militernya masing-masing. Walaupun demikian tetap satu ikatan peradaban yang sama ialah peradaban Hellenistic.

Kira-kira tahun 306 SM, Ptolemy mulai dengan pemerintahannya, ia memilih Alexandria sebagai ibu kota serta mulai mendirikan Universitas Alexandria yang termashur. Susunannya serupa dengan Universitas sekarang yaitu berisi: ruang kuliah, laboratorium, taman, musium dan perpustakaan. Pusat dan lembaga tersebut adalah pcrpustakaan yang besar dimana merupakan tempat penampungan untuk belajar. Kira-kira 300 SM Universitas di dirikan di Alexandria dan dalam waktu 1.000 tahun menghasilkan orang-orang intelektual dari keturunan Yunani. Sebagai penghargaan terhadap kaum intelektual, Ptolemy pergi ke Athena dan mengundang Demetrius Phelereus yang terkenal untuk mengurus perpustakaan yang merupakan Pusat lembaga tersebut.

Kepandaian dan bakat-bakat orang di pilih serta dikembangkan dalam lapangan yang bermacam-macam. Euclid juga dan Athena kemungkinan untuk dipilih menjadi pemimpin di bidang matematika.

2. EUCLID

Pengetahuan tentang kehidupan dan pribadi Euclid, sedikit sekali yang diketahui, Euclid adalah seorang profesor matematika pada Universitas Alexandria, hal ini terbukti dari peninggalan dan gambar-gambar yang terdapat dalam bidang matematika dari Universitas Alexandria. Bahkan tanggal dan tempat kelahirannya juga tidak diketahui, tetapi mungkin Euclid mendapat pelajaran matematika dan latihan-latihan di sekolah Platonic di Athena.

Bertahun-tahun kemudian perbandingan antara Euclid dengan Apollonius, karena ketidak jujurannya Apollonius, Papus memuji Euclid karena kerendahan hatinya dan dapat menerima pendapat orang lain. Unsur-unsur Euclid tidak hanya untuk geometri saja, tetapi berisi sejumlah hal-hal yang berguna bagi teori bilangan dan dasar-dasar aljabar. Unsur itu tersusun dalam 13 buku yang keseluruhannya berisi 465 dalil. Sekolah tinggi di Amerika mengumpulkan dalil-dalil tersebut dalam buku I, II, III, IV, XI dan XII.

Buku I sebagai permulaan tentu saja berisi definisi-definisi, dalil-dalil dan axioma-axioma. Buku ini berisi 48 dalil yang terbagi dalam tiga kelompok; kelompok pertama berisi 26 dalil berkaitan dengan sifat-sifat segitiga dan berisi tiga dalil kongruensi. Dalil 27 hingga 32 terdiri atas dalil tentang garis-garis // dan juga pembuktian bahwa jumlah sudut suatu segitiga sama dengan dua kali sudut siku-siku.

Dalil-dalil yang lain menguraikan tentang jajaran genjang, segitiga, bujur sangkar dan khusus menunjukKan hubungan luas. Dalil 47 adalah teorema Pythagoras dan dalil 48 adalah kebalikan dari teorema tersebut.

Buku II memuat transformasi tentang luas, geometri dan aljabar dari sekolah Pythagoras. Buku III berisi dalil yang terkenal tentang lingkaran, tali busur, garis singgung dan pengukuran tentang hubungan sudut. Buku IV terdapat uraian tentang susunan Pythagoras yang mencakup segi banyak beraturan dari 3, 4, 5, 6 dan 15 sisi. Dengan alat-alat Euclid dapat disusun segi banyak beraturan.

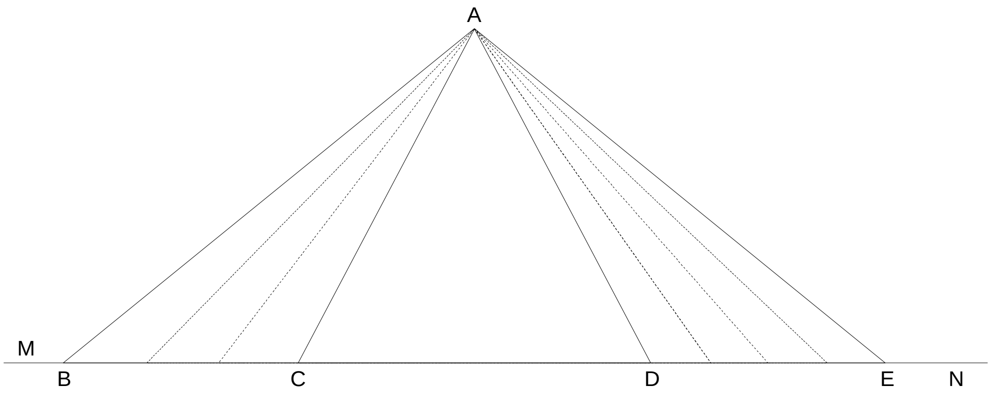
Dalam tahun 1796 ahli matematika Jerman yang terkenal Carl Friedrich Gauss menunjukkan bilangan Primer berbentuk $f(n) = 2^{2n} + 1$ untuk n = 0, 1, 2, 5, 4 di dapatkan f(n) = 3, 5, 17, 257, 65.537. Juga penemuannya pada abad itu yaitu segi banyak beraturan dari 17 sisi. Atas penemuan ini ditunjukkan bahwa dalam permintaannya supaya segi banyak beraturan dari 17 sisi tersebut diukirkan pada batu nisannya. Walaupun permintaan ini tidak pernah dipenuhi, tetapi suatu segi banyak beraturan didapat pada suatu monumen Gauss yang di tegakkan pada tempat kelahirannya di Brunswick.

Buku kelima adalah tentang teori perbandingan doxus. Buku ke enam menggunakan teori Eudoxus tentang perbandingan untuk geometri bidang. Disini kita dapatkan teori dasar bagi sudut-sudut sama, penyelesaian secara geometri dari persamaan kuadrat serta dalil yang menyatakan bahwa garis bagi dalam suatu sudut segitiga membagi sisi depan atas segment garis yang perbandingannya sebanding dengan sisi lain di sampingnya.

Dalil IV: Luas segitiga-segitiga yang mempunyai tinggi sama dimana di tarik ke suatu sisi lain sebagai alas.

Dalil I 38: Menyatakan bahwa segitiga-segitiga yang mempunyai alas dan tinggi sama akan mempunyai luas yang sama. Akibat dari dalil ini: menghasilkan bahwa setiap segitiga yang mempunyai tinggi yang sama dan mempunyai luas yang lebih besar adalah yang mempunyai alas yang lebih panjang. Bila segitiga-segitiga ABC dan ADE yang alasnya BC dan DE yang terletak pada garis lurus yeng sama MN, seperti pada gambar.

Orang-orang yang menganut aliran Pythagoras (sebelum penemuan bilangan irrasioal) berpendirian bahwa setiap dua segment garis dapat dibandingkan. Oleh karena itu BC dan DE diandaikan mempunyai kesatuan ukuran yang sama, katakan p kali BC dan q kali DE tersebut dan titik-titik tersebut dihubungkan dengan titik A.



Kemudian segitiga ABC dan ABE dibagi masing-masing dalam p dan q segitiga-segitiga yang lebih kecil semuanya mempunyai luas yang sama menurut I 38.

Selanjutnya bahwa $\Delta ABC : \Delta ADE$ = p : q = DC : BE. Eudoxius menguraikan secara bijaksana yaitu: pada CB di berikan tanda-tanda berturut-turut dari B, segment yang sama pads CB, dan titik-titik bagi B_2, B_3,…,B_n dihubungkan dengan titik A, seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini.

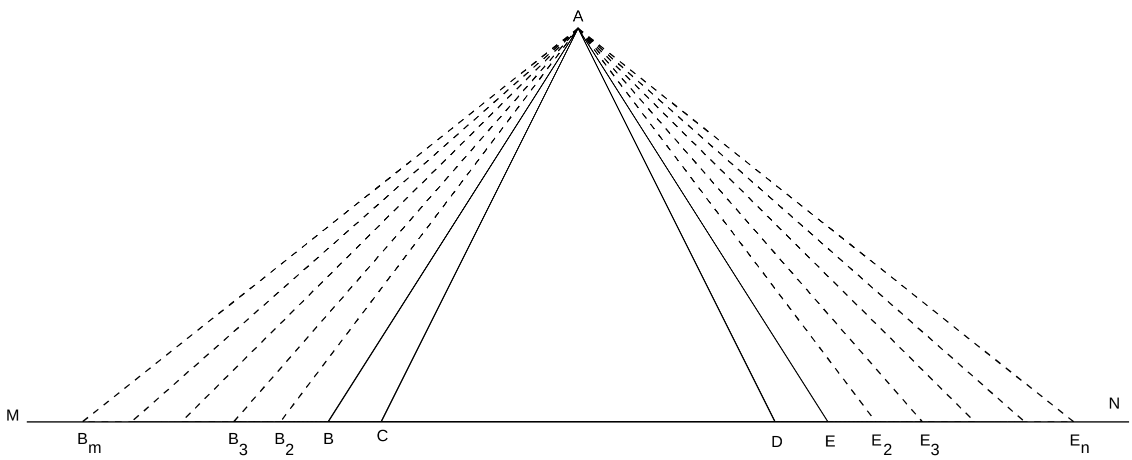
Dengan cara yang sama dibuat tanda-tanda berturut turut dari E, n-1 segment yang sama pada DE dan titik-titik bagi tersebut E_2, E_3 , … E_n dihuhungkan dengan titik A.

Maka : $B_mC = m\,(BC)$, $\Delta AB_mC = m\,(\Delta ABC)$

$DE_n = n\,(DE)$, $\Delta ADE_n = n\,(\Delta ADE)$

Juga oleh I 38 dan akibatnya $\Delta AB_mC \gtreqless ADE_n$, sesuai $B_mC \gtreqless DE_n$

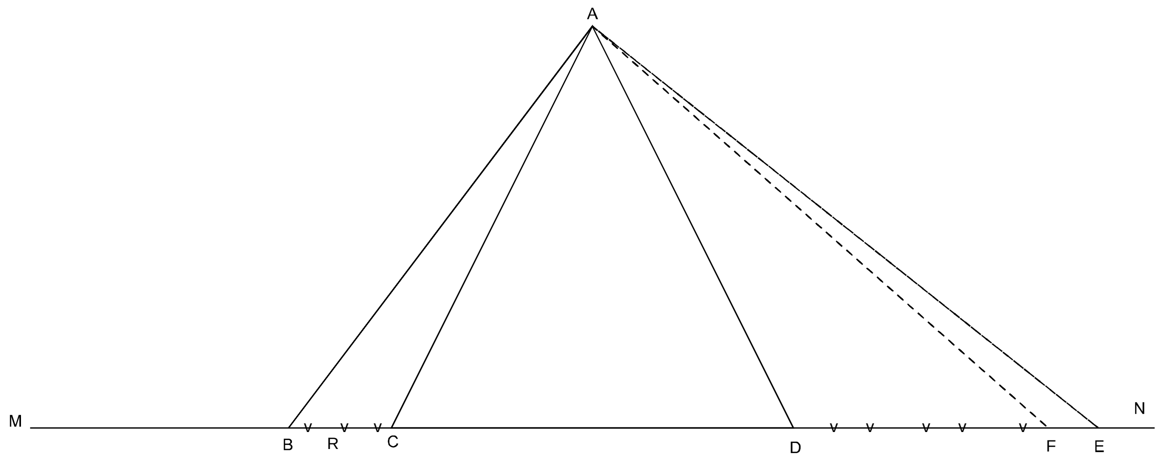
Bahwa $m\,(\Delta ABC) = n\,(\Delta ABE)$, sesuai dengan $m(BC) \gtreqless n(DE)$ dimana dengan definisi perbandingan Eudoxian, $\Delta ABC : \Delta ABE$ = BC : BE dan perbandingan tersebut dapat ditentukan. Dengan tidak menyebutkan besaran yang dapat di ukur dan yang tidak dapat di ukur, sejak definisi Eudoxian



pemakaiannya sesuai dengan keadaan.

Banyak *teksbook* di sekolah tinggi mempelopori suatu bukti tentang teori ini, yang melibatkan dua hal, ialah: apakah BC dan DE sebanding atau tidak? Hal perbandingan itu digunakan sesuai dengan penyelesaian Pythagoras di atas yang batas pengertian dasar digunakan dalam banyak hal yang tidak sebanding.

Oleh sebab itu dengan menganggap BC dan DE tidak sebanding, BC dibagian dalam **n** bagian yang sama, BR adalah satu bagian tersebut (lihat gambar di bawah ini)



Pada DE diukur segment-segment garis yang sama panjangnya dengan BR yang akhinya sampai pada titik F, sehingga FE < BF.

Dari ΔABC : ΔADF = BC : DF. Sekarang $n \to \infty$, maka $DF \to DE$ dan $\Delta ADF \to \Delta ADE$. Karena dalam limit itu ΔABC : ΔADE = BC : BE. Pendekatan ini menggunakan kenyataan hahwa tiap bilangan irrasional dapat dipandang sebagai limit dan suatu barisan rasional, pendekatan di kembangkan dalam zaman modern sekarang oleh George Cantotor (1845 - 1919).

Buku ke VII berisi Euclidean Algorithm untuk mendapatkan pembagi persekutuan terbesar dan dua atau lebih bilangan bulat. Dengan test untuk dua bilangan bulat relatif prima. Buku ke VIII berisi mengenai luas, teori perbandingan yang berhubungan dengan kemajuan geometri. Dalil IX 14 sederajat pentingnya dengan dalil-dalil dasar aritmetika, katakan bahwa setiap bilangan bulat yang lebih besar dari satu dapat dinyatakan sebagai perkalian dan bilangan relatif prime dalam satu dan hanya satu cara. Dalil IX 35 berisi permulaan dari geometri tentang rumus jumlah **n** suku pertama dan dalil terakhir IX 36 menentukan rumus yang menakjubkan bagi bilangan sempurna.

Pembuktian Euclid pada IX 2Q, bahwa banyaknya bilangan prime itu adalah tidak terhingga. Buktinya dengan menggunakan metode tak langsung atau *reductio ad absurdum* dan caranya sebagai berikut: Andaikan jumlahnya terhingga dari bilangan prime itu yang ditünjukkan dengan a, b, c,… , k.

S_{et} P = a.b.c . k , maka P + I adalah prime yang lain atau kompositnya. Tetapi karena a,b,c,... k, semuanya bilangan prime, P + 1 lebih besar dari pada setiap a, b, c, . . . k, bukan sebuah bilangan prime.

Dengan kata lain, jika P + 1 adalah kompositnya harus dapat dibagi oleh beberapa bilangan prime. Tetapi harus suatu anggota dari set a, b, c, , . . . , k dari semua bilangan prime, berarti bahwa p adalah suatu pembagi dari P. Akibatnya p tidak dapat membagi P + 1 , karena p>1. Oleh karena itu hipotesa kita yang mengatakan bahwa jumlah bilangan prime adalah terhinga tak dapat dipertahankan dan dalil itu adalah benar.

Buku ke X berhubungan dengan bilangan irrasional. Sisanya tiga buku ialah XI, XII, XIII ketiga-tiganya berisi geometri. Definisi-definisi, dalil-dalil tentang garis dan bidang dalam ruang dan dalil-dalil tentang kumpulan garis sejajar di dapat dalam buku XI.

AKSIOMA DAN POSTULAT EUCLIDES

A 1 : Hal-hal yang sama dengan hal lain yang sama adalah sama satu terhadap lainnya.

A 2 : Apabila yang sama di ditambahkan kepada yang sama maka keseluruhanya adalah sama pula

A 3 : Apabila yang sama di kurangkan dari yang sama maka sisanya adalah sama pula.

A 4 : Hal-hal yang saling berimpit satu terhdap yang lainnya adalah sama satu terhadap yang lainnya.

A 5 : Keseluruhan adalah lebih besar dari sebagiannya.

P 1 : Dapat di lukiskan garis lurus dari setiap titik ke setiap titik lainnya.

P 2 : Dapat memperpanjang garis terbatas sampai tak terbatas .

P 3 : Dapat dilukiskan lingkaran dengan setiap titik sebagai pusat dari jari-jari yang ditarik dari pusatnya.

P 4 : Semua sudut siku-siku adalah sama terhadap yang lainnya.

p 5 : Postulat tentang garis parallel

a. Algoritma Euclides

Suatu metode dalam mencari pembagi persekutuan terbesar dari dua atau lebih bilangan riel positif. Bagilah yang besar dari dua bilangan riel positif itu oleh bilangan yang kecil. Sesudahnya bagilah oleh pembagi sisanya Teruskan metode ini sarnpai pembagian dari pembagi terakhir oleh sisa terakhir dapat tepat habis di bagi. Pembagi yang terakhir itu adalah pembagi persekutuan terbesarnya.

Contoh:

Carilah pembagi persekutuan terbesar menurut metode algoritma Euclides dari 1827, 2523, 3248.

3248 = 1 x 2523 + 725

2523 = 3 x 725 + 348

725 = 2 x 348 + 29

348 = 12 x 29 + 0

2523 = 1 x 1827 + 698

1827 = 2 x 696 + 435

696 = 1 x 435 + 261

435 = 1 x 174 + 87

174 = 2 x 87+ 0

3248 = 1 x 1827 + 1421

1827 = 1 x 1421 + 406

1421 = 3 x 406 + 203

406 = 2 x 203 + 0

(3248, 2523) = 29

(2523, 1827) = 87 = 3 x 29

(3248, 1827) = 203 = 7 x 29

Maka pembagi persekutuan terbesarnya = 29.

b. Penggunaan Dalil Dasar Aritmetika

Dalil dasar aritmetika mengatakan bahwa: suatu bilangan bulat positif a dapat ditulis: $a = 2^{a1}\ 3^{a2}\ 5^{a3} \ldots$

Dengan 2,3,5,… bilangan prime yang berurutan. Kita simbulkan a (a_1, a_2, a_3, …)

Contoh:

12	= (2, 1)
14	= (1, 0, 0, 1)
27	= (0, 3)
360	= (3, 2, 1)

Sekarang buktikan bahwa V3 adalah irrasional.

Bukti:

Misalkan V3 = a/b, maka $a^2 = 3\ b^2$

$a = 2^{a1}\ 3^{a2} \ldots p_k^{ak}$ atau $a = (a_1, a_2, \ldots)$

$b = 2^{b1}\ 3^{b2} \ldots q_1^{b1}$ $b = (b_1, b_2, \ldots)$

$a^2 = 2^{2a1}\ 3^{2b2} \ldots p_k^{2ak}$ $a^2 = (2_{a1}, 2_{a2}, \ldots)$

$b^2 = 2^{2b1}\ 3^{\ 2b2} \ldots q_1^{2bk}$ $b^2 = (2_{b1}, 2_{b2}, \ldots)$

$$a^2 = 3\ b^2$$

$$3^{2a2} = 3^{2b2} + 1$$

$$2_{a2} = 2_{b2} + 1$$

$$2_{a2} - 2_{b2} = 1$$

$$A_2 - b_2 = ½$$

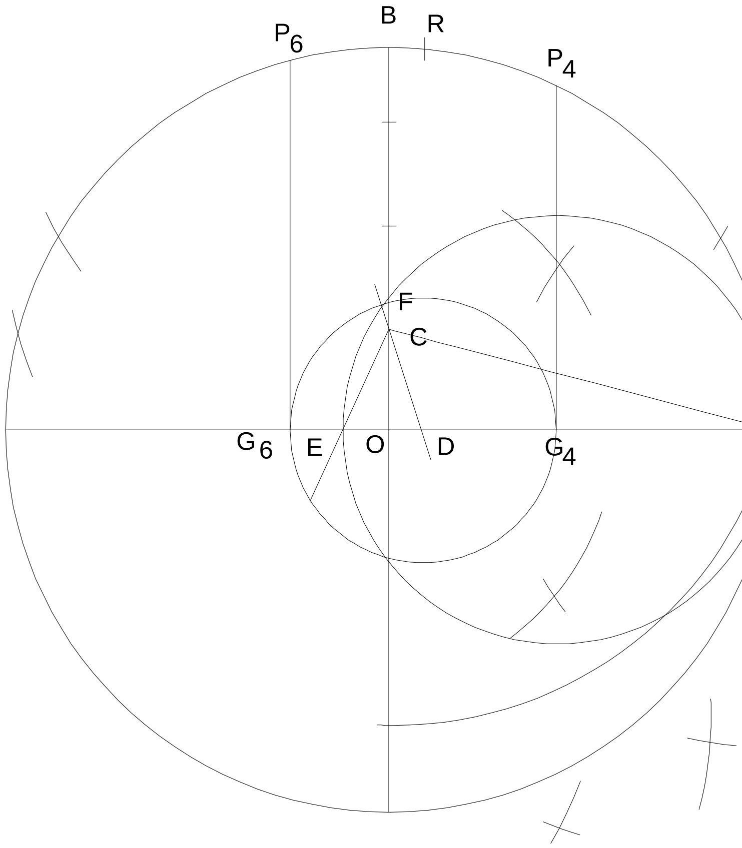
Hal ini adalah tidak mungkin.

Soal latihan

1. Carilah pembagi persekutuan terbesar dengan menggunakan metode Algoritma Euclides dari bilangan:
   a. 5913 dan 7592 c. 21109 dan 32219
   b. 6667 dan 7729 d. 32219 dan 42319
2. Buktikan bahwa V2 dan V5 adalah bilangan irrasional.
3. Lukislah segi banyak beraturan yang memiliki sisi :

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 dan 17.

Di bawah ini di tunjukkan cara menggambar segi tujuh belas beraturan (Gauss)



1. Buat lingkaran 0(0,0)

2. Lukis C di OB sehingga OC = ¼ OB

5. Lukis sudut OCD = ¼ sudut OCA, tarik DR//OB (R di busur lingkaran)

4. Lukis sudut DCE = 45° (E di garis terigah AO)

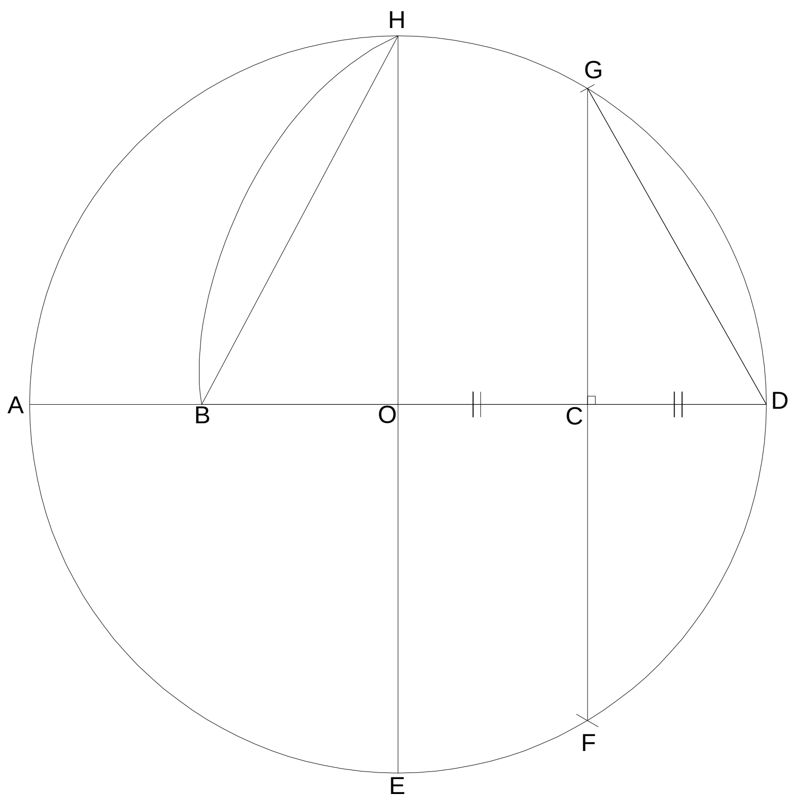
5. Lukis lingkaran yang berpusat di EA dengan jari-jari ½ EA memotong OB di F.

6. Lukis lingkaran (D, DF) memotong OA di G_4 dan G_6

7, Tarik L_1 dan L_2 melalui G_4 dan G_6 // OE yang memotong lingkaran di P_6 dan P_4.

8. RP_4 atau RP_6 merupakan salah satu sisi segi 17 beraturan.

Di bawah ini disajikan sisi segi banyak beraturan lain!



DG = sisi segi enam beraturan.
PG = sisi segi tiga bcrauran.
CG = sisi segi tujuh beraturan.
RB = sisi segi lima beraturan.
BC = sisi segi sepuluh beraturan.

BAB VI
MATEMATIKA YUNANI SETELAH EUCLID

Setelah hampir 300 tahun kota Alexandria bebas dari perselisihan. Dalam tahun 212 SM Syracuse ditaklukan dan tahun 146 SM Chartage juga jatuh, serta akhirnya kota Yunani Corinth Greece menjadi sebuah propinsi kerajaan Roma, sedangkan Mesopotamia tidak terkalahkan sampai tahun 65 SM dan Mesir tinggal di bawah Ptolemise sampai tahun 30 SM. Kebudayaan Yunani berkembang melalui kehidupan Roma serta agama nasrani mulai berkembang terutama diantara budak-budak belian dan pengemis.

Constantine adalah kaisar Roma pertama yang memeluk agama nasrani yang merupakan agama resmi. Dalam tahun 330 Constantine memindahkan modalnya dari Roma ke Byzantium. Tahun 395 kerajaan roma dibagi kedalam kerajaan timur dan barat, Greece sebagai bagian dari timur. Dan akhirnya dalam tahun 641 Alexandria dikuasai oleh Arab.

1. ARCHIMIDES

Ia dilahirkan sekitar tahun 287 SM dan meniggal ketika Roma menjajah Syracuse dalam tahun 212 SM. Ia anak seorang ahi ilmu falak. Sejarah Roma banyak berkaitan dengan cerita-cerita indah tentang Archimedes, mialnya: tentang cara Archimedes ketika membantu mempertahankan Syracuse melawan pengepungan langsung oleh jendral Roma Marcellus.

Dengan pelempar (ketapel) yang besar untuk melempar benda-benda berat ke atas kapal musuh, sehingga armada laut hancur. Cerita lain, ia menggunakan kaca pembakar yang besar untuk membakar musuh. Ia memberikan kepercayaan dengan diumumkannya: "bolehlah saya berdiri/berpijak dan saya akan menggerakan bumi".

Jelas bahwa Archimedes pandai, berpola pikir hebat untuk memecahkan suatu masalah atau soal. Misalnya cerita tentang mahkota raja Hieron, dimana sang raja merasa kurang percaya kepada tukang emas (si pembuat mahkota) yaitu takut apabila mahkotanya sebagian diisi dengan perak.

Maka persoalan tersebut diserahkan kepada Archimedes dengan menunjukkan bahan pokoknya dan selama satu hari ia memecahkan soal tersebut. Ia dapatkan ketika ia sedang mandi di bak mandi, rupanya dengan menggunakan hukum hydrostatis. Tiga hasil pemikiran Archimedes yang cukup besar yaitu pada geometri bidang (planimetri), pengukuran lingkaran, bentuk kuadrat dan parabola, dan bentuk-bentuk yang lain.

Seorang arab menulis tentang hasil karya Archimedes yang lain adalah penemuan tentang rumus segituga :

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Untuk menghitung luas suatu daerah yang dibatasi oleh garis lengkung Archimedes menggunakan metode menghabiskan: mula-mula dihitung sebagian dari padanya dan kemudian dengan suatu cara sebagian sisa itu dihitung lagi. Demikianlah sisa-sisa itu terus dihitung sehingga akhirnya semuanya habis dihitung. Karena menghitung sampai habis sisanya ada yang sukar, maka dapat saja ditentukan suatu nilai tertentu dengan kemungkinan bahwa hasil hitungan lebih besar dari nilai tertentu itu, lebih kecil atau sama. Dengan membuktikan bahwa nilai-nilai yang lebih besar dan lebih kecil dari nilai tertentu itu tidak mungkin maka diperoleh hasil hitungan yang sama dengan nilai tertentu itu.

Dari Archimedes diketemukan pula penentuan nilai bilangan π yang lebih teliti. Archimedes membuat poligon beraturan dalam dan poligon beraturan luar pada lingkaran. Nilai π akan terletak diantara hasil perhitungan keliling atau luas yang diperoleh dari kedua poligon beraturan itu. Makin besar jumlai sisi beraturan itu makin sempit pula selisih diantara keduanya sehingga makin teliti pula nilai π yang diperoleh.

Dengan membuat jumlah sisi poligon beraturan itu sampai sebanyak 96, ia menemukan nilai π terletak diantara nilai nilai sebagai berikut :

$$\frac{6{,}336}{2{,}017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14{,}688}{4{,}673\frac{1}{2}}$$

Atau dalam penulisan kita sekarang dibentuk :

3,140909. . .< π < 3,142826 . . ., sehingga apabila diambil rata-ratanya = 3,141863 .

Masih banyak lagi penemuan dari Archimedes antara lain pada geometri tiga dimensi ialah: bola, silinder, dan tentang keseimbangan.

2. ERATOSTHENES

Adalah seorang kelahiran dari Cyrene pada pantai selatan laut Mediteranian beberapa tahun lebih muda dari Archemedes. Ia selama hidupnya di Athena, kemudian diundang oleh Ptolomeus III dari Mesir untuk datang ke Alexandria sebagai guru yang mengajar di rumah pada anaknya laki-laki dan membantu sebagai kepala perpustakaan pada Universitas disana. Cerita tentang masa tuanya sekitar tahun 194 SM ia hampir buta karena sakit radang di mata dan bermaksud bunuh diri daripada hidup sengsara. Eratosthenes amat cakap dalam semua cabang pengetahuan tetapi tidak ada yang paling menonjol, sewaktu hidupnya dalam setiap cabang ilmu pengetahuan. Ini adalah salah satu sebab yang merupakan dugaan bahwa ia diberi nama tambahan “ Beta ”. Ia adalah seorang terkemuka terlatih, penyair, ahli ilmu falak, ahli ilmu bumi, ahli sejarah dan ahli matematika.

Dalam ilmu hitung Eratosthenes menemukan suatu cara dalam mencari bilangan prima yang lebih kecil dari suatu bilangan n yang diberikan. Hal ini terkenal dengan nama: saringan Eratosthenes, yaitu dengan semua bilangan bulat positif, kemudian dicoret/dihilangkan bilangan-bilangan yang tidak termasuk dalam bilangan prima atau kelipatan dari bilangan prima di depannya.

Misalnya dalam mencari bilangan prima yang lebih kecil dari 100 dilakukan sebagai berikut :

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~1~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
, ~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	**87**	~~88~~	~~89~~	~~90~~
9	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

3. BILANGAN PRIMA

Dasar Aritmatika mengatakan bahwa bilangan prima adalah dasar dari segala bilangan bulat positif. Dari bilangan prima akan diperoleh beberapa sifat bilangan positif bulat. Sejak zaman purbakala telah dibuktikan oleh Euclid bahwa bilangan prima adalah tak terhingga. Begitu pula dapat dilihat dari saringan Eratosthenes seperti di atas, serta dari saringan tersebut dengan mudah diketahui bahwa menemukan rumus bilangan prima adalah sukar.

Dalam tahun 1870 Ernst Meissel berhasil menunjukkan banyaknya bilangan prima lebih kecil dari 10^8 adalah 5.761.455.

Ahli matematika Bertelsen melanjutkan perhitungan ini dan mengumumkan dalam tahun 1893 bahwa banyaknya bilangan prima lebih kecil dari 10^9 adalah 50.847.478. Dalam tahun 1959 ahli matematika Amerika D.H. Lehmer menunjukkan hasil terakhir ini tidak benar dan yang benar adalah 50.847.534, ia juga menunjukkan bahwa bilngan prima lebih kecil dari 10^{10} banyaknya adalah 455.052.511. Selama lebih dari pada 75 tahun bilangan-bilangan paling besar sebagai suatu prima adalah bilangan yang terdiri dari 39 angka. $2^{127} - 1$ = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727, diberikan oleh ahli matematika perancis Anatole Lucas dalam tahun 1876.

Dalam tahun 1952, mesin EDSAC di Cambridge England menemukan bilangan yang lebih besar terdiri dari 79 angka yaitu : $180\ (2^{127} - 1)^2 + 1$, kemudian diikuti dengan didapatkan bilangan–bilangan yang lebih besar dari $2^n - 1$ untuk n = 521, 607, 1.279, 2.203, 3.217, 4.253 dan 4.423. Suatu usaha untuk mencari sebuah fungsi f (n) dimana untuk bilangan positif n akan menghasilkan barisan bilangan prima. Suatu fungsi $f(n) = n^2 - n + 41$ menghasilkan bilangan prima untuk n < 41, tetapi f (41) merupakan bilangan komposit. Suatu persamaan kuadrat $f(n) = n^2 - 79n + 1.0601$ menghasilkan bilangan prima untuk semua n < 80. Sekitar tahun 1640 Pierre de Fermat menduga bahwa $f(n) = 2^{2^n} + 1$ adalah bilangan prima untuk segala n bilangan bulat bukan negatif.

4. APOLLONIUS

Euclid, Archimedes dan Apollonius adalah tiga raksasa matematikawan dari abad ketiga SM. Apollonius yang lebih muda dari Archimedes sekitar 25 tahun, dilahirkan di sekitar tahun 262 SM di Perga daerah selatan Asia kecil. Sedangkan tentang kehidupan dari Apollonius sangat sedikit yang diketahui. Ia pergi ke Alexandria belajar di bawah bimbingan pengganti dari Euclid dan selanjutnya ia mengunjungi Perguruan sebelah barat asia kecil dimana disana dijumpai sebuah Universitas dan perpustakaan seperti Alexandria.

Ia kembali ke Athena dan meniggal dunia disana pada satu tempat sekitar tahun 200 SM. Meskipun Apollonius adalah seorang ahli ilmu falak ia juga menulis tentang matematika. Dalam delapan buah buku yang berisi kira-kira 400 dalil: berisi tentang kurva yang dilengkapi/melengkapi hasil Menachmus, Aristaeus dan Euclid.

BAB VII
MATEMATIKA HINDU DAN ARAB

1. INDIA

Tidak ada sedikitpun catatan yang otentik yang diketahui dengan pasti tentang perkembangan matematika Hindu kuno. Namun menurut data sejarah, pada zaman 5000 tahun yang lampau di India telah berdiri suatu kota yang bernama Mahenjodaro. Peninggalan kota ini hingga sekarang masih dapat kita lihat dengan jelas. Namun disayangkan tidak ada kejelasan penerangan yang dapat diperoleh dari peradaban Mahenjodaro ini, kecuali bekas-bekas jalan yang teratur, bangunan-bangunan batu sebagai tempat tinggal yang memenuhi persyaratan sehingga merupakan suatu perkampungan yang sudah ditata dengan baik dan teratur. Melihat kenyataan demikian, dapatlah dipastikan bahwa orang-orang india pada zaman itu sudah dapat menulis, menghitung, mengukur, menimbang dan membuat saluran-saluran untuk irigasi.

Kira-kira 4000 tahun yang silam, suku bangsa Aria dari Asia tengah telah menyeberang pegunungan Himalaya, dan menjelajahi daratan India. Mereka inilah yang kelak menyumbangkan peradaban sansakerta sebagai kebudayaan hindu kuno dari India. Dalam 1000 tahun yang pertama, bangsa aria telah dapat menulis dan berbicara bahasa sansakerta (sanskrit). Mereka sudah memulai dengan kehidupan yang mengenal sistim kasta. Sedangkan yang memerintah pada waktu itu adalah nenek moyang orang India dari golongan ahli bahasa Panini dan para guru agama budha. Keadaan ini kemungkinan berlangsung sampai menjelang masa Sulvasutras (hukum-hukum tali temali), yaitu diketemukannya beberapa tulisan yang bersifat keagamaan dan berhubungan dengan sejarah perkembangan matematika. Pada masa ini, mereka telah menciptakan hukum-hukum geometri untuk kerangka tempat-tempat pemujaan dengan cara merentangkan tali-tali. Selain itu, mereka telah pula mampu memperlihatkan pendekatan yang berhubungan dengan bilangan-bilangan Pythagoras.

Pada abad ke-6 SM, daratan India diserang oleh tentara Persia (persian) di bawah pimpinan Darius. Kemudian pada tahun 326 SM, daratan India jatuh pula ketangan orang-orang Yunani yang dipimpin oleh Iskandar Zulkarnaen. Setelah adanya penaklukan tersebut, berdirilah kerajaan Maurya. Dinasti Maurya telah mampu mengusir kekuasaan Yunani dan berhasil pula menyatukan kerajaan-kerajaan kecil yang tersebar di India. Salah seorang keturunan dinasti Maurya yang sangat terkenal adalah raja Asoka (272-232 SM).

2. Perhitungan Angka-Angka

Dalam fasal yang lalu, kita telah memperhatikan sebagian kecil perkembangan system numerasi tempat yang berasal dari peradaban matematika hindu kuno. Sekarang, kita akan melihat beberapa cara menghitung orang-orang hindu kuno, yaitu metode berhitung yang berlaku dalam system numerasi tersebut.

Menurut ahli sejarah Jerman, H. Hankel, orang-orang hindu biasanya menulis pada papan tulis dengan sepotong kayu yang menyerupai pensil dengan mencelupkannya pada sejenis cat putih yang mudah dihapus. Kemungkinan penjumlahan yang dilakukan pada zaman hindu kuno dari arah kanan ke kiri, berbeda dengan yang kita lakukan sekarang. Misalnya kita akan menuliskan penjumlahan 345 dan 488. Caranya tuliskan 345 di atas 488 atau sebaliknya. Kemudian hitung 3+4=7, dan tuliskanlah 7 di atas 3. Selanjutnya, 4+8=12, lalu coretlah 7 dan tuliskanlah 8 di atasnya, sedangkan 2 ditulis di atas 4. Kemudian jumlahkan pula 5 dengan 8 atau 5 + 8 = 13, coretlah 2 dan tulis di atasnya, lalu tuliskan pula 3 di atas 5.

8 3
7 2 3
3 4 5
4 8 8

Sebagai hasilnya kita baca 833. Selanjutnya angka 345 dan 488 dapat dihapus, sehingga didapatkan tempat untuk menyelesaikan soal lainya. Dalam penyelesaian yang diberikan oleh Bhaskara dan Lila vatti, ditemukan metode lain tentang penjumlahan. Misalnya untuk menjumlahkan 345 dan 488 dikerjakan dengan proses seperti berikut:

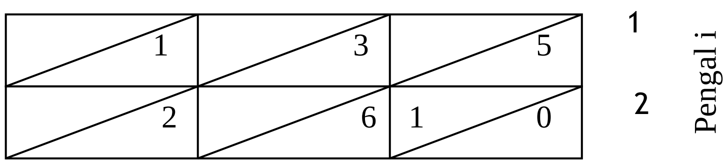
Jumlah satuan	5 + 8 = 1 3
Jumlah Puluhan	4 + 8 = 1 2
Jumlah ratusan	3 + 4 = 7 . .
Jumlah keseluruhan	= 8 3 3

Adapula beberapa metode yang sederhana untuk melakukan perkalian. Misalnya 569 dikalikan dengan 5, caranya tuliskan dulu angka 569 sebaris dengan angka 5 sebagai pengalinya. Selanjutnya hitung 5 x 5 = 25. Untuk mengerjakan operasi kali terhadap bilangan-bilangan yang lebih besar, dapat dikerjakan dengan cara yang sama, hanya prosesnya dilakukan beberapa kali. Misalnya untuk menghitung: 135 x 12, pertama-tama kita cari hasil perhitungan 135 x 4 = 540, kemudian 540 x 3 = 1620. Atau dengan menggunakan hasil perkalian 135 x 10 = 1350 dan 135 x 2 = 270, sehingga didapatkan hasil akhir yang sama yaitu 1620.

Adapula metode lain dalam operasi kali yang telah lama dikenal oleh orang-orang Arab, dan kemungkinan didapatkan dari matematika orang Hindu. Misalnya untuk mendapatkan hasil perkalian bilangan 135 dengan 12. Prosesnya dilakukan dengan membuat diagram dan melakukan penjumlahan secara diagonal dengan langkah-langkah seperti berikut. Pertama-tama tuliskan angka 135 dibagian sebelah atas diagram dan angka 12 disebelah kanannya dengan angka satu ditulis di atas angka dua. Selanjutnya berturut-turut kita lakukan perkalian-perkalian 1 x 5 = 5, 1 x 3 = 3, dan 1 x 1 = 1, kemudian hasil-hasilnya dituliskan kedalam diagram yang tersedia. Dengan cara yang sama 2 dikalikan pula dengan 135 dan hasilnya di

(bilangan yang dikalikan)

1 3 5



1 6 2 0

(Hasil perkalian)

tulis pada diagram seperti tadi. Selanjutnya, pada diagram dilakukan penjumlahan secara diagonal dimulai dari sebelah kanan bergerak kesebelah kiri, sehingga diperoleh hasil akhir 1620. Dalam hal ini 135 dikatakan sebagai bilangan yang dikalikan, 12 sebagai pengali, dan 1620 sebagai hasil kalinya. Masih banyak lagi proses perhitungan yang dipakai oleh orang-orang Arab sebagai hasil adaptasi dari proses perhitungan yang dipakai oleh orang-orang hindu kuno.

Pada abad ke-7, metode-metode perhitungan yang berasal dari wilayah India telah banyak yang dikembangkan oleh orang-orang Arab, sehingga menghasilkan operasi-operasi aritmatika, dan mulai abad ke-15 sistim penulisan aritmetika ini telah menyebar keseluruh wilayah Eropa.

3. Aritmetika dan Aljabar

Orang—orang Hindus (India) adalah orang—orang yang mempunyai kepandaian dalam aritmetika, dan mereka telah pula memberikan sumbangan yang berarti dalam aljabar. Telah banyak permasalahan dalam aritmetika yang diselesaikan dengan cara-cara yang keliru. Cara menyelesaikan soal matematika yang digemari oleh mereka adalah cara inversi, yaitu mengerjakan sesuatu secara berkebalikan atau berlawanan dengan informasi yang diterima. Sebagai contoh, kita perhatikan masalah berikut yang diberikan pada abad ke—6 oleh Aryabhata :

"Seorang perawan yang cantik dengan mata yang bercahaya, menyatakan kepada saya, bila anda telah ngerti dengan baik metode inversi, bilangan manakah yang setelah dikalikan dengan 3, keMudian hasilnya dikalikan dengan 7/4, di bagi oleh 7, hasil baginya dikalikan oleh 2/3, dikalikan dengan bilangan' itu sendiri, dikurangi 52, kemudian hasilnya ditarik dengan akar kuadrat, ditambah 8, dan dibagi dengan 10 akan menghasilkan 2 ?

Dengan menggunakan metode inversi, kita bekerja terbalik, yaitu dimulai dari bilangan 2 dan bekerja dimulai dari belakang terus kedepan. Jadi, kita dapatkan jawabannya

(1) (10) - 8^2+52 = 196

196 = 14,

$$\frac{(14)\left(\frac{3}{2}\right)(7)\left(\frac{4}{7}\right)}{3} = 28$$

Jika kita perhatikan, dalam persoalan ini kita dimintakan untuk membagi dengan 10, maka kita mengalikan dengan 10. Jika kita diharuskan untuk menambahkan dengan 8, maka. kita menguranginya dengan 8. Jika kita diharuskan untuk menarik akar kuadrat, maka kita kuadratkan, dan sterusnya. Bentuk di atas merupakan salah satu pengerjaan hitung secara inversi sehingga dinamakan metode inversi. Hal berikut merupakan penyelesaian dengan metode yang modern yang bertentangan dengan metode inversi di atas. Jadi, jika kita akan menyatakan x dalam suatu bilangan yang harus dicari dan persamaan yang di berikan seperti berikut:

$$\sqrt{\{(3x)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\}3^2}$$

Pertama-tama kedua ruasnya dikalikan dengan 10, kemudian dikurangi 8, kemudian masing-masing dikuadratkan dan seterusnya. Proses di atas merupakan pemakaian praktis dalam menyelesaikan soal-soal aritmetika secara puitis. Hal demikian terjadi, disebabkan naskah soal-soal sering ditulis sebagai syair yang di pergunakan untuk sarana hiburan. masyarakat. Orang-orang Hindu telah pula menggunakan aritmetika dan geometri untuk menyelesaikan masalah-masalah perdagangan yang sederhana, terutama dalam menghitung bunga, potongan harga, dan dalam patungan. Selain itu, mereka telah pula menggunakan kedua ilmu itu untuk memecahkan persoalan yang bervariasi yang ditemukan dalam kehidupan sekitarnya. Beberapa contoh dalam masalah aritmetika Hindu dapat kita jumpai dalam soal-soal latihan.

Banyak pengetahuan kita tentang aritmetika Hindu yang berasal dari tulisan Bhaskara yang berjudul ‘Lilavati’. Menurut hikayatnya, bintang-bintang telah meramalkan nasib buruk dan mengerikan yang akan menimpa putri Bhaskara yang bernama Lilavati, jika ditikahkan di luar waktu dan hari yang damai yang telah ditentukan. Pada hari yang damai, ketika pengantin wanita sedang menyaksikan turunnya air dari sebuah tabung tiba-tiba hiasan mutiara dari kepala tabung jatuh dari tempat, menyumbat lubang tabung, sehingga air yang mengalir terhenti. Untuk menghibur putrinya yang mendapat kesedihan, Bhaskara menamakan kitabnya seperti nama anaknya “Lilävati”.

Orang-orang Hindu telah pula meningkatkan pengetahuan mereka dalam aljabar. Diantaranya, Diophantus telah menunjukkan operasi tambah dengan menempatkan secara sejajar, operasi kali di nyatakan dengan menuliskan “bha” (suku pertama dari kata “bhavi-ta” yang berarti ‘hasil”) setelah suku-suku yang dikalikannya, operasi bagi dilakukan dengan menuliskan pembagi yang terletak di bawah yang dibagi, akar kuadrat ditulis dengan mencantumkan huruf “ka” (berasal dari kata “karana” yang ‘berarti “irasional”) di depan bilangannya.

Selain dari itu, Brahmagupta telah pula menuliskan sesuatu yang belum diketahui dengan menggunakan tanda “ya” (‘berasal dari kata “Yavattavat” yang berarti sebanyak itu”). Sedangkan bilangan-bilangan yang sudah diketahui ditulis dengan diberi awalan “ru” (berasal dari kata rupa” yang ‘berarti bilangan terukur”). Jumlah berikutnya yang belum diketahui ditandai dengan huruf “ka” (berasal dari kata “karana:”yang berarti “hitam”), dan untuk menyatakan:

$8^{xy+}\sqrt{10-7}$ mungkin ditulis seperti berikut:

ya ka 8 bha ka 10 ru 7

Orang-orang Hindu kuno telah mengakui adanya bilangan negatif dan bilangan positif. Mereka telah mengenal pula bahwa sebuah kuadrat mempunyai dua akar nyata. Mereka menyelesaikan persamaan kuadrat secara aljabar dengan melengkapkan kuadrat. Metode ini sekarang sering pula disebut sebagai metode “Hindu”. Berkaitan dengan metode Hindu ini Bhaskara telah memberikan sebuah identitas yang luar biasa, yaitu:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a+\sqrt{(a^2-b)/2}} \pm \sqrt{(a-\sqrt{(a^2-b)/2}}$$

yang kadang-kadang digunakan dalam perhitungan aljabar kita untuk menemukan akar kuadrat dari binomial. Ciri-ciri identitas seperti ini telah pula dimuat dalam buku Element Euclid jilid X, dan disajikan dengan bahasa yang sukar untuk dimengerti. Orang-orang Hindu kuno telah memperlihatkan kemampuan yang luar biasa dalam hal analisis, dan barangkali merupakan alat pertama yang sangat tajam dan sebagian besar metode-metode dalam cabang-cabang matematika. Sebagai contoh, Brahmagupta dan Aryabhata telah menemukan penyelesaian secara terpadu untuk persamaan linear dalam bentuk:

$ax + by = c,$

dengan a, b, c anggota-anggota & bilangan bulat. Sedangkan persamaan kuadrat dalam bentuk

$xy = ax + by + c$

diselesaikan dengan metode yang lain yang diketemukan kemudian oleh Euler. Karya lain dari Brahmagupta dan Bhaskara adalah sebuah persamaan yang disebut persamaan Pell dalam bentuk:

$y^2 = ax^2 + 1$

dengan a bukan bilangan bulat kuadrat, tetapi ada beberapa orang yang menganggap a sebagai bilangan bulat kuadrat. Teori lengkap tentang persamaan Pell diberikan oleh Lagrange pada tahun 1766-1769. Perlu pula diketahui, bahwa sampainya karya-karya orang Hindu ke wilayah-wilayah Eropa Barat agak terlambat, sehingga tidak terlalu banyak pengaruhnya.

4. Geometri dan Trigonometri

Orang-orang Hindu kuno tidak hanya mempunyai keahlian dalam bidang geometri saja. Mereka telah mengembangkan teorema-teorema geometri ke arah yang lebih luas dan berhubungan dengan pengukuran. Dalam kitab kuno Sulvasutras diperlihatkan bahwa orang-orang Hindu Kuno telah mampu menerapkan geometri untuk membuat konstruksi bangunan teorema Pythagoras. Mereka telah dapat menyelesaikan masalah "membujursangkarkan suatu lingkaran" (mengkuadratkan suatu lingkaran), yang menurutnya ekuivalen dengan bentuk:

$d = \frac{(2\sqrt{2})s}{2a3}\ dan\ \frac{13d}{15},$

dengan d ukuran panjang diameter lingkaran, dan S ukuran panjang sisi bujursangkar. Selain itu, mereka telah pula memperlihatkan, bahwa 2 dapat ditulis dalam bentuk:

$$\sqrt{2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)}},$$

dan yang menarik perhatian kita, bahwa semua pecahan telah dinyatakan ketelitiannya sampai lima tempat desimal.

Brahmagupta dan Mahavira tidak hanya memberikan rumus untuk mencari luas daerah segitiga, tetapi mereka telah mampu mengembangkannya sampai kepada rumus: $k = [(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]\frac{1}{2}$, dengan a, b, c, dan d adalah sisi-sisi sedangkan s sebagai semi parameter. Rumus ini dipakai untuk mencari luas daerah segi empat tersebut. Yang menarik perhatian dari geometri Hindu, adalah teorema yang diberikan oleh Brahmagupta. Ia mengatakan bahwa panjang diagonal-diagonal m dan n dari suatu segi empat talibusur dengan ukuran sisi-sisinya a, b, c, dan d, mempunyai hubungan seperti berikut: $k^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2[(A+C)/2]$

Dengan A dan C sepasang sudut tumpul dari sudut -sudut segiempat tersebut. Yang menarik perhatian dari geometri Hindu, adalah teorema yang diberikan oleh Brahmagupta, Ia mengatakan bahwa panjang diagonal-diagonal m dan n dari suatu segiempat talibusur dengan ukuran sisi-sisinya a, b, c, dan d mempunyai hubungan seperti berikut:

$m^2 = (ab+cd)(ac+bd)/(ad+bc)$

$n^2 = (ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)$

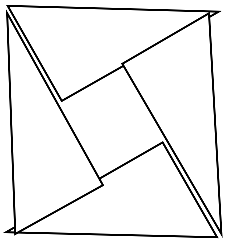
Dengan a, b, c, A, B, C, adalah bilangan-bilangan bulat positif, sehingga berlaku hubungan:

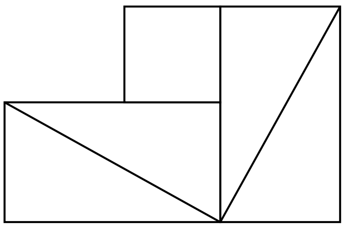
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ dan } A^2 + B^2 = C^2$$

dan segiempat talibusur itu akan mempunyai sisi-sisi aC, cB., bC, dan cA (disebut Trapesiurn Brahmagupta). Dan tentunya bangun geometri seperti ini akan mempunyai luas daerah yang rasional dengan bepotongan tegaklurus.

Banyak pula rumus-rumus lainnya yang diberikan oleh matematikawan Hindu dalam mengembangkan matematika. Aryabhata telah memberikan rumus untuk menghitung setengan pyramid dan volume bola $= \pi^{3/2} r^{3/2}$. Mereka telah memberikan harga π(pi) dengan nilai yang cukup akurat, yaitu π=3dan $\pi = \sqrt{10}$

Para siswa sekolah lanjutan sudah terbiasa dalam pelajaran geometri untuk membuktikan Teorema Pythagoras. Salah satu cara membuktikannya diberikan oleh Bhaskara. Dalam gambar ini terlihat empat buah segi tiga siku-siku yang sama dan sebangun dan sebuah segi empat dengan sisi-sisi yang sama panjang. Bhaskara telah membuat gambar seperti itu tanpa memberikan keterangan yang lebih lanjut, selain dari yang kita lihat.





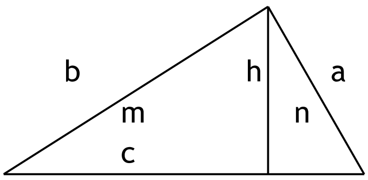
Secara aljabar dapatlah kita menyatakan, bahwa jika sisi miringnya adalah c dan sisi-sisi tegaknya adalah a dan b, maka dalam segitiga tersebut berlaku: $c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2$ = $a^2 + b^2$,

Dan sebenarnya cara pembuktian dengan memperhatikan gambar seperti di atas, telah lama diketemukan di daratan Cina.

Bhaskara telah pula memberikan alternatif yang ke dua, dalam membuktikan teorama Pythagoras. Adapun caranya dengan menarik garis tinggi dari salah satu titik sudut ke sisi miring segitiga siku-siku tersebut. Dengan cara yang sama seperti diperlihatkan dalam gambar.

$\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{b}{m}$, $\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a}{n}$ atau $cm = b^2$, cn = a^2

Bila dijumlahkan kita dapatkan: $a^2 + b^2 = c(m+n) = c^2$



Bukti seperti ini, pernah pula diperlihatkan oleh John Wallis yang telah pula mengenal trigonometri beserta peralatannya untuk keperluan astronomi. Mereka telah menggunakan ukuran derajat, menit dan detik untuk pengukuran sudut. Tabel sinus telah pula dibuat oleh mereka.
Orang Hindu telah mempergunakan kesamaan Sinus, Cosinus, dan Versed Sinus (Versin = 1 - Cos A). Mereka telah dapat menghitung Sinus dan pembagian dua buah sudut dengan relasi: Versin 2A= 2 sin^2 A.
Rumus ini dalam astronomi dipakai untuk menyelesaikan persoalan segitiga bola (spherical triangles). Trigonometri Hindu ini umumnya diuraikan secara aritmetika dan geometri.

5. Perbedaan Matematika Hindu dengan Matematika Yunani
Banyak perbedaan antara matematika Hindu dengan matematika Yunani. Pertama-tama, orang Hindu memandang matematika dari sudut astronomi. Mereka menganggap astronomi sifatnya lebih utama dari pada matematika. Matematika hanyalah sekedar ilmu Bantu dalam astronomi. Sedangkan matematika di Yunani kehadirannya mempunyai kebebasan, matematika tidak tergantung pada ilmu yang lain, dan matematika telah dipelajari untuk kepentingan ilmu itu sendiri.
Di India dikenal sistem kasta, sehingga matematika Hindu praktis hanya digunakan oleh para pendeta dari kasta Brahmana saja. Sedangkan di Yunani, matematika adalah ilmu yang bebas untuk di pelajari. Orang-orang Hindu lebih banyak menguasai dalam bidang perhitungan, sedangkan dalam bidang geometri biasa-biasa saja. Namun orang-orang Yunani sebaliknya, mereka lebih mengutamakan bidang geometri dan sedikit sekali yang berhubungan dengan perhitungan.
Trigonometri Hindu merupakan hal yang berfaedah dalam perhitungan secara alamiah, sedangkan trigonometri Yunani lebih bersifat geometri. Orang-orang Hindu sering menulis syair atau sajak, dan sering kali terselubung oleh kekaburan serta penggunaan bahasa yang penuh dengan mistik. Lain halnya dengan orang-orang Yunani, mereka selalu menulis dengan selalu berusaha memberikan kejelasan dan kelogisan.
Matematika Hindu sebagian besar berdasarkan pengalaman secara nyata dalam pembuktian-pembuktiannya, tetapi jarang memberikan tantangan dan saran-saran. Sebaliknya, dengan matematika Yunani yang mempunyai sifat istimewa dalam memberikan dorongan dengan demonstrasi-demonstrasi yang keras dan besar.
Lain halnya dengan matematika Yunani yang telah mampu membedakan matematika berkualitas baik dengan yang kurang. Orang-orang Yunani telah melindungi dan mengutamakan matematika yang berkualitas baik serta membiarkan yang sebaliknya. Beberapa perbedaan yang cukup menyolok diantara matematika Hindu dengan matematika Yunani sampai saat ini masih tetap terlihat, yaitu dalam perbedaan yang mendasar dari buku-buku aljabar dan geometri.

INDIA
Jika ditinjau secara umum, mengingat kurangnya data maupun dokumen yang dapat dipercaya maka sangat sedikit diketahui tentang perkembangan Matematika dari Hindu Kuno. Sejarah yang tertua tersimpan di dalam reruntuhan kota Mohenjo Daro yang telah berumur 5000 tahun. Adanya jalan-jalan yang lebar, tempat tinggal dari batu bata, perumahan-perumahan yang berderet-deret dengan kamar-kamar mandi yang berubin,

saluran air yang tertutup, pemandian untuk umum, membuktikan adanya suatu peradaban yang setaraf majunya dengan yang telah diketemukan di tempat-tempat lain.
Orang-orang zaman itu telah memiliki cara menulis menghitung, menimbang dan mengukur. Untuk semuanya ini dibutuhkan dasar-dasar matematika dan teknik yang cukup memadai. Sedangkan akhir dari nasib orang-orang ini tidaklah diketahui. Kira-kira 4000 tahun yang lalu kelompok-kelompok pengembara menyebrangi Himalaya dan memasuki India dari daerah yang luas di Asia Tengah. Orang-orang ini disebut orang-orang Aryan. Kata ini berasal dari bahasa sanskerta yang artinya "orang-orang bangsawan" atau "Pemilik tanah". Banyak diantara mereka yang tinggal menetap dan sebagian lainnya mengembara ke Eropa dan mereka inilah yang merupakan nenek moyang keturunan Indo-Eropa.
Pengaruh dari orang-orang Aria inilah berangsur-angsur meluas keseluruh dunia. Selama 100 tahun yang pertama mereka menyempurnakan baik bahasa maupun tulisan sanskerta. Mereka pulalah yang memulai adanya sistem kasta pada abad ke-6 SM tentara Parsi di bawah pimpinan Darius menyerang India. Tetapi kemenangan mereka hanya sebentar saja. Dua orang India yang termasyhur hidup dalam zaman ini adalah ahli tata bahasa Panini dan guru agama Budha. Mungkin di sekitar masa ini pula zamannya Sulvasutras ("the rules of the chord") suatu tulisan yang bersifat keagamaan tetapi penting dalam sejarah matematika, karena di dalamnya ditentukan aturan-aturan geometri untuk membangun tempat pemujaan dengan rentangan tali serta menunjukkan bahwa mereka telah mengenal bilangan Pythagoras. Setelah kemenangan sementara dari Alexander yang agung terhadap India Barat Laut di tahun 326 SM, kekaisaran Maurya didirikan dan berangsur-angsur meluas ke seluruh India dan sebagian dari Asia Tengah. Raja Maurya yang termasyhur adalah raja Asoka (272–232 SM) terbukti dengan adanya beberapa pilar-pilar batu yang besar menjulang tinggi di setiap kota yang penting di India dan sekarang masih berdiri.
Tiang-tiang batu penting bagi kita karena seperti yang tertulis pada uraian di muka, beberapa diantaranya berisi simbol-simbol tertua yang tersimpan sebagai simbol-simbol bilangan kita sekarang. Setelah pemerintahan Asoka, India berkali-kali mengalami penyerbuan dimana akhirnya diikuti tumbuhnya dinasti Gupta di bawah kekuasaan kaisar yang berasal dari penduduk asli India. Zaman Gupta merupakan abad keemasan bagi kembalinya sanskerta dan India menjadi pusat pelajaran seni dan obat-obatan. Kota-kota kaya timbul dan perguruan tinggi Ptolomeus.
Banyaknya pengaruh matematika dari Yunani, Babylonia dan Cina terhadap Hindu dan sebaliknya masih merupakan persoalan yang belum dapat diputuskan, tetapi terdapat cukup banyak bukti bahwa pengaruh itu memang ada. Suatu anggapan yang dapat menjelaskan ini adalah bahwa terdapat penyebaran ilmu pengetahuan antara Timur dan Barat dan pada zaman yang sangat tua. India saling menukarkan duta-dutanya dengan negara-negara Barat dan Timur Jauh. Sekitar tahun 450 hingga hampir tahun 1400 India berkali-kali di taklukan lagi oleh penakluk-penakluk asing. Mula-mula datang orang-orang Hun, kemudian pada abad delapan datang orang-orang arab dan kemudian orang-orang Persia datang pada abad ke sebelas.
Selama ini terdapat beberapa ahli matematika Hindu terkemuka. Diantaranya adalah dua bersaudara Aryabhata, Brahmagupta Mahavira dan Bhaskara. Aryabhata yang tua dilahirkan di dekat tempat sekarang yang disebut: Patna di daerah sungai Gangga dan menjadi terkenal pada abad ke-VI. Ia menulis astronomi pada abad ke-III serta bukunya membicarakan khusus

mengenai matematika saja, dua bersaudara ini mungkin disebabkan karena hasil pekerjaan mereka tidak dipisahkan dengan baik.

Brahmagupta adalah ahli matematika yang paling termashur pada abad ke sembilan ia berdiam dan bekerja pada pusat ilmu Falak Ujjain di India Tengah. Pada tahun 628 ia menulis buku yang bernama: Brahma Sphuta Siddanta ("Sistem penyelidikan dari Brahma").

Satu tulisan tentang astronomi yang terdiri dari 21 bab, dimana bab ke-12 dan ke-18 membicarakan matematika Mahavira yang termashur di sekitar tahun 850 adalah berasal dari India Selatan dan menulis tentang matematika dasar. Hasil karya Bhaskara, Siddanta Siromani ("Hiasan dari sistem ilmu falak") ditulis ditahun 1150 dan membuktikan suatu kemajuan yang kecil jika dibandingkan dengan pekerjaan Brahmagupta yang tertulis pada tahun 500 tahun sebelumnya. Hasil karya Bhaskara yang penting tentang matematika adalah Lilavati ("Si cantik") dan Vijaganita ("Benih ilmu hitung") yang tentunya berhubungan dengan ilmu hitung dan aljabar.

Bagian-bagian matematika dari Bramagupta dan Bhaskara di terjemahkan kedalam bahasa Inggris ditahun 1819 oleh HT Colebrooke. Surya Siddanta di terjemahkan oleh: E. Burgess ditahun 1860 dan hasil karya Mahavira diterjemahkan oleh M. Rangacarya. Matematika Hindu sesudah Bhaskara ternyata mundur sampai pada zaman modern. Pada tahun 1907 didirikan perkumpulan matematika India dan dua tahun berikutnya di Madras terkumpul suatu jurnal dari perkumpulan matematika India. Jurnal statistik India Sankya mulai diperkenalkan pada tahun 1933.

Naskah tentang sejarah matematika yang berhubungan dengan Hindu, menunjukkan adanya beberapa kontradiksi serta membingungkan. Ini mungkin sebagian besar disebabkan karena tulisan dari pengarang Hindu itu banyak yang kabur dan sukar untuk dimengerti. Sejarah matematika Hindu masih banyak menunggu para peneliti yang lebih dapat dipercaya dan lebih teliti.

1. Perhitungan Angka

Disini akan ditunjukkan beberapa cara orang Hindu menghitung. Menurut ahli sejarah Jerman H. Hankel, mereka biasa menulis pada sebuah papan tulis kecil dengan pena yang dicelupkan kedalam cat putih tipis yang mudah dihapus atau pada suatu papan yang luasnya kurang dari satu kaki persegi yang diatasnya ditaburi serbuk merah. Terlihat pada alat tersebut di atas bahwa tempat menulis adalah sempit sedangkan untuk dibaca dengan jelas dibutuhkan gambar-gambar yang besar.

Akan tetapi penghapusan dan pembetulan sangat mudah dilakukan, oleh karena itu proses perhitungan direncanakan sesuai dengan penghematan tempat menulis dengan cara menghapus suatu angka segera setelah tidak dipergunakan lagi. Penjumlahan Hindu kuno mungkin dilakukan dari kiri kekanan tidak seperti yang kita lakukan dari kanan ke kiri. Sebagai contoh perhatikan penjumlahan dari 345 dan 488, mungkin ini disusun ke bawah seperti yang ditunjukkan pada gambar:

8 3 Penghitungan menyatakan 3 + 4 = 7
7 ~~2~~ ~~3~~ dan ditulis diatas kolom kiri. Selanjutnya 4 + 8 = 12
3 4 5 yang merubah 7 menjadi 8 dan diikuti oleh 2. Angka 7 dihapus dan ditulis 82. Terlihat bahwa angka 7 dicoret dang angka 8 ditulis di atasnya. Kemudian 5 + 8 = 13 yang merubah 2 menjadi 3 diikuti oleh tiga lainnya. Dan hasil terakhir dari perhitungan

itu adalah 833 tertera di atas papan tulis selanjutnya 345 dan 488 dapat dihapus dan sisa papan tulis itu sudah bersih, untuk pekerjaan atau perhitungan lainnya.
Dalam keterangan-keterangan yang tak tertanggal pada buku Lilavati Bhaskara didapat cara lain, dimana penjumlahan 345 dan 488 dikerjakan sebagai berikut:

Jumlah satuan	5 + 8 =	1 3
Jumlah puluhan	4 + 8 =	1 2 •
Jumlah Ratusan	3 + 4 =	7 • •
Jumlah total	=	8 3 3

Untuk perkalian dipergunakan beberapa metode, yang sederhana misalnya 569 x 5 akan dikerjakan sebagai berikut (juga dari kiri ke kanan). Papan tulis sedikit di bawah tepi atas ditulis 569 diikuti oleh pengalinya 5, seperti terlihat pada gambar di bawah ini:

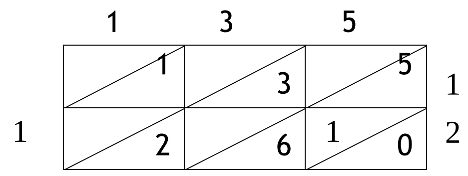
Karena 5 x 5 = 25, angka 25 di	8 4
Tulis di atasnya 569 seperti ter	2 ~~5~~ ~~0~~ 5
Lihat pada gambar, kemudian 5 x	5 6 9 5

6 = 30 yang berubah angka 5 dari 25 menjadi 0 8 disusul dengan angka 0. Suatu penghapusan yang cepat, cocok dalam menyelesaikan perhitungan ini. Sekali lagi pada perhitungan disini bahwa angka yang seharusnya diganti/dicoret angka 5 dicoret dan angka 8 ditulis di atasnya. Kemudian 5 x 9 = 45 yang merubah angka 0 menjadi 4 diikuti oleh 5. Angka terakhir 2.845, sekarang tertera ditepi atas dari papan perhitungan. Suatu perhitungan yang lebih sulit seperti 135 x 12 mungkin di selesaikan seperti cara pertama 135 x 4 = 540 kemudian 540 x 3 = 1.620 atau dengan menjumlahkan 135 x 10 = 1.350 dan 135 x 2 = 270. Diperoleh 1.620. atau mungkin juga menurut Hankel, soal itu diselesaikan debagai berikut:
Sedikit di bawah atas papan penulisan ditulis 135 dan pengalinya 12 sedemikian sehingga angka satuan dari 135 terletak di bawah angka terkiri dari angka pengali. Sekarang 135 x 1 = 135 yang ditulis dibagian atas papan.

	6	2	
	~~5~~	~~1~~	
1	~~3~~	~~5~~	0
		1	2
1	~~3~~	~~5~~	
	1	3	5

Kemudian dengan cara menghapus, 135 dipindah kekanan dan dikalikan dengan angka 2 dari 12. Dalam menyelesaikan ini kita peroleh 2 x 1 = 2 yang merubah angka 3 dari perkalian sebagian menjadi 5. Kemudian 2 x 3 = 6 yang merubah angka 5 dari perkalian yang terakhir ini menjadi 61. Akhirnya 2 x 5 = 10 yang merubah angka 1 yang terakhir menjadi 2 diikuti oleh angka 0. Hasil perkalian yang terakhir 1.520 yang tertera di atas papan perhitungan.

Cara lain untuk perkalian yang dikenal orang Arab yang mungkin didapat dari orang Hindu, sangat mirip dengan cara kita sekarang dapat dijelaskan seperti pada uraian ini.
Sebagai contoh diambil perkalian 135 x 12.
Gambar seperti di bawah ini



6 2 0

Orang-orang Arab yang kemudian mengutip beberapa proses dari orang Hindu yang ternyata tidak dapat memperbaiki cara tersebut dan mencontoh pada kertas pekerjaan dimana cara penghapusan tidak dapat dilakukan dengan mudah. Sehingga cara penghapusan diganti dengan cara mencoret angka yang sudah tidak diperlukan dan menulis angka yang baru di atas atau di bawah angka yang lama seperti yang kita lihat di atas.

Dasar-dasar ilmu hitung kita dimulai dari India mungkin di sekitar abad 10 atau 11 yang dikutip oleh orang Arab kemudian dibawa ke Eropa Barat dimana cara-cara itu diubah sehingga menjadi bentuk seperti sekarang. Hasil pekerjaan ini mendapat perhatian yang cukup besar dari penulisan ilmu hitung Eropa pada abad kelima belas.

2. Aritmetika

Orang Hindu adalah ahli matematika yang pandai dan memberikan sumbangan yang cukup berarti pada aljabar. Soal-soal matematika banyak yang diselesaikan dengan kedudukan palsu. Metode lain yang mereka senangi untuk menyelesaikan soal-soal adalah dengan inversi (pembalikan) dimana pekerjaan diselesaikan secara terbalik dari uraian yang diberikan. Perhatikan contoh yang diberikan oleh Aryabhata pada abad ke 6 sebagai berikut:

"Wanita cantik tentu memiliki mata yang berseri-seri, katakanlah kepadaku, karena engkau memiliki cara yang benar tentang inversi, bilangan berapakah yang setelah dikalikan 3, kemudian ditambah dengan ¾ dari hasil kalinya lalu dibagi 7, dikurangi 1/3 dari hasil baginya, dikalikan dengan hasil bilangan itu sendiri, dikurang 52, diakar pangkat dua, ditambah 8 dan dibagi 10 menghasilkan angka 2 "?

Dengan cara inversi dimulai dengan angka 2 dan diselesaikan dari belakang.

$[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196$, V 196 = 14

(14) (3/2) (7) (4/7)/3 = 28, inilah jawabannya.

Perhatikan jika dalam soal itu disuruh membagi dengan 10, maka kita mengalikan dengan 10, jika kita harus menambah 8, maka kita kurangi 8, bilamana kita harus mancari akar, maka kita mempangkatkan dengan dua dan seterusnya. Karena penggantian dari setiap operasi dengan operasi inversinya maka cara ini disebut: inversi, tentu saja ini dengan cara yang kita lakukan jika kita harus menyelesaikan dengan cara modern. Sehingga bila bilangan yang dicari x, diperoleh :

$$\left\{\sqrt{\left[(2/3)(7/4)(3x)/7\right]^2 - 52 + 8}\right\}/10 = 2$$

Untuk menyelesaikan ini kita kalikan dengan 10 kemudian kedua ruas dikalikan dengan 8, lalu keduanya dikuadratkan dan seterusnya.

Bentuk soal orang Hindu biasanya dalam bentuk syair-syair serta mereka membuat tanda yang berbeda-beda dalam aljabar. Untuk menunjukkan penjumlahan kedua bilangan dijajarkan secara berurut. Pengurangan dinyatakan dengan memberi titik pada bilangan pengurangan. Perkalian dinyatakan dengan kata bha (singkat dari kata bhavita yang berarti hasil kali) dibelakang hasil pengali. Pembagian dinyatakan dengan menempatkan bilangan pembagi di bawah bilangan yang dibagi. Akar dua dinyatakan dengan kata ka (singkatan dari kata karana yang berarti irrasional) dimuka bilangan yang akan diakar duakan itu. Bilangan yang belum diketahui dinyatakan dengan kata ya (singkatan dari kata yavattavat yang berarti sebanyak seperti). Bilangan kedua yang belum diketahui dikatakan dengan kata-kata yang menyatakan warna misalnya ka (singkatan dari kata kalaka yang berarti hitam). Dan bilangan cacah yang diketahui diberi kata awal ru (singkatan dari kata rupa yang berarti bilangan mutlak). Demikianlah dengan menggunakan ejaan latin, kita temukan bentuk hitungan beserta artinya sebagai berikut :

Ya ka 8 bha ka 10 ru 7

= (bilangan anu) (bilangan anu) kali 8 tambah akar dua dari 10 dikurangi 7

$= 8\,xy + \sqrt{10} - 7$

Orang Hindu mengenal bilangan negatif dan bilangan irrasional serta mengetahui bahwa suatu kuadrat mempunyai dua akar yang memenuhi.

Bhaskara memberikan …. identitas yang menarik:

$$\sqrt{a \pm vb} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Yang kadang-kadang digunakan dalam aljabar kita untuk mencari akar-akar dari bentuk binominal. Identitas ini juga terdapat pada buku X dari Euclid's Element, tetapi hal itu diberika pada kalimat yang berbelit-belit dan sukar dimengerti.

Orang Hindu menunjukkan kepandaian yang luar biasa didalam uraian tak tentu dan mungkinn merupakan orang pertama yang mencari metode umum dalam cabang matematika ini.

3. Geometri

Orang Hindu tidak begitu pandai dalam geometri, mereka sangat tergantung pada pengalaman dan sering dihubungkan dalam perhitungan luas dan isi.

Sulvasutras kuno menunjukkan bahwa orang hindu kuno mempergunakan geometri (ilmu ukur segi tiga) untuk kontruksi dari tempat pemujaan dan dalam mengerjakan itu digunakan dalil Pythagoras. Juga terdapat tentang penyelesaian tentang bujur sangkar dimana mengambil d = (2 + V2) s/3 dan s = 13 d/15, dengan d adalah garis tengah lingkaran sedangkan s adalah sisi dari bujur sangkar.

V2 = 1 + 1/3 +1/(3) (4) – 1/(3) (4) (34) dimana yang menarik perhatian adalah bahwa semua pecahannya adalah pecahan satuan dan persamaan itu teliti sampai 5 angka dibelakang koma.

Drahmagupta dan Mahavira keduanya tidak hanya memberikan rumus heron untuk luas segitiga tetapi juga rumus:

K = [(s-a) (s-b) (s-c) (s-d)] ½

Untuk luas segi empat tali busur yang sisinya: a, b, c dan d serta setengah kelilingnya s. Sedangkan untuk rumus yang umum adalah :

$K^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 [(A+C) / 2]$

Dimana sudut A dan C adalah sudut yang berhadapan dari segi empat tersebut.

Dalam Geomatri Hindu, hasil paling berharga dan mungkin merupakan satu-satinya yang terbaik adalah teori Brahmagupta yang menyatakan diagonal m dan n dari suatu segi empat talibusur yang mempunyai sisi a, b,c dan d dinyatakan dengan:

$m^2 = (ab + cd)(ac + bd) / (ad + bc)$

$n^2 = (ac + bd)(ad + bc) / (ab + cd)$

dan bahwa jika a, b, c, A, B, C adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $a^2 + b^2 = c^2$ dan $A^2 + B^2 = C^2$, maka segi empat tali busur itu mempunyai sisi berturut-turut a^C, c^B, b^C dan c^A (disebut trapesium Bramagupta) mempunyai luas dan diagonal yang rasional dan diagonal yang saling tegak lurus. Rumus-rumus orang Hindu terdapat banyak kesalahan, seperti halnya

Aryabhata menghitung isi paramida sebagai setengah dari hasil kali alas kali tinggi dan isi bola sebagai $\pi^{3/2} r^3$. Orang Hindu mendapat harga yang agak tepat untuk $\pi = 3$ π = V IO.

4. Perbedaan Antara Matematika Yunani dan Hindu

Antara matematika hindu dan Yunani terdapat banyak perbedaan-perbedaan. Pertama-tama orang Hindu yang mempelajari matematika menganggap dirinya sebagai ahli astronomi, dengan demikian matematika hindu tetap menjadi alat bantu dalam astronomi. Sedangkan bagi Yunani, matematika merupakan ilmu yang berdiri sendiri dan dipelajari untuk ilmu itu sendiri. Adanya sistem kasta matematika di india dipelajari hampir semua kasta brahma saja. Di Yunani matematika terbuka bagi setiap orang yang menaruh perhatian pada ilmu itu untuk dipalajari. Orang hindu adalah penghitung yang teliti tetapi merupakan ahli ilmu ukur yang kurang baik, sedangkan oramg Yunani gemar ilmu ukur/ geometri tetapi tidak begitu memperhatikan pekerjaan menghitung. Bahkan Trigometri Hindu bersifat Aritmetika, sedangkan di Yunani bersifat Geometri.

Tulisan orang hindu berbentuk sjair dan sering berselubung dengan menggunakan bahasa yang samar-samar dan bersifat mistik. Orang Yunani menunjukkan cukup jelas dan logis. Matematika Hindu sebagian besar berdasarkan pengalaman sebaliknya Yunani bersifat demontrasi. Yang cukup aneh terdapat pada matematika hindu yaitu : matematika yang baik dan buruk selalu dicampur adukan. Sebaliknya pada Yunani yang jelek langsung dibuang.

5. ARAB

Kebangkitan dan keruntuhan bangsa Arab merupakan salah satu dari masa yang paling menarik dalam sejarah. Dalam masa 10 tahun sesudah Nabi Muhammad SAW hijrah dari Makkah ke Madinah pada tahun 622 SM, bangsa yang terpencar-pencar dan tidak bersatu dari Jazirah Arab itu oleh semangat yang menyala-nyala dari keyakinan Agamanya bergabung menjadi Negara yang kuat. Dalam waktu satu abad dengan memulai peperangan demi peperangan.

Perkembangan Perbedaan Kaum Muslim

Maju dan mundurnya kekuasaan raja-raja di Jazirah Arab termasuk pada bagian yang penting yang patut di catat dalam perkembangan sejarah, termasuk sejarah matematika. Pada awal abad ke-5, di Jazirah Arab telah berkembang salah satu suku bangsa Arab yang disebut suku Quraish. Pada waktu di tanah kering yang gersang yang terkenal dengan padang pasirnya, telah terjadi suatu masa yang penuh dengan kekacauan, kedoliman dan kebiadaban yang tiada taranya. Pada saat-saat seperti itu ulah di tengah-tengah suku bangsa tersebut telah lahir seorang Nabi besar pembawa tuntunan hidup sepanjang masa yang bernama Muhammad (571 M 623 M).

Pada waktu Nabi Muhammad saw menyebarkan agama islam di kota Mekah, Beliau mendapat tantangan dan rintangan yang sangat luar biasa. Kemudian pada tahun 622, Nabi beserta para pengikutnya melakukan hirjah ke kota Madinah, dan makin lama kota ini makin berkembang, agama islam semakin kuat kedudukannya, sehingga kota mekah dapat dikuasainya. Ketika Nabi Muhammad saw meninggal dunia pada tahun 632, seluruh Jazirah

Arab dan sekitarnya telah memeluk agama islam. Sedangkan kekuasaan selanjutnya dipegang oleh para Khalifah. Sejak saat itulah, bangsa Arab telah memiliki semangat religius yang kuat, sehingga telah mampu merubah dari bangsa yang terpecah belah dan terbelakang menjadi bangsa yang besar yang telah berperan serta dalam mengembangkan dunia ilmu pengetahuan.

Dalam jangka satu abad, kekuatan kaum Muslimin telah mampu mempersatukan dan menanamkan pengaruhnya sampai kedaratan India, Persia, Mesopotamia, Afrika Utara dan sampai kedaratan Eropa di Spanyol. Padahal dalam tubuh kaum Muslimin sudah mulai dengan tanda-tanda perpecahan. Perselisihan dan perebutan kekuasaan untuk menduduki jabatan Khalifah semakin meruncing, sehingga pada tahun 775 kekhalifahan bangsa Arab telah pecah menjadi dua bagian besar. Khalifah Barat memerintah di Cordoba.

Sampai tahun 1000 Khlaifah di timur telah banyak memperoleh kemajuan dalam bidang keagamaan. Namun pada waktu itu daerah timur banyak diduduki oleh penduduk Turki. Di antara tahun 1100 dan 1300, telah terjadi perang salib yang ingin memindahkan bangsa Arab, dan pada tahun 1258 Bhagdad jatuh ketangan kekuasaan bangsa Mongol. Khalifah akhirnya mundur kesebelah timur untuk menyusun kekuatan Arab. Namun pada tahun 1400, Spanyol telah berhasil menjatuhkan pemerintahan bangsa Moor, sehingga Arab kehilangan tempat berkumpulnya orang-orang Eropa.

Banyak perkembangan penting yang telah dicapai oleh Khalifah Bhagdad, diantaranya pemeliharaan peradaban dunia, sehingga Arab telah berhasil memelihara dan mengembangkan peradaban Yunani dan Hindu. Selain pemerintahannya yang baik, Bhagdad juga dianggap sebagai pelindung ilmu pengetahuan. Bhagdad telah banyak memberikan ilmu pengetahuan dan kemajuan dunia pendidikan, sehingga telah banyak para sarjana yang diundang untuk datang keistananya untuk dimintakan sumbangan pemikirannya.

Banyak karya Hindu dan Yunani dalam bidang Astronomi, kedokteran, dan matematika yang diterjemahkan ke dalam bahasa Arab. Khalifah Bhagdad sangat melindungi karya-karya tersebut sampai kemudian banyak sarjana Eropa yang menterjemahkan dari bahasa Arab ke dalam bahasa Latin dan bahasa lain.

Pada masa pemerintahan khalifah Al-Mansur, karya-karya Brahmagupta di bawa ke Bhagdad, dan di bawah pengawasan dan perlindungan khalifah karya-karya tersebut diterjemahkan ke dalam bahasa Arab. Hal ini menunjukkan bahwa matematika Arab banyak dipengaruhi oleh matematika Hindu.

Khalifah berikutnya adalah Khalifah Harun Al-Rasyyid yang memerintah dari tahun 786 M sampai 808 M, ia turut menyebarkan ilmu pengetahuan tersebut kepada bangsa Arab. Di bawah lindungan hukumnya, beberapa karya Yunani klasik diterjemahkan ke dalam bahasa Arab, dan diantaranya adalah beberapa bagian dari buku-buku element Euclid.

Putra Harun Al-Rasyid, yaitu Khalifah Al-Mamun memerintah dari tahun 833. Ia sama seperti ayahnya, seorang Khalifah yang melindungi ilmu pengetahuan, ia adalah seoarng ahli Astronomi. Pada masa pemerintahannya dibangun gedung observatorium di Bhagdad dan melakukan pengukuran, terutama dalam membahas postulat sejarah Euclid. Tulisannya ini pada abad ke-17 diterjemahkan ke dalam bahasa latin oleh Jhon Wallis untuk dipakai dalam perkuliahan geometri di Universitas Oxford. Ilmuwan Muslim lainnya adalah Ulugh Beg, seorang ahli astronomi Persia di abad ke-15. Ia telah berhasil menyusun table trigonometri untuk fungsi sinus dan tangent dalam interval satu menit (1’) sampai ketelitian delapan tempat decimal.

Aritmetika dan Aljabar

Pada abad ke-10 dan ke-11, Abu'l-Wafa dan Al-kharkhhi telah mulai menulis buku-buku aritmatika. Sejak saat itulah orang-orang arab mulai belajar dari karya-karya Hindu yang dipengaruhi oleh metode-metode Yunani. Buku Aritmetika yang pertama yang ditulis dalam bahasa Arab diberikan oleh Al-Khowarizmi. Namun secara umum penjelasan tentang hukum-hukum perhitungan maupun model algoritmanya mirip dengan pola berhitung orang-orang Hindu. Ada suatu aturan dalam aritmatika Arab yang dikenal dengan nama "hukum tiga". Hukum ini banyak mendasari cabang-cabang matematika, dan ternyata memiliki kesamaan dengan model algoritma yang diperkenalkan oleh Brahmagupta dan Bhaskara. Menurut Brahmagupta, yang dimaksud dengan "hukum tiga" dalam sistim berhitung hindu adalah "Alasan"(Argument). "Hasil"(Fruit), dan "Tuntutan"(Requistion). Ketiga-tiganya hanyalah sekedar nama-nama atau istilah-istilah. Istilah yang pertama dan yang terakhir haruslah sejenis. Requisition dikalikan oleh Fruit dibagi oleh Argument akan menghasilkan jawaban (Produce). Suatu contoh pemakaian "Hukum tiga" yang dikemukakan oleh Bhaskara:

" jika $2\frac{1}{2}$ batang kunyit dibeli dengan harga $\frac{3}{7}$ niska, maka berapa batang kunyitkah yang diperoleh untuk membayar 9 niska ? ".

Disini, $\frac{3}{7}$ adalah Argument, 9 adalah requisition, dan $2\frac{1}{2}$ adalah Fruit. Producenya atau hasilnya adalah:

$$\frac{(9)(2\frac{1}{2})}{\frac{3}{7}} = 52\frac{1}{2}$$

Sekarang persoalan seperti itu di selesaikan dalam bentuk perbandingan seperti berikut:

X ; 9 = $2\frac{1}{2} : \frac{3}{7}$.

Banyak para penulis aritmatika berikutnya, khususnya orang-orang Eropa yang telah memakai dan mengembangkan "aturan tiga" ini. Astronomi dari bahasa Yunani ke dalam bahasa Arab. Seorang ahli matematika Arab terkenal pada masa pemerintahan khalifah Al-mamun adalah mohammad Ibnu Musa Al-khowarizmi telah menulis sebuah kitab tentang Risalah Aljabar, dan sebuah kitab tentang Bilangan Hindu. Kedua kitab ini sangat berpengaruh sekali di daratan Eropa setelah diterjemahkan ke dalam bahsa latin pada abad ke-12.

Ilmuwan lainnya adalah Tabit Ibnu Qorra (826 – 901), seorang ahli dalam bidang psikologi, filsafat, bahasa dan matematika. Ia adalah orang pertama yang telah memberikan hasil yang memuaskan tentang element Euclid yang diterjemahkan ke dalam bahasa Arab. Ibnu Qorra telah pula menterjemahkan karya-karya Apollonius, Archimedes, Ptolemy, dan Theodosius ke dalam bahasa Arab. Ia telah pula menulis masalah-masalah astronomi, irisan kerucut, aljabar elementer, bujursangkar ajaib, dan bilangan-bilangan persahabatan (amicable numbers).

Kiranya, abad ke-10 merupakan masa jayanya matematika Arab. Malahan mungkin matematikawan muslim pada abad tersebut yang paling erkenal adalah Abu'l-Wafa (940-998), ia dilahirkan di Persia di daerah pegunungan Khorasan. Ia telah banyak menterjemahkan karya-karya Diophantus, kemudian ia memperkenalkan fungsi tangent dalam trigonometri, dan telah pula memberikan hasil perhitungannya untuk table sinus dan tangent dalam interval 15' (lima belas menit).

Pada abad ke-10 dan ke-11, Abu Kamil dan Al-kharkhi telah menulis buku Aljabar. Materi buku ini pernah pula diterjemahkan oleh Al-Khowarizmi. Untuk seterusnya materi Aljabar ini pernah pula diperkenalkan oleh matematikawan Eropa yang bernama Fibonacci pada tahun 1202 dari bahasa Arab ke dalam bahasa Latin.
Al-Kharkhi adalah salah seorang sarjana muslimin yang terkenal dalam bidang aljabar, dan ia adalah salah seorang murid terpandai Diophantus. Ia telah menulis sebuah buku aljabar yang disebut Fakhri. Namun barangkali sumbangannya yang paling besar yang merupakan buah karyanya sendiri diberikannya dalam menyelesaikan masalah geometri secara Aljabar. Dalam karyanya ini, ia telah mampu menyelesaikan soal-soal persamaan pangkat tiga dalam masalah geometri. Masalah ini diperoleh dari Omar Khayyam (±1100), seorang penduduk asli Khorasan. Omar Khayyam terkenal di dunia barat sebagai pengarang buku Rabaiyat. Khayam terkenal pula karena kecermatannya dalam memberikan usul untuk merubah kalender muslim.
Matematikawan Muslim lainnya adalah Nai ed-din(±1250) juga dari Khorasan. Karyanya yang paling utama dalam bidang trigonometri. Matematikawan Muslim telah banyak memberikan sumbangannya dalam bidang geometri dan aljabar. Diantaranya adalah Oemar Khayyam yang telah memberikan soal-soal geometri yang diselesaikan secara aljabar dengan persamaan pangkat tiga. Persamaan ini diklasifikasikan secara sistematis. Untuk memperoleh akar-akarnya. Akar-akar persamaan tersebut adalah absis dari perpotongan lingkaran dengan hiperbola orthogonal.
Abu'l-Wefa telah pula menyelesaikan masalah geometri yang merupakan bentuk-bentuk khusus dari persoalan pangkat empat. Kemudian Tabit ibnu Qorra, telah memberikan aturan untuk mendapatkan bilangan-bilangan persahabatan, sedangkan Al-Karkhi adalah penulis Arab pertama yang telah memberikan dan membuktikan teorema-teorema yang melengkapi penjumlahan pangkat dua dan pangkat tiga dari bilangan asli pertama. Dilain pihak, aljabar dan aritmatika yang telah dikembangkan oleh bangsa Arab di sebelah barat lebih bersifat retorik.

Geometri dan Trigonometri

Peranan penting yang dimainkan oleh orang-orang Arab dalam bidang geometri, sebagian besar bukanlah merupakan hasil penemuannya melainkan sebagai pemelihara dan penyimpan. Dunia merasa berhutang kepada bangsa Arab yang telah banyak berusaha untuk memelihara dan menterjemahkan geometri klasik dari bangsa Yunani. Terdapat sekelumit penelitian yang indah sekali terhadap geometri yang telah dilakukan oleh Abu'l-Wefa. Ia telah memperlihatkan bagaimana mendapatkan titik-titik puncak segibanyak beraturan pada daerah-daerah pembatasnya.
Bangsa Arab telah pula mempunyai seorang akhli geometri, yaitu Omar Khayyam. Ia telah dapat menyelesaikan persamaan pangkat tiga dan karyanya tentang postulat sejajar telah dipengaruhi oleh Nasir Ed-din. Sarjana yang terakhir inipun telah mempercayai pula terhadap kebenaran dalil Pythagoras. Seseorang yang bernama Al-Haitam, tercatat sebagai orang yang telah memberikan masalah yang disebut Problem-Al-Hazen, yaitu :
"Melukis dua garis melingkar dari dua buah titik yang terletak pada sebuah bidang yang berpotongan dengan suatu lingkaran dan membentuk sudut yang sama dengan sudut pusat lingkaran di titik tersebut".

Masalah Al-Hazen ini mirip dengan masalah persamaan yang merupakan penyelesaian dari perpotongan antara hiperbola dengan lingkaran yang telah diperlihatkan pada zaman Yunani kuno. Terkenal dengan keakhliannya dalam bidang fisika masalah yang ditemukan seperti di atas memiliki pengaruh yang besar sekali di Eropa.
Seperti halnya orang-orang Hindu, matematikawan Muslimpun pada mulanya tertarik pada astronomi, sehingga pehatiannya dalam bidang matematika lebih tertarik dan meluas dalam permasalahan trigonometri.
Kita telah menyebutkan beberapa matematikawan Muslim yang telah berprestasi dalam menyusun tabel trigonometri, Mereka pantas pula untuk diberikan penghargaan sebagai pengembang fungsi trigonometri, karena mereka telah banyak memberikan dan memperbaiki rumus-rumus trigonometri. Rumus Cosinus di dalam segitiga bola yang miring (oblique sherical triangle) diberikan dalam bentuk ;
Cos a - Cos b Cos c + Sin b Sin c Cos A,
Oleh Al-Battani (bahasa Latin Albagtegnius kira-kira tahun 920 M). la telah pula memberikan rumus:
Cos B = Cos b Sin A,
Untuk segitiga ABC dengan salah satu sudutnya di titik C. Teorema ini kadang-kadang disebut pula sebagai Teorema Geber's, setelah dikembangkan lebih lanjut oleh Geber di Seville kira-kira tahun 1130 M. Geber adalah nama lain dari orang astronom Muslim Jabir Ibnu Aflah.

Etimologi
Banyak sekali nama-nama dan istilah-istilah yang kita pakai sampai hari ini yang berasal dari bahasa Arab kuno. Jika kita perhatikan, sebagian besar dari istilah-istilah yang dipakai dalam astronomi berasal dari bahasa Arab, terutama nama-nama bintang dan tatasurya yang termuat dalam buku Almagest yang ditulis dalam bahasa Arab oleh Ptolemy. Karya ini merupakan salah satu pekerjaan besar dalam dunia ilmu pengetahuan.
Kata "aljabar" (Algebra). istilah Aljabar berasal dari kata "'Hisab Al-jabr w'al-muqabalah, sebagai warisan dari AlKhowarizmi. Istilah ini secara tata bahasa berarti "perpaduan ilmu-ilmu yang bertentangan *(science of reduction and cancellation and the oppot ion*) atau terjemahan bebasnya berarti "Ilmu pengurangan dan pembatalan" (*Soince of reduction and cancellation*).
Dikarenakan banyak buku dari bahasa Arab yang diterjemahkan ke dalam bahasa Latin di Eropa, maka kata "al-jabar" dijadikan "algebra" yang berarti "ilmu tentang persamaan" (Science of eqution). Sejak pertengahan abad ke-19 kata aljabar sudah dianggap milik sendiri dan dipakai di setiap tempat yang berhubungan dari pelajaran matematika.
Kata "al-jabr" dalam bahasa Arab dalam arti bukan matematika, ternyata diketemukan pula di Eropa yang dipakai oleh banngsa Moor di Spanyol. Di sana terdapat kata yang mirip dengan kata al-jabr" atau "algebra", yaitu kata "algebrista" yang berarti: "tulang belakang".
Buku buah tangan Al-Khowarizmi memakai sistem numerasi hindu kuno, dan dalam kitab tersebut dimuat pula perbendaharaan kata yang berkaitan dengan matematika, Namun sangatlah di sayangkan buku aslinya tidak diketemukan. Baru pada tahun 1857 M dalam terjemahanya yang ditulis dalam bahasa Latin kata "al-jabr" atau "al-gebra" diartikan sebagai kata "algorotmi" Dalam Kitab ini, nama Al-Khowarizmi telah disebut-sebut dan kata "algoritmi" diartikan berasal dari kata "algorism" yang berarti "seni atau cara berhitung dengan jalan yang khusus " .

Selain itu, banyak pula istilah dan lafal-lafal dalam fungsi trigonometri yang berasal dari bahasa Arab. Semua fungsi trigonometri dikembangkan dari suatu lingkaran dengan jari-jari satu satuan. Misalnya sebuah sudut (theta) terletak pada pusat lingkaran dengan jari-jari satu satuan, maka tgn θ dan Sec θ berturut-turut sama dengan panjang segmen CD.

Namun asal mula istilah "Sinus" mempunyai latar belakang yang agak istimewa. Aryabhata menyebutnya ardha-jya (setengah kata), atau disebut pula jya-ardha, atau sering pula disingkat menjadi jya. Kata jya diterjemahkan ke dalam bahasa Arab menjadi kata jiba. Namun dalam bahasa Arab tidak mengenal huruf hidup ini, kecuali alif dan ain, maka ditulis jb. Para penulis berikutnya memakai singkatan jb dari kata jiba yang dalam bahasa Arab tidak mempunyai arti, sehingga digantinya menjadi Jaib yang berarti dada, dan mempunyai arti yang sama dengan bosom masih dalam bahasa Arab. Kemudian Gherardo dari Cremona pada tahun 1150 dalam terjemahannya dari bahasa Arab telah mengganti lafal jaib dengan kata dalam bahasa Latin yang berarti sama, yaitu dengan kata seperti yang kita kenal sekarang sebagai Sinus.

Sumbangan Bangsa Arab

Sumbangan Bangsa Arab dalam mengembangkan matematika tidaklah dapat dinilai leluhurnya. Beberapa tulisan yang termashur dari para matematikawan Muslim yang cerdas telah turut merubah warna dunia ilmu pengetahuan. Banyak materi dalam aljabar dan trigonormetri yang diangkat dari para penulis Muslim yang mempunyai keaslian dan nilai yang tinggi.

Namun masih harus kita akui, bahwa dari karya-karya dari bangsa Arab baik kuantitas maupun kualitas masih di bawah karya-karya yang telah dihasilkan oleh bangsa Yunani. Bangsa Arab bekerja dalam dunia ilmu pengetahuan hanyalah sebagai sampingan saja, Namun walaupun demikian, mereka telah mampu menghasilkan karya-karya yang termashur sebagai sumbangan pemikiran untuk kemajuan dunia ilmu pengetahuan.

Bangsa Arab merupakan pemelihara pengembang penerus dan penyampai ilmu pengetahuan yang telah lahir di Yunani kuno. Mereka terkenal sebagai bangsa yang baik hati, pemberi imbalan yang besar, penjaga kehormatan, dan pengagum nilai-nilai luhur ilmu pengetahuan. Bangsa Arab terkenal pula sebagai bangsa yang berilmu dan bersikap positip terhadap ilmu. Karena sikap bangsa Arablah, maka ilmu pengetahuan tidak lenyap ditelan waktu maupun perkembangan keduniaan lainnya.

Setelah beratus-ratus tahun menguasai 'ilmu pengetahuan, akhirnya bangsa Arab telah pula melakukan transmisi dunia intelektual seperti halnya bangsa-bangsa besar lainnya. Bangsa Arab telah mewariskan dunia ilmu pengetahuan terhadap bangsa-bangsa Eropa setelah mereka mengalami zaman kemunduran sebagai akibat perang saudara yang berkepanjangan.

BAB VIII
MATEMATIKA EROPA

8.1 Abad Kegelapan

Periode zaman kegelapan di Eropa dimulai dengan jatuhnya kekuasaan Romawi, yaitu pada pertengahan abad ke-5 yang berkepanjangan sampai abad ke-11. Pada masa-masa itu, peradaban di wilayah Eropa mencapai tingkatan yang rendah sekali. Sekolah hampir tidak pernah ada, semua pelajaran dari bangsa Yunani tidak pernah muncul, kesenian dan keahlian yang diwariskan oleh nenek moyangnya terlupakan. Hanyalah para penghuni biara Katolik dan sejumlah kecil budayawan yang masih mempelajari peradaban Yunani dan latin. Periode ini ditandai dengan kekejaman fisik dan keyakinan agama yang sangat kuat. Tata tertib sosial yang berlaku telah memberikan jalan sehingga terbentuknya masyarakan feodal dan Gerejawi.

Orang-orang Romawi hampir tidak pernah mengambil manfaat matematika. Mereka sudah merasa cukup puas dengan hanya mengambil aspek praktisinya saja, terutama yang dipakai dalam masalah perdagangan dan engenering.

Akibat jatuhnya kekuasaan Romawi, maka perdagangan antara Timur dan Barat menjadi tertutup, dan di antara mereka hanya sedikit sekali yang memiliki pengetahuan matematika.

Karena kebaikan orang-orang yang dapat dipercaya dan mereka yang mempunyai keberanian, yang telah berperan dalam mengembangkan matematika pada abad yang gelap ini. Karena peranan merekalah, maka kita dapat menamakan mereka sebagai Warga Romawi yang syahid. Mereka itu adalah Boethius, Bade, Alcuin, dan Gerbert yang pernah menjabat sebagai Paus Sylvester II.

Hal yang menarik dari Boethius (± 475 – 524), tercatat dalam sejarah matematika sebagai orang yang telah menulis buku aritmatika dan geometri. Buku yang ditulisnya ini pernah menjadi buku pelajaran yang standar untuk sekolah-sekolah Kristen selama berabad-abad. Sebagian besar dari buku yang ditulis oleh Boethius diambil dari Buku I, Buku III, dan Buku IV Element-element Euclid.

Bade (± 735), lahir di Northumberland Inggris. Dikenal dengan nama ***Bade yang terhormat*** *(Bade the venerable)*. Ia tidak banyak menulis tentang matematika. Ia hanya menulis buku tentang kalender dan cara berhitung dengan jari tangan.

Alcuin (735-804), lahir di Yorkshire, Iggris. Ia seorang sarjana Inggris yang dipanggil ke Perancis untuk membantu Kaisar Chrlemagne yang berambisi dalam proyek pendidikan. Alcuin telah menulis sebuah buku tentang topik-topik matematika, namun tulisan-tulisannya ini telah dianggap meragukan, karena memuat masalah-masalah yang sulit. Tulisannya ini diperkirakan telah mempengaruhi para penulis lainnya selama berabad-abad.

Gerbert (± 950 – 1003). Lahir di Auvergne, Perancis. Ia mempunyai kemampuan yamg luar biasa. Ia adalah seorang Kristen yang pertama yang belajar di sekolah Muslim di Spanyol. Dari sana, ia telah membawa kembali sistem numerasi Hindu Arab menjadi tanpa nol, yang kemudian disampaikan kepada orang-orang Kristen di Eropa (*Gerbert was one of the first Cristian to study in the Moslim schools of Spain and there is evidence that he may have brough back the Hindu Arabic numerals, without the zero, to Christian Europe*).

Dikabarkan bahwa Gerbert abakus, globe, jam penunjuk waktu dan peralatan musik. Kepandaian yang dimiliki Gerbert pada zaman itu telah menimbulkan prasangka bahwa ia seorang ahli sihir. Walaupun demikian, ia tetap aktif di gereja dan terpilih menjadi Paus pada tahun 995 M. Ia dianggap sebagai salah seorang sarjana besar yang telah menulis astrologi, aritmatika dan geometri.

8.2 Periode penyebaran

Pada jaman Gerbert, sains dan matematika dari Yunani kuno mulai masuk ke daratan Eropa. Pada masa ini kebudayaan Islam mulai banyak dipelajari dan menyebar ke Eropa Barat melalui terjemahan dalam bahasa Latin. Kegiatan menterjemahkan dari bahasa Arab ke bahasa Latin dilakukan secara besar-besaran oleh para sarjana Kristen yang belajar di pusat-pusat pendidikan Muslim. Transfer ilmu pengetahuan itu terjadi pula melalui hubungan perdagangan antara Eropa Barat dengan Levaent dan dunia Arab.

Dengan jatuhnya Toledo dari Bangsa Moor oleh orang-orang Kristen pada tahun 1085, telah diikuti oleh gelombang pelajar-pelajar Kristen untuk belajar kepada orang-orang Islam. Pusat-pusat bangsa Moor di Spanyol dalam abad ke-12 telah dimasuki oleh sarjana-sarjana Kristen, dan dalam sejarah dikenal sebagai ***Abad penerjemahan***.

Salah seorang sarjana Kristen yang paling muda yang telah belajar di pusat-pusat pendidikan Muslim adalah Adelard dari Bath (±1120). Ia adalah seorang biarawan dari inggris yang belajar di Spanyol. Ia telah melewati yunani, syiria dan Mesir. Adelard telah banyak melakukan terjemahan dalam bahasa Latin dari buku-buku yang berbahasa Arab, diantaranya Element Euclid dan Astronomi Al-Khowarizmi.

Adelard mempunyai kemahiran dalam mempelajari bahasa Arab, sehingga ia tidak merasa gentar dengan resiko-resiko fisik yang kemungkinan dihadapinya dalam penyamaranya sebagai pengikut Islam. Hal ini dilakukannya semata-mata hanya untuk memperoleh ilmu pengetahuan.

Penterjemah muda lainnya adalah seorang Itali yang bernama **Plato** dari Tivoli (±1120) ia telah menterjemahkan ***Astronomi*** karya Al-Battani, ***Bola*** Karya Theodosius, dan karya-karya lainnya. Penterjemah yang paling produktif adalah Gherardo dari Cremona (1114 – 1187) yang telah menterjemahkan lebih dari 90 karya bangsa Arab ke dalam bahasa Latin. Diantaranya adalah ***Almsagest Ptolemy***, ***Element Euclid***, dan ***Aljabar Al-Khowarizmi***. Sebagai contoh adalah pengembangan istilah ***Sinus***. Penterjemah lainnya yang dikenal pada abad ke-12 adalah Jhon dari Seville dan Robert dari Chester.

Lokasi pulau Sicilia, secara alamiah dalam sejarah politiknya merupakan perpaduan antara Barat dan Timur. Sicilia sebagai jajahan Yunani merupakan bagian dari kekaisaran Romawi. Kota ini berkaitan pula dengan Konstantinopel, dan setelah jatuhnya Romawi diperintah oleh orang-orang Arab hampir selam 50 tahun. (di abad ke-9). Namun, kota ini kemudian dimiliki kembali oleh orang-orang Yunani, dan seterusnya diambil alih oleh orang-orang Norman. Selama orang-orang Norman memerintah, bahasa Yunani, Arab, dan latin dipergunakan secara berdampingan. Pada waktu itu para diplomat kerap kali melewati konstantinopel dan Bagdad.

Pada masa berkuasanya orang-orang Norman, banyak naskah-naskah matematika dan sains dari bahasa yunani dan Arab diterjemahkan kedalam bahasa Latin. Kegiatan ini didukung oleh dua orang raja sebagai penyongkong ilmu pengetahuan, yaitu Frederick II (1194 – 1250) dan Putrinya Manfred (± 1231 – 1266).

Di antara kota-kota yang membina hubungan dengan dunia Arab adalah pusat-pusat perdagangan di italic seperti Genoa, Pisa, Venice, Milan, dan Florence. Para saudagar Itali datang dan berhubungan dengan peradaban Timur, serta mengambil manfaatnya, terutama tentang informasi-informasi aritmatika dan aljabar. Dalam hal ini, para pedagang telah memainkan peran penting dalam menyebarkan sistem numerasi Hindu-Arab.

8.3 Fibonancci dan Abad Ketigabelas

Pada awal abad ke-13, Leonardo Fibonacci (Leonardo anak anak laki-laki Bonanccio), adalah salah seorang yang paling terkenal di antara ahli matematika pada abad pertengahan. Ia dikenal pula dengan nama Leonardo dari Pisa (Lenardo Pisano). Leonardo dilahirkan pada tahun 1175 di pusat kota dagang Pisa. Ayahnya seorang pedagang besar, dan setelah mengetahui anaknya tertarik terhadap matematika, ia kemudian membawa tamasya mengelilingi Mesir, Sicilia, Yunani, dan Syria.

Pada tahun 1202, Leonardo Fibonancci telah menulis sebuah buku dengan nama: ***Liber Abaci***. Dalam bukunya tersebut, dimuat tentang kepraktisan dan keunggulan metode-metode perhitungan dengan menggunakan sistem Numerasi Hindu-Arab. Pada garis besarnya, buku ini memuat aljabar dan aritmatika. Namun dalam materi lajabarnya terlihat adanya pengaruh dari ***Aljabar Al-Khowarizmi*** dan Abu Kamil.

Liber Aboci menjadi terkenal setelah penerbitan edisi keduanya pada tahu 1228. yang paling penting dari isi bukunya adalah masalah yang dikenal dengan nama ***Barisan Fibonancci*** (Fibonancci Sequence), yaitu:

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots, x, y, x + y, \ldots,$$

Dan beberapa masalah lainnya. Jika diperhatikan, maka suku-suku dari barisan tersebut mempunyai kaitan dan sifat-sifat tertentu. Pada tahun 1220, muncul lagu karya Fibonancci lainnya, yaitu ***Practice Geomeriae***. Buku ini merupakan kumpulan materi-materi geometri dan trigonometri yang banyak dipengaruhi karya Euclid.

Pada tahun 1225, Fibonancci menulis pula sebuah buku yang dikenal dengan nama ***Liber Kuadratorum***. Buku ketiga ini merupakan satu karya yang gemilang dan merupakan karya yang asli, yang membahas masalah analisis bentuk-bentuk tak tentu. Dengan adanya karya inilah, Fibonancci dikenal sebagai seorang matematikawan yang berada setingkat dengan Dhiopantus dan Fermat.

Pada saat Fibonancci terkenal, Ia pernah diundang oleh Jhon Palermo untuk memecahkan soal yang dikerjakan Frederick II. Dalam masalah pertama, Fibonancci diminta untuk mencari bilangan rasional x sehinga $x^2 + 5$ dan $x^2 - 5$ masing-masing adalah kuadrat dari bilangan rasional. Fibonancci memberikan jawaban, x = 41/12, karena setelah disubtitusikan didapatkan:

$$(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2 \text{ dan } (14/12)^2 - 5 = (31/12)^2$$

Penyelesaian masalah ini termuat dalam **Liber Quadratorium**

Masalah yang kedua, Fibonancci diminta untuk menyelesaikan persamaam pangkat tiga dengan bentuk seperti berikut:

$$X^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Soal ini pun dapat pula diselesaikan oleh Fibonancci dengan memberikan jawabannya yang dapat dibuktikan kebenarannya. Ia mengatakan bahwa persamaan pangkat tiga seperti ini tidak mempunyai akar rasional, tetapi ia telah mendapatkan bilangan $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ irrasional yang memenuhi persamaan yang diberikan. Ia telah mendapatkan bilangan tersebut dan menuliskannya dalam tingkat ketelitian sampai sembilan tempat decimal, yaitu 1,3688081075, jawaban terhadap persoalan ini ditulis dalam bukunya yang berjudul ***Flose*** (bunga), sekitar tahun 1225.

Selain dari Fibonancci, matematikawan lainnya di abad ke-13 tidaklah banyak dan tidak setenar Fibonancci. Namun demikian, mereka telah ikut serta dalam mengembangkan matematika, diantaranya adalah Yordanus Nemorarius yang pada tahun 1222 telah menulis geometri, astronomi, probbilitas, dan ilmu keseimbangan.

Matematikawan lainnya antara lain Sacrobosco (Jhon dari Holywood atau Jhon dari Halifax), Campanus, dan Roger Bacon. Sacrobasco adalah matematikawan dari Paris yang telah menulis aturan-aturan dalam matematika, Almagestamtolemy, dan beberapa karya astronomi bangsa Arab. Sedangkan Campanus telah menterjemahkan Element Euclid ke dalam bahsa Latin. Demikian juga Roger Bacon, yang merupakan salah seorang yang mempunyai keahlian khusus dalam matematika. Ia adalah seorang yang cerdas yang telah banyak menulis matematika dan astronomi dari Yunani Kuno.

Dalam abad ke-13 ini telah banyak pula universitas yang berperan serta dalam mengembangkan matematika. Ada beberapa universitas yang didirikan sekitar abad ke-13, diantaranya di Paris, Oxford, Camridge, Padlus dan Naples.

8.4 Abad Ke Empatbelas

Abad ke-14 bagi matematika merupakan abad yang paling gersang. Abad ini merupakan abad kegelapan yang menimpa sepertiga penduduk Eropa. Pada abad ini terjadi peperangan yang berkepanjangan, yang berlangsung selama beratus-ratus tahun dengan keadaan politik dan ekonomi yang tidak menentu.

Matematikawan terbesar pada abad ke-14 adalah ***Nicole Oresm*** (1323 –1382). Ia lahir di Normandiadan. Ia pernah menduduki jabatan guru besar di salah satu lembaga pendidikan di Normandia.

Nicole Oresm telah menulis lima buah buku yang berkaitan dengan matematika, diantaranya diterjemahkan dari karya Aristoteles. Salah satu bukunya membahas masalah perpangkatan pecahan (Fractional Exponent), walaupun belum ditulis dengan notasi yang modern. Pada salah satu bukunya, ia telah menulis cara-cara meletakan suatu titik dengan menggunakan sistem koordinat, dan ini ternyata merupakan awal dari sistem koordinat dalam geometri yang modern.

Ahli matematika lainnya di abad ke-14 adalah E.T. Bell, yang telah menulis ***Analisis Matematika***, yang merupakan awal dari perpindahan matematika lama ke matematika modern. Matematikawan lainnya adalah Thomas bradwardine (1290 – 1349), seorang ilmuan Katolik dari Centerbury. Ia telah membahas masalah spekulasi dalam penjumlahan yang merupakan konsep dasar yang berkaitan dengan istilah continue, diskrit, dan ketakberhinggaan. Selain itu, Ia juga menulis empat buah buku matematika yang berkaitan dengan geometri dan aritmatika, serta telah menggunakan aritmatika untuk keperluan mekanika.

Pada abad ke-14 ini, di Eropa mulai bermunculan perguruan tinggi yang mulai merintis dan mengembangkan ilmu pengetahuan, termasuk matematika. Beberapa perguruan tinggi itu diantaranya, tahun 1343 berdiri universitas Pisa, 1347 berdiri Universitas Prague, tahun 1361 berdiri Universitas Pavia, tahun 1364 berdiri Universitas Cracou, tahun

1365, berdiri Universutas Vienna, tahun 1379 berdiri Universitas Erfurt, dan tahun 1385 berdiri universitas Heidelberg.

8.5 Abad Kelimabelas

Abad ke-15 telah diakui sebagai awal dari gerakan ***Renaisance Eropa*** (Aliran Kebangkitan kembali di Eropa) dalam bidang seni dan ilmu pengetahuan. Hal ini sejalan dengan runtuhnya kerajaan bizantium dan Konstantinopel yang telah mencapai puncaknya, yaitu pada tahun 1453 ke tangan orang-orang Turki. Keadaan ini telah mengakibatkan mengalirnya para pengungsi secara besar-besaran ke daratan Eropa, terutama ke Itali. Para pengungsi itu membawa barang-barang yang berharga dari peradaban Arab dan Yunani Kuno.

Melalui kegiatan penterjemahan secara besar-besaran dari buku-buku ilmu pengetahuan yang berbahasa Arab dan bahasa Yunani ke dalam bahasa Latin, telah mengakibatkan adanya perkembangan dalam matematika dan ilmu pengetahuan lainnya.

Kira-kira pada pertengan abad ini, hal yang berhubungan dengan percetakan telah mulai dikembangkan. Dengan penemuan mesin-mesin percetakan, maka terjadilah perdagangan buku-buku ilmu pengetahuan, sehingga dalam tempo yang relatif singkat, ilmu pengetahuan telah tersebar dengan cepat. Pada abad ke-15 ini, benua Amerika telah berhasil ditemukan dan benua baru itu telah dijelajahi oleh para petualang dari daratan Eropa.

Kegiatan matematika pada-abad ke-15 telah menyebar dengan meluas dengan beberapa pusatnya terletak di Italia dan beberapa kota "lainnya di Eropa, seperti di Nurenberg, Vienna, dan Prague.

Matematikawan di kota-kota tersebut sedang memusatkan perhatiannya terhadap masalah-masalah matematika terutama aritmetika, aljabar dan trigonometri, Prinsip-prinsip matematika telah pula menjadi prinsip-prinsip yang utama dalam masalah-masalah perdagangan, pelayaran, astronomi dan penelitian

Pada abad ke-15 ini akan kita jumpai beberapa ahli matemata, akan tetapi mereka jumlahnya relatif sedikit. Diantaranya seseorang yang bernama ***Nicholas Cusa*** (1401-1464). Nama Cusa diambil dari kota kecil tempat kelahiranNya, yaitu Cues di Mosel. Ia lahir pada tahun 1401 dari keluarga nelayan yang miskin, dan ia dibesarkan di lingkungan gereja, yang akhirnya ia menjadi seorang kardial. Kemudian pada tahun 1448, Ia diangkat menjadi gubernur di kota Roma. Secara kebetulan Ia mempunyai kepandaian dalam bidang matematika. Cusa telah berhasil menulis beberapa buku matematika, tentang pembaharuan kalender tentang membujursangkarkan lingkaran, dan masalah-masalah pengukuran. Nicholas Cusa meninggal pada tahun 1464.

Matematikawan besar lainnya di abad ke-15 adalah ***Georg von Peurbach*** (1423-1461), yang telah menganggap Nicholas Cusa sebagai salah seorang gurunya. Setelah ia menamatkan pendidikannya dalam bidang matematika di Italia, ia menetap di Vienna dan mendirikan sebuah universitas yang kemudian menjadi pusat matematika pada generasinya.

Georg Peurbach telah menulis beberapa buku yang membahas masalah aritmetika, masalah matematika yang berkaitan dengan astronomi, dan Ia telah berhasil melengkapi tabel untuk fungsi sinus. Banyak di antara beberapa karyanya yang baru diterbitkan setelah ia meninggal. Ia telah pula memulai menterjemahkan beberapa karya orang lain kedalam bahasa Latin, diantaranya Almagest dari Ptolemy yang belum sempat terselesaikan.

Matematikawan yang paling berpengaruh pada abad ke-15, adalah ***Johann Muller***

(1436-1476) yang mempunyai pengetahuan yang sangat luas. Ia dilahirkan di Konigsberg ("gunung raja")? kemudian Muller lebih dikenal dengan nama Regiomontanus. Pada masa mudanya ia belajar di Vienna di bawah bimbingan Peurbach. Ia telah mendapat kepercayaan untuk menterjemahkan bagian akhir dari Almagest-nya Ptolemy yang belum dirampungkan oleh Peurbach.

Kira-kira pada tahun 1464, Regiomontanus atau Muller telah pula menterjemahkan karya-karya besar para ahli matematika Yunani Kuno, diantaranya karya-karya besar Apollonius, Heron, dan Archimides.

Salah satu karyanya yang paling besar adalah ***De triangulis Comnimodis*** yang telah ditulis sejak tahun 1464, namun baru dipublikasikannya setelah ia meninggal, yaitu diterbitkan pada tahun 1533. Karyanya ini merupakan pelopor yang sistematis dari karya-karya di Eropa. Adapun materinya membahas masalah trigonometri dan bola yang merupakan dasar-dasar astronomi.

Johann Muller lebih dikenal dengan nama ***Regiomontanus*** (nama Latin). Ia telah banyak melakukan perjalanan, di antaranya di Italia, Jerman, dan pada tahun 1471 ia menetap di Nuremberg. Kemudian ia tinggal di sana untuk melakukan penelitian dan menulis beberapa buku tentang astronomi.

Pada tahun 1475, Regiomontanus diundang ke Roma oleh Paus Sixtus IV untuk mengambil bagian dalam pembuatan kalender. Namun tidak lama setelah ia tinggal di sana, ia meninggal dalam usianya yang ke-40. Ada beberapa kabar yang menyatakan bahwa kematiannya disebabkan oleh penyakit sampar, namun berita itu hanyalah kabar angin saja, dan ada yang menyatakan bahwa Regiomontanus meniggal disebabkan diracun oleh orang-orang yang tidak menyenanginya.

Ahli matematika lainnya yang brillian dari abad ke-15 adalah Nicolas Chuquet dari Perancis. Ia melakukan praktek pengobatan di tempat tinggalnya, yaitu di kota Lyons yang berdekatan dengan kota kelahirannya Paris.

Pada tahun 1484, Chuquet telah menulis sebuah buku yang membahas masalah aritmetika yang disebut ***Triparty en la science des nombres***. Buku ini untuk pertama kalinya dicetak baru pada abad ke-19. Isinya meliputi tiga bagian besar, yang pertama membahas masalah bilangan rasional, yang kedua membahas masalah bilangan irasional, dan yang ketiga membahas masalah persamaan. Chuquet telah pula memperkenalkan pemakaian pangkat bilangan bulat positif dan negatif dalam membahas aljabar. Chuquet meninggal pada tahun 1500.

Matematikawan lainnya adalah dari Italia yang bernama Luca Pacioli ($\pm$ 1445-1509). Pada tahun 1434, ia telah menulis buku dengan judul ***summa de artimetica, geometrica, proprtioni et proportionalita***, yang kemudian dikenal dengan singkat sebagai ***Suma***. Bagian aritmetika dari ***Suma*** dimulai dengan algoritma yang merupakan dasar dalam mencari akar-akar dari soal-soal persamaan kuadrat. Sedangkan pada bagian aljabarnya, telah mulai banyak digunakan singkatan-singkatan, misalnya ia telah memperkenalkan notasi huruf p (berasal dari kata ***piu*** yang berarti *lebih*) untuk notasi +, dan huruf m (berasal dari kata ***memo*** yang berarti *kurang*) untuk notasi "–" (minus), kemudian *co* (berasal dari kata ***cosa*** yang berarti *anu*) untuk menyatakan bilangan yang belum diketahui (x), kemudian *ce* (berasal dari kata ***censo***) untuk x^2, kemudian *cu* (berasal dari kata ***cuba***) untuk x^3, dan *cece* (berasal dari kata *cencocenso*) untuk x^4. Kesamaan kadang-kadang ditunjukkan dengan notasi ***ae*** (berasal dari kata ***aequalis***) dan masih banyak singkatan lainnya, termasuk kata ***Suma*** yang berasal dari kata ***Summa***.

Pacioli telah melakukan perjalanan yang jauh dan lama, Ia pernah mengajar di berbagai tempat, dan ia telah sempat pula menulis sebuah teori tentang bilangan yang belum sempat dipublikasikannya. Kemudian pada tahan 1509, ia telah menerbitkan sebuah buku ***De diuina Proportione***, yang berisikan pemikiran-pemikiran tentang bangun-bangun zat padat yang beraturan. Pemikiran-pemikirannya ini sempat digambar oleh Leonardo da Vinci (1452-1519).

Leonardo da Vinci termasuk salah satu figur terkemuka dari sederetan pelopor Renaisance di Italia. Ia adalah pelopor dalam bidang arsitektur, mekanika, fisika, ilmu faal, anatomi, seni pahat, lukis, musik dan filsafat. Ia adalah seorang yang sopan, rendah hati dan baik budi.

Kembali lagi pada perkembangan sejarah matematika, Perjanjian yang pertama dalam cetakan untuk penulisan tanda + (plus) dan - (minus) dalam aritmetika, telah diperkenalkan di Leipzig oleh Johann Widman (lahir di Bohemia pada tahun 1460). Sedangkan dalam-bahasa Latin, seringkali dipakai kata ***et*** untuk mengartikan penjumlahan dan huruf *m* sebagai singkatan dari ***minus*** untuk pengurangan.

Adapun keterangan lainnya yang dapat kita terima tentang pemakaian notasi (+) dan (-) sebagai simbol aljabar, yaitu pada tahun 1514 ketika dipakai oleh aritmetikawan Belanda yang bernama Vander Heocke, Namun kemungkinan pula, pemakaian simbol-simbol, ***plus*** dan ***minus*** telah pula dipakai jauh' lebih awal.

8.6 Aritmetika Lama

Dengan semakin pentingnya masalah pendidikan yang telah dapat mengantarkan kebangunan kembali di Eropa (Renaisance), telah pula menimbulkan pesatnya perdagangan. Kemudian tentang pentingnya kebutuhan buku-buku sudah pula mulai dirasakan, dan keadaan ini didukung oleh dunia pendidikan dan perdagangan yang terus berkembang. Demikian pula buku-buku aritmetika yang berkaitan dengan perhitungan telah mulai bermunculan. Sampai dengan abad ke-17 di Eropa telah dicetak lebih dari tiga ratus buku yang berkaitan dengan aritmetika.

Buku-buku ini umumnya ditulis oleh-para sarjana klasik yang sering bergerak di lingkungan sekolah-sekolah. Sedangkan penulis aritmetika adalah guru-guru yang sudah berpengalaman, dan umumnya ditulis dalam bahasa daerah. Penulisan materi ini sangat diperlukan oleh para guru untuk disampaikan kepada para muridnya sebagai bekal mengembangkan karier dagangnya dikelak kemudian hari.

Dengan adanya percetakan pada tahun 1478 telah diterbitkan buku aritmetika di kota Treviso yang terletak di jalur perdagangan antara kota Venesia dengan kota-kota di daerah utara. Keadaan ini telah mengakibatkan semakin menyebarnya buku-buku aritmetika tersebut. Kebanyakan buku-buku aritmetika itu berkaitan dengan masalah perdagangan yang berhubungan dengan bilangan-bilangan. Materi aritmetika lebih ditekankan pada masalah perhitungan dengan aplikasinya pada masalah terhadap masalah-masalah pertukaran dan persekutuan. Aritmetika pada waktu itu lebih menyenangi masalah algoritma dari abad ke-14, namun dimuat pula beberapa pertanyaan yang berkaitan dengan kreasi-kreasi yang baru.

Masalah-masalah aritmetika yang demikian itu lebih banyak berpengaruh di Italia, diantaranya ada buku aritmetika yang ditulis oleh Piero Borghi, yaitu ***Treviso Arithmetic*** yang lebih dikenal sebagai ***Aritmetika Komersil***. Hasil karya yang tinggi ini pernah pula diterbitkan di Venesia pada tahun 1484, dan terus berlangsung sampai pada penerbitan yang relatif sederhana yaitu pada edisi ke-1,7, dan baru berakhir pada tahun 1557.

Kemudian pada tahun ± 1451 buku aritmetik komersil ini muncul pula di Florence yang ditulis oleh Pilippo Calandri. Dan yang menarik perhatian kita dari buku ini, adanya beberapa bagian yang menurut beberapa contoh dari Aritmetika Komersil yang diterbitkan dalam edisi pertama di Itali.

Kita telah pula mempelajari karya besar Pacioli, yaitu Suma yang diterbitkan pada tahun 1494 yang sebagian besar isinya membahas masalah aritmetika. Dalam buku ini didapatkan pula beberapa informasi masalah perdagangan yang biasa dilakukan oleh orang-orang Itali.

Buku Aritmetika dari Widman yang diterbitkan tahun 1489 di Leipzig sangat berpengaruh pula di Jerman. Masih banyak lagi keperluan orang-orang Jerman pada aritmetika, diantaranya terhadap aritmetika yang ditulis oleh Jacob Kobel (1470-1533) seorang Rechenmeister dari kota Heidelberg, aritmetika yang populer ini diterbitkan pada tahun 1514 yang terus berlangsung sampai 22 edisi. Namun demikian pula salah satu buku aritmetika yang telah banyak pengaruhnya terhadap para pedagang Jerman adalah buku aritmetika yang ditulis oleh Adam Riese (1489-1559), yang pernah diterbitkan pada 1522.

Inggris telah pula berhasil melahirkan beberapa "sarjana" aritmetika yang terkemuka, Buku yang pertama kali diterbitkan di Inggris yang membahas aritmetika ditulis oleh Guthbert Ton-stall (1474-1559). Buku ini berdasarkan pada buku Suma dari Pacioli, dan ditulis dalam bahasa Latin, yang kemudian diterbitkan pada tahun 1552.

Penulis aritmetika lainnya dari Inggris adalah Robert Recorde (+1510-1556j. Karyanya ini telah ditulis dalam bahasa Inggris dan dikenal dengan nama ***The Ground of Artes*** yang diterbitkan pada tahun 1542. Karya ini telah mencapai penerbitan sampai edisi ke-29.

8.7 Permulaan Simbolisasi Aljabar

Dalam akhir pembicaraan tentang aritmetika, kita telah mengenal Robert Recorde. Selain dari masalah aritmetika, ia telah pula menulis buku-buku astronomi, geometris aljabar, pengobatan, dan mungkin beberapa karyanya Itu sekarang/telah hilang. Buku astronominya yang diterbitkan pada tahun 1551, yang disebut ***The Castle of Knowledge*** adalah buku pertama yang membahas teori-teori Copernicus yang ditulis dalam bahasa Inggris. Demikian pula dengan buku geometrinya ***The Pathewaie to Knowledge*** yang diterbitkan pada tahun 1551 berisikan suatu ringkasan tentang dasar-dasar geometri dari ***Elemen Euclid***.

Yang lebih menarik lagi dari Larva Robert Recardo, adalah buku aljabarnya yang dikenal dengan name ***The Whetstone of Witte***. Buku ini diterbitkan pada tahun 1557 dengan menggunakan simbol yang modern untuk tanda kesamaan, Buku ini merupakan buku yang pertama simbol pasangan dua buah garis yang sejajar sebagai simbol kesamaan (tanda sama dengan).

Demikian pula dengan simbol lainnya, seperti tanda akar telah pula mulai dipergunakan oleh Christoff Rudolff dalam tahun 1525, dalam buku aljabarnya dengan judul ***Die Coss***. "Buku' aljabar ini" sangat berpengaruh di Jerman, dan dalam edisi berikutnya diperbaiki oleh Michael Stifel (1466-1587) pada tahun 1553 Stifel adalah penulis aljabar terbesar dari Jerman dalam abad ke-16.

Stifel telah pula menulis sebuah buku yang dikenal sebagai, ***Arithmetica Integra*** yang diterbitkan pada tahun 1544. Buku ini terdiri, dari tiga bagian, yaitu bilangan rasional, bilangan irasional, dan aljabar. Dalam bagian, pertama dibahas pula aritmetika yang berkaitan dengan logaritma dan koefisien binomial sampai tingkat tujuh belas. Dalam bagian kedua dibahas masalah-masalah yang termuat dalam buku x Element Euclid dan pada bagian yang ketiga dibahas tentang bentuk-bentuk persamaan. Dalam, buku ini telah pula dipakai simbol-simbol seperti +, -, dan $\sqrt{\ }$.

8.8 Persamaan Pangkat Tiga dan Pangkat Empat

Dalam awal abad ke-16 telah diperoleh suatu kemajuan dalam perkembangan matematika. Dalam abad ini, para matematikawan di Itali telah mampu menyelesaikan persamaan pangkat tiga dan pangkat empat.

Dalam sejarah matematika yang sampai kepada kita yang disampaikan oleh Benvenuto Cellini, dikisahkan bahwa pada tahun 1515 Scipione del Perro (1465—1526) telah mampu menyelesaikan persamaan pangkat tiga:

$x^3 + mx = n$

namun ia telah merahasiakan cara-cara menyelesaikannya sehingga diperoleh hasilnya. Kemudian kunci jawabannya itu hanyalah diberikan kepada muridnya Antonio Pior.

Pada tahun 1535 Nicolo dari Brescia yang dikenal dengan nama Tartaglia (1449-1557) menyatakan bahwa ia telah dapat menyelesaikan persamaan pangkat tiga:

$$x^3 + px^2 = n$$

Fior mengira bahwa pernyataan Tartaglia itu hanyalah gertakan saja, kemudian ia menentang Tartaglia dalam pertandingan terbuka untuk menyelesaikan persamaan pangkat tiga. Dalam pertandingan tersebut, Fior diharuskan memberikan dua buah bentuk jawaban, namun ia hanya mampu memberikan satu jawaban. Sedangkan Tartaglia telah dapat menyelesaikan kedua persoalan yang diberikan oleh Fior. Tartaglia dianggap sebagai pemenang mutlak.

Selanjutnya Tartaglia Memberikan kunci keberhasilan dalam menyelesaikan persamaan pangkat tiga kepada Girolamo Cerdano dengan janji tidak akan membicarakannya lagi kepada orang lain. Girolamo Cardano (1501-1576) adalah seorang matematikawan jenius yang membuka praktek pengobatan di Milan.

Pada tahun 1545, Cardano menulis sebuah buku aljabar dalam bahasa Latin yang dikenal dengan nama ***Ars magna***. Buku ini diterbitkan di Nuremberg, Jerman. Di dalam buku ini dimuat cara-cara menyelesaikan persamaan pangkat tiga dari Tartaglia. Tartaglia tentunya melakukan protes keras terhadap Cardano, namun ia dihadapi oleh Lodovico Perrari salah seorang murid Cardano yang mengira bahwa Cardano telah menerima informasi dari Del Perro sebagai pihak ketiga, dan telah menuduh Tartaglia mencuri jawaban tersebut dari sumber yang sama.

Penyelesaian persamaan pangkat tiga $x^3 + mx = n$ yang diberikan oleh Cardano dalam buku *Ars Magna*, secara intisarinya sebagai berikut :

$$(a - b)^3 + 3ab (a - b) = a^3 - b^3$$

Jika a dan b, dinyatakan dalam bentuk :

$$3ab = m \ , \ a^3 - b^3 = n \ , \text{ maka } x = a - b.$$

Penyelesaian terakhir dari kedua persamaan simultan di atas untuk a dan b, kita dapatkan:

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2}} \quad ,$$

$$b = \sqrt[3]{-\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3}} \quad ,$$

sehingga x dapat kita tentukan.

Pada tahun 1540, seorang metematikawan dari Itali yang bernama ***Zuanne de Tonini da Coi*** mengajukan sebuah masalah pada Cardano, yaitu sebuah persamaan pangkat empat. Ternyata Cardano tidak dapat memberikan jawabannya, namun salah seorang muridnya yang bernama Lodovico Ferrari telah mampu memberikan jawabannya.

Metode yang diberikan oleh Ferrari untuk menyelesaikan persamaan pangkat empat dengan transformasi yang sederhana, yaitu dengan reduksi melengkapkan kuadrat, misalnya salah satu bentuk persamaan pangkat empat berikut :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Dari sini kita dapatkan :

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

atau

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$$

dan untuk sembarang y,

$$(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx + p^2 - r + 2y\,(x^2 + p) + y^2$$
$$= (p + 2y)\,x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2).$$

Kemudian kita pilih nilai y yang sesuai dengan persamaan tadi, sehingga kita dapatkan :

$$4\,(p + 2y)\,(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0$$

Persamaan yang terakhir ini adalah persamaan pangkat tiga dalam y, dan selanjutnya dapat kita selesaikan dengan metode sebelumnya.

Penyelesaian secara aljabar dalam bentuk umum untuk persamaan pangkat tiga dan pangkat empat diberikan kemudian. Dalam fasal berikutnya dapat kita perhatikan metode yang diberikan oleh Francois Viete, yaitu matematikawan Prancis di abad ke-16. Selain itu, penyelesaian untuk persamaan pangkat empat, salah satu caranya telah pula diberikan oleh Descartes pada tahun 1637. metode dari Descartes merupakan metode yang standar yang banyak dipakai dalam buku-buku pelajaran di sekolah-sekolah dalam membahas teori persamaan.

8 .9. Francois Viete

Ahli matematika Prancis terbesar dari abad ke-16 adalah ***Francois Viete*** (1540-1603), yang sering dipanggil dalam nama latin Vieta. Ia seorang pengacara dan anggota parlemen yang banyak mencurahkan waktunya untuk matematika. Ia dilahirkan di kota Fontenay pada tahun 1540 dan meninggal di Paris pada tahun 1603.

Ada beberapa anekdot yang dilontarkan tentang Vieta. Ada suatu cerita tentang duta dari negara terbelakang yang beranggapan, bahwa Prancis tidak mempunyai matematikawan yang patut dibanggakan oleh raja Henry IV. Hal ini diungkapkannya ketika ada suatu kemelut untuk memecahkan masalah yang dikemukakan pada tahun 1593 oleh teman senegaranya, Andrianus Romanus (1561-1615) yang menghendaki penyelesaian persamaan pangkat 45 dalam bentuk yang khusus.

Vieta telah diundang ke istana untuk memecahkan persamaan-persamaan yang diberikan oleh Romanus. Dalam waktu yang singkat Vieta telah dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan hubungan trigonometri.

Sebagai balasannya, Vieta menantang Romanus untuk memecahkan masalah dari Apollonius. Romanus telah dapat pula menyelesaikannya dengan menggunakan peralatan Euclid. Ketika ia mendapat saran dari teman-temannya, Romanus pergi ke Fontenay menjumpai Vieta, sehingga terjadilah persahabatan yang erat di antara Romanus dengan Vieta.

Kemudian, adapula suatu cerita bagaimana Vieta mencapai sukses dalam menekuni sebuah buku yang berbahasa Spanyol yang berisi lebih dari seratus karakteristik. Sebagai akibatnya dalam perang antara Prancis dan Spanyol yang berlangsung selama dua tahun, Prancis banyak memperoleh kemenangan yang gemilang karena kemampuan Vieta dalam membaca sandi-sandi bangsa Spanyol.

Raja Philip II dari Spanyol merasa yakin bahwa sandinya tidak akan terpecahkan oleh Prancis, sehingga ia mengadu kepada Paus bahwa Perancis telah menggunakan ilmu sihir (magic) untuk mengalahkan negerinya. Ilmu sihir adalah hal yang bertentangan dengan ajaran agamanya. Dikatakan pula, bahwa ketika ia membaca matematika karya Vieta ia selalu terserap dengan tulisan-tulisannya sehingga ia selalu mengurung dirinya di dalam kamar selama berhari-hari.

Vieta telah menulis sejumlah buku trigonometri, aljabar, dan geometri. Diantaranya beberapa buku dengan judul *Canon mathematicus seu ad triangular* (1579), *In artem analyticam isagoge* (1591), *Supplementum geometriae* (1593), *De numerosa potestatum resolutione* (1600), dan *De aequationum recognitione et emendatione* (diterbitkan 1615). Hasil karyanya ini, kecuali yang terakhir, telah dicetak dan didistribusikan dengan biaya sendiri.

Karya Vieta yang paling terkenal adalah *In artem* yang banyak berperan dalam perkembangan pemakaian symbol-simbol aljabar. Disini, Vieta telah mempergunakan huruf hidup untuk menyatakan suatu variable dan huruf mati untuk menyatakan konstanta. Sedangkan kebiasaan kita sekarang menggunakan huruf-huruf untuk menyatakan sesuatu yang belum diketahui yang pada mulanya diperkenalkan oleh Descartes pada tahun 1637.

Vieta telah pula menggunakan huruf-huruf atau tanda-tanda yang berbeda untuk menyatakan berbagai pengertian tertentu yang berbeda, dan telah menggunakan huruf-huruf yang sama untuk pengertian yang sama. Misalnya, jika sekarang berturut-turut menuliskan x, x^3 dan x^3, maka Vieta secara berturut-turut menuliskannya sebagai A, A *quadratum*, *Acubum*, dan oleh para penulis berikutnya ditulis secara lebih singkat, A, A q, A c.

Selanjutnya, Vieta telah memperkenalkan tanda + dan - , tetapi belum mempunyai symbol untuk tanda sama dengan sebagai contoh untuk menyatakan ;

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

dituliskan dalam bentuk seperti berikut :

B 5 in A quad – C plano 2 in A + A cub aequatur D solido.

Dalam hal menyelesaikan persamaan pangkat empat yang diberikan oleh Vieta mempunyai persamaan seperti yang telah diberikan oleh Ferrari. Namun bentuk umum persamaan yang diberikan oleh Vieta berbeda dengan yang diberikan oleh Ferrari. Bentuk umum persamaan pangkat empat dan penyelesaian yang telah diberikan oleh Vieta adalah sebagai berikut :

$$x^4 + ax^2 + bx = c$$

atau dapat pula ditulis dalam bentuk :

$$x^4 = c - ax^2 - bx .$$

Selanjutnya ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan di atas ditambah dengan $x^2 y^2 + y^4/4$, sehingga didapatkan :

$$\left(x^2 + y^2/2\right)^2 = \left(y^2 - a\right)x^2 - bx + \left(y^4/4 + c\right)$$

Sekarang kita pilih y sebagai akar dari persamaan pangkat empat, maka kita dapatkan :

$$y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2 ,$$

bentuk yang terakhir ini adalah persamaan pangkat tiga dalam y^2. dengan demikian tentunya y dapat kita cari sebagai akar-akar dari persamaan pangkat empat.

Vieta adalah salah seorang ahli aljabar yang terkemuka, dan tentunya bukan suatu keanehan bahwa ia telah berhasil dengan baik mengaplikasikan pelajaran aljabar dan trigonometri terhadap geometri.

Vieta telah pula memberikan sumbangan pemikiran terhadap tiga buah soal kuno yang termashur, khususnya pada masalah ***Duplikasi dan Triseksi*** (fasal 4-3) yang menurut Vieta pemecahannya tergantung pada persamaan pangkat tiga. Kemudian dalam fasal 4-9 telah diperlihatkan pula metode yang diberikan oleh Vieta untuk menghitung harga π (phi).

Pada tahun 1594, Vieta memperoleh beberapa peristiwa yang tidak menyenangkan, ia telah bertentangan pendapat dengan Clavius dalam penyusunan kalender Gregorian, sehingga menimbulkan kemarahan pada diri Vieta. Dalam hal ini, sikap Vieta sama sekali tidaklah ilmiah.

8.10 Matematikawan Lainnya dari Abad Keenambelas

Catatan sejarah kita tentang para ahli matematika abad ke-16, sangatlah kurang bijaksana apabila kita tidak menyinggung beberapa orang yang telah menyumbang pemikiran dan urunan pendapatnya. Matematikawan itu diantaranya Clavius, Cataldi, dan Stevin. Sedangkan para astronom yang merangkap sebagai matematikawan, diantaranya Copernicus, Rhaeticus, dan Pitisous.

Christopher Clavius adalah seorang guru yang berbakat yang telah menulis beberapa buku pelajaran matematika yang sangat berharga. Diantaranya, ia telah menulis buku Aritmetika (tahun 1583), Aljabar (1608), dan tahun 1574 ia telah pula menerbitkan suatu edisi tentang ***Element Euclid***. Ia telah pula menulis masalah trigonometri dan astronomi yang mempunyai peran penting dalam penyusunan kalender Gregorian. Clavius telah mendapatkan kehormatan karena karyanya ini.

Clavius dilahirkan di Bamberg, Jerman tahun 1537 dan meninggal di kota Roma tahun 1612. Ia telah menambahkan sedikit karyanya dalam bidang matematika, tetapi barangkali ia telah melakukan banyak daripada ahli Jerman lainnya yang ada pada masanya. Pietri Antonio Cataldi, dilahirkan di Bologna pada tahun 1548, mengajar matematika dan astronomi di Florence, Perugia, dan Bologna, dan ia meninggal di kota kelahirannya. Cataldi telah menulis beberapa buku yang berhubungan dengan matematika, diantaranya masalah aritmetika, Element Euclid, dan aljabar.

Salah seorang matematikawan dari negara berkembang yang paling berpengaruh pada abad ke-16, adalah Simon Stevin (1548-1626). Ia pernah diangkat menjadi Jendral tentara Belanda. Stevin pernah menerbitkan sebuah buku aritmetika dan sebuah lagi tentang pecahan decimal. Ia pernah pula memenangkan penghargaan karena karyanya dalam bidang statika (statics) dan Hidrostika (hydrostatics).

Astronomi telah lama sekali sangat berhubungan erat dengan matematika. Banyak para matematikawan yang merangkap sebagai astronom dan sebaliknya. Orang terkemuka diantara para astronom yang telah menstimulir matematika adalah Nicolas Copernicus (1473-1543) dari Polandia. (gambar 8.18 terlampir).

Copernicus lulusan dari Universitas Cracow, ia telah belajar hokum, pengobatan, dan astronomi di Padua dan Bologna. Teorinya tentang alam semesta telah diselesaikan pada tahun 1530, namun tidak diterbitkan hingga ia meninggal pada tahun 1543. Karya Copernicus telah turut mengembangkan teori-teori trigonometri, dan ia sendiri telah menulis risalah yang pokok dalam masalah trigonometri.

Seorang matematikawan dan astronom jerman yang berada pada urutan terdepan dalam abad ke-16, dan sekaligus sebagai pengikut Copernicus adalah Georg Joachim Rhaeticua (1514-1576). Ia telah menghabiskan waktunya kurang lebih 12 tahun dengan melakukan perhitungan-perhitungan untuk melengkapi table trigonometri. Salah satunya adalah table dari keenam fungsi trigonometri untuk setiap 10” (detik) dengan ketelitian sampai 10 tempat decimal. Table lainnya yang dibuat hingga ketelitian sampai 15 tempat decimal, adalah table sinus untuk setiap 10”.

Rhaeticus adalah orang pertama yang mendefinisikan fungsi trigonometri yang diturunkan dari perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku. Hal ini disebabkan oleh desakan dari dirinya sendiri yang mengharapkan karya yang besar dari Copernicus dapat diterbitkan sebelum kematiannya.

Table sinus dari Rhaeticus disusun kembali dengan sempurna pada tahun 1573 oleh Bartholomaus Pitiscus (1561-1613). Ia adalah seorang pendeta Jerman yang mempunyai keahlian dalam bidang matematika. Risalahnya yang besar adalah tentang trigonometri yang merupakan karya pertamanya yang membahas pokok permasalahan tentang tabel sinus yang pernah dikembangkan oleh Rhaeticus.

Sebagai cakupan dari apa yang pernah dicapai dalam sejarah matematika abad ke-16, dapatlah kita menyebutkannya sebagai awal dimulainya symbol-simbol dalam aljabar secara baik. Perhitungan dengan menggunakan angka-angka dari system numerasi Hindu-Arab telah menjadi pemakaian yang standart. Pemakaian pecahan decimal sudah mulai berkembang. Kemudian persamaan pangkat tiga dan pangkat empat telah pula dapat dipecahkan, sehingga teori persamaan secara umum telah pula mulai berkembang.

Kegiatan-kegiatan yang memuaskan dalam bidang matematika dan ilmu pengetahuan akan kita jumpai pada abad berikutnya. Ilmu pengetahuan dan matematika mengalami kemajuan yang luar biasa pesatnya.

Hal yang perlu dicatat disini, adalah tentang adanya karya yang pertama dalam bidang matematika yang diterbitkan di dunia baru (benua Amerika) pada tahun 1556. karya ini diterbitkan di kota Mexico yang berisikan tentang ikhtisar matematika yang sedikit dikomersilkan oleh Juan Diez.

BAB IX
AWAL DARI MATEMATIKA MODERN

9-1. Abad Ketujuh Belas

Abad ke-17 merupakan abad yang terkemuka dalam perkembangan sejarah matematika. Pada awal abad ini, Napier telah mengumumkan penemuannya mengenai logaritma, Harriot dan Oughtred telah menetapkan notasi-notasi aljabar, Galileo telah menemukan ilmu mekanika, dan Kepler mengemukakan hukum-hukum pergerakkan planet.

Masih pada abad ke-17, Desargues dan Pascal membuka lembaran baru dalam Geometri, Fermat meletakkan dasar-dasar Teori Bilangan yang modern, Descartes mulai mengantarkan Geometri Analitik yang modern, dan Huygens telah membuat distribusi Teori Kemungkinan, serta masih banyak lagi bidang-bidang lainnya.

Pada akhir abad ke-17, kreasi Kalkulus telah pula diberikan oleh Newton dan Leibniz. Kita masih dapat melihat pula, bahwa selama abad ke-17 ini telah banyak bidang baru yang dibuka dengan sangat luas untuk penyelidikan matematika.

Tidaklah diragukan lagi, bahwa pada abad ke-17, politik, ekonomi, dan sosial telah pula berkembang dengan pesat. Keadaan ini telah memberikan sumbangan dan dorongan yang besar dalam perkembangan matematika. Matematika telah menjadi bagian dari semua kegiatan intelektual pada abad tersebut.

Pada abad ini terlihat pula pergolakan perjuangan hak-hak azasi manusia. Telah pula dimulai penyelidikan terhadap semangat intelektual internasional dan kesangsian kadar ilmiah suatu ilmu pengetahuan. Yang lebih menguntungkan lagi adalah suasana politik di Eropa Utara, yang telah memberikan perlindungan dan kebebasan pengembangan ilmu pengetahuan untuk menghindarkan diri dari kebodohan. Besar kemungkinan aktifitas matematika pada abad ini bermula dari Italia, dan berkembang sampai ke Inggris dan Perancis.

Ada dua factor yang perlu dicatat, factor pertama adanya aktifitas yang berhubungan dengan matematika yang mulai berkembang dengan cepat, dan telah banyak melibatkan nama-nama orang yang berjasa dalam sejarah matematika. Factor yang kedua pada abad ke-17 telah terjadi pertambahan jumlah penelitian yang berhubungan dengan matematika yang dapat dijadikan sebagai dasar dalam perkembangan matematika berikutnya.

9-2. Logaritma

Banyak sekali lapangan kegiatan yang telah melakukan perhitungan dengan bantuan bilangan, seperti astronomi, navigasi, perekonomian, engineering, dan perang. Perhitungan yang didasarkan dengan bilangan akan menghasilkan tujuan yang lebih tepat dan lebih teliti, sehingga peminat matematika semakin meningkat. Dengan semakin meningkatnya jumlah peminat matematika telah mengakibatkan dijumpainya berturut-turut empat penemuan yang luar biasa dalam matematika, yaitu numerasi Hindu-Arab, pecahan decimal, logaritma, dan mesin perhitungan modern.

Dengan adanya penemuan system numerasi Hindu-Arab yang disempurnakan dengan penulisan pecahan desimalnya, maka kebutuhan ilmu pengetahuan semakin dapat terlayani. Namun ilmu pengetahuan semakin lama semakin berkembang lagi, sehingga menuntut matematika untuk semakin berkembang lagi. Salah satu usaha tersebut adalah kegiatan yang dilakukan oleh John Napier dengan penemuan logaritmanya di awal abad ke-17. John Napier (1550-1617) yang sebagian besar hidupnya dilingkungan keluarga yang disegani di perkebunan Marchiston Castle, dekat Edinburgh, Scotland, dan telah banyak menyita energinya untuk menentang kebijaksanaan politik dan kepercayaan yang berlaku pada saat itu.

John Napier adalah salah seorang anti katolik yang hebat, ia telah memperjuangkan kasus John Knox dan James I, dalam tahun 1593, ia telah menerbitkan tulisannya yang berjudul *A Plaine Discouery of the whole Reuelation of Sain I ohn*, yang ditujukan untuk mengecam Gereja Roma, dan berusaha untuk membuktikan bahwa pendapat Paus yang mengatakan akhir dunia terletak diantara tahun 1688 dan 1700 adalah pernyataan anti Christus. Buku tersebut berlangsung sampai 21 edisi, dan sekurang-kurangnya 10 edisi telah diterbitkan selama ia masih hidup.

John Napier telah pula menulis ramalan bermacam-macam mesin peralatan perang, dan merencanakan pelayaran di bawah air yang disertai dengan diagram-diagram perencanaannya. Beberapa kereta perangnya mirip dengan tank modern, dan salah satu diantaranya peralatan perang yang besar yang akan memusnahkan segala sesuatu yang berada disekitar garis edarnya. Bukanlah merupakan keanehan, karena kepintaran dan imaginasinya yang luar biasa menimbulkan anggapan dari orang banyak, bahwa ia adalah orang yang kurang waras, dan yang lainnya ada yang beranggapan bahwa ia adalah seorang ahli ilmu hitam.

Untuk mengisi waktu-waktu kosong dari kegiatan politik dan polemic keagamaan, Napier menghibur dirinya dengan melakukan kegiatan ilmiah dan mempelajari matematika, sehingga hasil penemuannya sampai sekarang telah tercatat dalam matematika, diantaranya:

(1). Penemuan Logaritma

(2). Suatu keahlian cara menghapal yang membantu ingatan dengan apa yang disebut sebagai *rule of circular parts*, yang dipakai untuk mengingat rumus-rumus yang dipakai dalam memberikan jawaban yang benar mengenai *spherical triangle*.

(3). Sekurang-kurangnya dua buah rumus trigonometri yang dikenal dengan nama <u>Napier Analogies</u>, yang dipakai untuk menyelesaikan *spherical triangle*.

(4). Penemuan alat yang disebut <u>balok-balok Napier</u> atau <u>tulang-tulang Napier</u> (Napier's rods), yang dipakai untuk permainan dan pengambilan bilangan-bilangan akar pangkat dua.

Dari keempat penemuan Napier tersebut, yang paling luar biasa adalah yang pertama. Seperti yang sudah kita ketahui bagaimana manfaat yang diberikan logaritma dalam melakukan perhitungan. Ide penyusunan daftar logaritma yang pertama oleh Napier tersebut, terlihat dengan jelas dalam rumus berikut:

$$Sin\,A - Sin\,B = \frac{Cos\,(A-B) - Cos\,(A+B)}{2}$$

Namun, walaupun adanya berbagai anggapan tentang asal mula dari idenya tersebut tidaklah menjadi masalah, yang jelas Napier telah bekerja untuk menemukan teorinya itu sekurang-kurangnya 20 tahun. Definisi akhir yang diberikannya tentang logaritma adalah seperti berikut. Perhatikan suatu segmen garis AB dan sebuah sinar DE yang tidak terhingga seperti diperlihatkan dengan A dan D bergerak sepanjang lintasannya. Andaikan A berpindah sampai ke titik C dengan kecepatan yang sama dengan jaraknya ke titik B, maka D berpindah ke titik F dengan kecepatan yang berbeda. Kemudian Napier mendefinisikan DF sama dengan Napier (Nap) logaritma (log) dari CB. Jika ditentukan $DF=x$ dan $CB=y$, maka : $x=Nap\log y$

Dalam perjanjiannya, untuk menghindarkan kesulitan dari pecahan, Napier mengambil panjang AB sama dengan 10^7 untuk menyusun tabel sinus yang paling baik, sehingga dapat mencapai tujuh tempat decimal. Untuk selanjutnya melalui aplikasi dalam pengetahuan lain, tetapi tidak didapatkan dari Napier, akhirnya berkembang bahwa:

$$Nap\log y = 10^7 \log_{1/e}\left(y/10^7\right)$$
$$= 10^7 \ln\left(y/10^7\right)$$

untuk mendapatkannya kita perhatikan ketentuan yang diambil AB = 10^7, sehingga tentunya AC = 10^7 – y, dan

kecepatan dari $C=-dy/dt=y$

Akibatnya, $dy/y=-dt$ atau jika diintegrasikan didapatkan $\ln y=-t+c$. Untuk mencari nilai C, kita substitusikan t = 0 dan y = 10^7 , sehingga didapatkan C = ln 10^7 , akibatnya :

$$\ln y=-t+\ln 10^7$$

atau $t=\ln 10^7-\ln y$ (I)

Selanjutnya, kecepatan pada waktu P sampai ke titik F adalah :

$$dy/dt=10^7 ,$$

sehingga $x=10^7 t$ (II)

Dari bentuk semula, persamaan I, dan persamaan II, kita dapatkan :

$$x=Nap\log y=10^7 t=\left(\ln 10^7-\ln y\right)$$

atau $Nap\log y=10^7 \ln 10^7 =10^7 =10^7 \log_{1/e}\left(y\right)$ Nap log y = 10^7

Lebih lanjut lagi, dikembangkan pula melalui penggantian periode waktu yang ditempuh oleh titik A dan D yang tadi. Dengan menentukan bahwa y berkurang menurut barisan geometri jika x bertambah menurut barisan aritmetika. Kemudian diperoleh prinsip dasar dari logaritma tentang perkalian dan pembagian hubungannya dengan penambahan dan pengurangan. Misalkan sebagai contoh, dapat kita perhatikan hubungan berikut, yaitu jika a/b = c/d , maka:

Nap log a - Nap log b = Nap log c - Nap log d ,

Ini adalah salah satu penemuan yang tidak bisa dipungkiri berasal dari Napier.

Pada tahun 1614, Napier menerbitkan buku mengenai logaritma dalam suatu brosur yang berjudul *Mirifici logarithmorum canonis description* (Suatu Deskripsi Rumus Logaritma yang Indah). Buku ini memuat sebuah tabel logaritma sinus dari setiap sudut untuk urutan menit dan kebalikannya.

Deskripsi tersebut segera tersebar dengan sangat meluas dan mendapat perhatian yang luar biasa. Pada tahun berikutnya, seorang Profesor Geometri dari Gresham College di London yang bernama Henry Briggs (1561-1631) telah ikut serta mempublikasikannya, dan pada tahun berikutnya lagi Proffessor dari Oxford tersebut melakukan kunjungan kehormatan kepada John Napier sebagai penemu logaritma. Setelah kunjungan itu Napier dan Briggs sependapat, tabel tersebut akan lebih bermanfaat jika ditetapkan bahwa logaritma satu adalah nol dan logaritma 10 adalah pangkat dari sepuluh tetapi nilainya tetap.

Akhirnya terciptalah logaritma dengan basis 10 seperti yang banyak dipakai sekarang, dan dikenal dengan nama Briggsian atau Bersama-sama (common).

Pemakaian logaritma ini telah memberikan manfaat yang luar biasa dalam perkembangan matematika berikutnya. Selain logaritma dengan basis 10 telah pula dikembangkan daftar logaritma dengan sembarang dasar b yang akan lebih bermanfaat dalam melakukan perhitungan dalam basis b.

Selanjutnya Briggs mencurahkan perhatiannya untuk merencanakan menyusun tabel logaritma yang baru. Kemudian pada tahun 1624 ia menerbitkan Arithmetica Logarithmica. Tabel yang baru ini memuat sampai 14 tempat decimal untuk bilangan 1 sampai 20.000, dan 90.000 sampai 100.000. Kekosongan antara 20.000 sampai 90.000 terisi berkat bantuan Andriaen Vlacq (1600-1666), seorang penerbit dan penjual buku berkebangsaan Belanda.

Pada tahun 1620, seorang sahabat Briggs yang bernama Edmund Gunter (1581-1626) menerbitkan tabel logaritma untuk sinus dan tangens sampai tujuh tempat decimal sampai satuan menit. Gunter adalah orang pertama yang memperkenalkan istilah cosinus dan cotangent.

Briggs dan Vlacq telah menerbitkan empat buah dasar-dasar penyusunan tabel logaritma. Hasil yang lainnya sebagai pengganti daftar logaritma yang telah ada dikerjakan pada tahun 1924 dan 1949 yang diperluas menjadi 20 tempat decimal. Pekerjaan ini dilakukan di Inggris pada waktu peringatan 300 tahun diketemukannya logaritma.

Arti dari kata "logaritma" (logarithm) adalah "bilangan pembanding" (ratio number), dan dipergunakan untuk pertama kalinya oleh John Napier untuk menyatakan "bilangan buatan" (*artificial number*). Sedangkan perkataan "mantis" (mantissa) diterjemahkan oleh Briggs yang ditulis dalam buku berbahasa Latin yang berasal dari istilah "*Etruscan origin*" (Etruscan murni), dan pengertian dasarnya adalah "penambahan" (addition) atau "peningkatan bobot" (*make weight*), selanjutnya pada abad ke-17 dipakai istilah "lampiran" (appendix).

Istilah "karakteristik"(characteristic) juga disumbangkan oleh Briggs dan telah pula dipergunakan oleh Vlacq, tetapi pemakaiannya hanyalah sampai pada abad ke-18, dan untuk seterusnya yang lebih popular adalah istilah mantis.

Penemuan Napier yang luar biasa telah tersebar ke seluruh wilayah Eropa. Yang lebih menarik perhatian adalah pemakaiannya, terutama dalam bidang astronomi seperti yang dikemukakan oleh Napier: Dengan penemuan logaritma dapat memperpendek pekerjaan dan memperpanjang usia si astronom.

Bonaventura Cavalieri yang akan lebih banyak kita bicarakan dalam bab berikutnya (Bab XI), telah pula berbuat banyak untuk menjadikan logaritma sangat terkenal di Italia. Kegiatan mempublikasikan logaritma, telah pula dilakukan oleh Johann Kepler di Jerman dan Edmund Wingate di Perancis. Khusus mengenai Kepler akan dibicarakan secara panjang lebar dalam fasal yang akan datang. Sedangkan Wingate yang telah banyak menghabiskan waktunya di Perancis, telah banyak mempengaruhi para penulis buku aritmetika dasar berbahasa Inggris di abad ke-17.

Satu-satunya orang yang dianggap saingan Napier dalam hal penemuan logaritma adalah pembuat instrument dari Swiss yang bernama Jobst Burgi (1552-1632). Secara terpisah, Burgi telah membuat tabel logaritma dan mempublikasikannya pada tahun 1620, enam tahun setelah Napier mengumumkan penemuannya. Walaupun keduanya sudah menyusun prinsip-prinsip logaritma jauh sebelum dipublikasikan, namun secara umum diyakini, bahwa Napierlah orang pertama yang menemukan logaritma. Pendekatan yang dipakai oleh Napier secara geometri, sedangkan pendekatan yang dipakai oleh Burgi secara aljabar.

Pada saat sekarang, secara umum logaritma dianggap sebagai perpangkatan. Jadi, andaikan $n = b^x$, maka kita katakan bahwa x adalah logaritma dari n dengan dasar b. dari definisi di atas, hukum logaritma secara langsung mengikuti hukum perpangkatan. Namun suatu paradoks dalam sejarah matematika, kenyataan bahwa logaritma diketemukan jauh sebelum perpangkatan digunakan.

9-3. Jabatan Guru Besar Savilian dan Lucasian

Sejak dikenalnya para ahli matematika dari Inggris, maka telah pula dikenal para ahli bidang lainnya termasuk pemberian gelar dan jabatan tertentu terhadap mereka itu. Diantaranya jabatan <u>Savilian,</u> yaitu jabatan guru besar di Oxford dan jabatan guru besar di Cambridge dikenal dengan sebutan <u>Lucasian.</u>

Tuan Henry Saville seorang pengawas di Sekolah Tinggi Merton di Oxford, pembantu pimpinan Eton, dan menjadi dosen di Euclid Oxford. Pada tahun 1619, ia memperoleh dua kehormatan guru besar, yaitu sebagai professor dalam bidang geometri dan satu lagi dalam bidang astronomi.

Henry Briggs adalah orang pertama yang menduduki kursi Savilian dalam bidang geometri di Oxford. Tetapi orang pertama yang memperoleh kehormatan professor matematika dalam bidang geometri adalah Tuan Thomas Gresham pada tahun 1596 di Sekolah Tinggi Gresham London. Selain dari Briggs, adalah John Wallis, Edmund Halley, dan Tuan Christopher Wren yang semuanya memegang jabatan Savilian pada abad ke-17.

Henry Lucas adalah orang yang mewakili Cambridge di parlemen pada tahun 1639/1640. Sedangkan orang pertama yang terpilih menduduki kursi Lucasian di Cambridge adalah Isaac Barrow (1664). Isaac Barrow adalah menduduki jabatan tersebut selama sembilan tahun, dan selanjutnya digantikan oleh Isaac Newton.

9-4. Harriot dan Oughtred

Thomas Harriot (1560-1621), seorang matematikawan yang hidupnya lebih lama pada abad ke-16, tetapi baru menunjukkan hasil karyanya pada abad ke-17. Ia tertarik secara khusus dengan dunia baru, yaitu Amerika, sebab pada tahun 1585 ia pernah dikirim oleh Tuan Water Raleigh ke Dunia Baru untuk melakukan survey dalam rangka pembuatan peta daerah tersebut. Daerah penemuannya disebut Virginia yang sekarang disebut New Carolina.

Sebagai seorang matematikawan, Harriot telah mendirikan <u>Sekolah Aljabar Berbahasa Inggris</u> (English School Algebraists). Ia telah bekerja keras dalam rangka menulis buku <u>Artis analyticae praxis</u> dalam tahun 1631. karyanya ini tidak pernah dipublikasikan selama ia masih hidup, tetapi setelah sepuluh tahun ia meninggal baru dipublikasikan. Sebagian besar isinya memuat teori persamaan, seperti mencari akar-akar persamaan, membentuk persamaan akar-akar yang diketahui, hubungan antara akar dengan koefisien persamaan, penambahan akar yang berhubungan dengan beberapa relasi khusus terhadap akar persamaan semula, dan berbagai penyelesaian persamaan. Banyak materi yang termuat dalam buku tersebut yang diperoleh pula dalam buku Vieta, tetapi Harriot membuatnya lebih lengkap dan memakai system penyelesaian yang lebih baik.

Harriot telah pula mengikuti jejak Vieta dalam penggunaan vocal untuk menggantikan bilangan-bilangan yang tidak diketahui dan konsonan dipakai untuk bilangan-bilangan yang ditetapkan. Harriot telah menyempurnakan penulisan pangkat, misalnya menggantikan aa menjadi a^2, aaa menjadi a^3, dan seterusnya. Dia pula sebagai orang pertama yang menggunakan notasi “>” dan ”<” untuk menyatakan “lebih besar dari” dan “lebih kecil dari”, tetapi pada waktu itu symbol-simbol tersebut tidak segera diterima oleh para penulis lainnya.

Harriot telah melakukan sedikit kekeliruan dengan pendapat-pendapat yang lainnya yang berhubungan dengan matematika, namun demikian ia tetap dihormati sebagai orang yang mempunyai keahlian dalam bidang geometri analitik (sebelum penerbitan Descartes tahun 1637). Menurut laporan diantaranya ia berpendapat bahwa banyaknya akar suatu polinom pangkat n ada sebanyak n, dan pendapat ini telah diperbaiki dengan adanya penambahan syarat-syarat tertentu oleh para penulis lainnya. Ada sebanyak delapan volume tulisan Harriot yang dilindungi di museum Inggris, dan sebagian besar membahas masalah geometri analitik. Dalam karyanya ini terlihat adanya beberapa penyisipan dari para penulis lainnya, dan pernah diperlihatkan oleh D.E. Smith.

Harriot dikenal pula sebagai seorang astronom. Ia telah menemukan adanya bintik-bintik pada permukaan matahari, dan pernah pula melakukan penelitian mengenai satelit Jupiter yang juga diteliti oleh Galileo pada waktu yng bersamaan.

Pada waktu yang bersamaan dengan meninggalnya Harriot, yaitu pada tahun 1631, pekerjaan Harriot tentang Aljabar dimunculkan oleh William Oughtred. Edisi pertama dari tulisan Oughtred dikenal dengan nama Clavis mathematicae, adalah sebuah pekerjaan dalam aritmetika dan aljabar yang dikembangkan ke arah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan matematika.

William Oughtred (1574-1660) adalah orang yang paling berpengaruh diantara penulis-penulis matematika Inggris pada abad ke-17, meskipun profesinya sebagai seorang mentri yang berhubungan dengan keuskupan (Episcopal minister), namun ia masih sempat memberikan pelajaran matematika dengan cuma-cuma kepada para muridnya yang berminat. Diantara muridnya yang kemudian menjadi terkenal adalah John Wallis, Christopher Wren dan Seth Ward yang berturut-turut menjadi akhli dalam bidang matematika, arsitek, dan astronomi.

Di dalam tulisannya, Oughtred menitikberatkan, pada pemakaian symbol-simbol matematika. Ia telah mempublikasikan lebih dari 152 simbol, dan hanya ada tiga symbol yang tidak mendapat kedudukan pada saat itu. Diantaranya symbol silang (X) untuk perkalian, titik empat (::) digunakan dalam perbandingan, dan symbol untuk perbedaan (~).

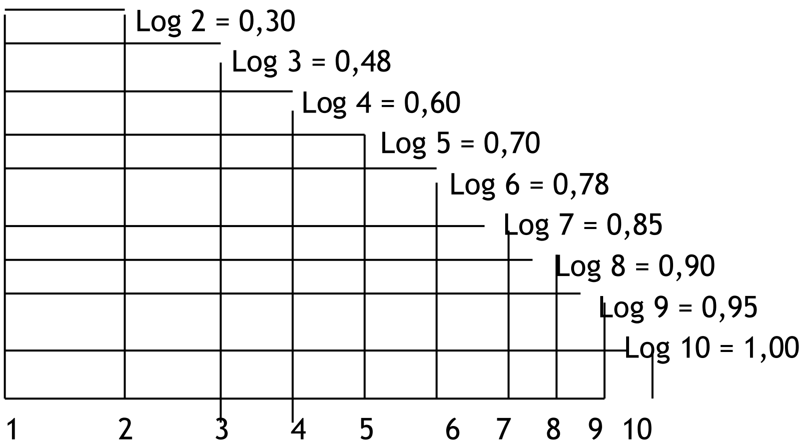
Tanda kali (X) sebagai symbol perkalian seperti halnya diusulkan oleh Leibniz tidak dengan mudah disetujui pemakaiannya, karena symbol tersebut mirip sekali dengan huruf x. sedangkan pada saat itu symbol untuk perkalian yang digunakan oleh Harriot, yaitu dengan notasi titik(.). Namun symbol inipun tidaklah digunakan secara menonjol. Symbol titik ini baru dipakai secara meluas setelah Leibniz menyetujuinya. Leibniz, juga menggunakan symbol (∩) untuk perkalian yang dipakai dalam teori himpunan.

Symbol untuk pembagian Anglo-Amerika (:) yang ditemukan pada abad ke-17, dan muncul untuk pertama kalinya pada tahun 1659 dalam aljabar yang ditulis oleh Swiss Johann Heinrich Rahn (1622-1676). Symbol tersebut baru dikenal di Eropa setelah tulisan ini diterjemahkan ke dalam bahasa Inggris. Sebenarnya symbol pembagian seperti ini telah lama dipergunakan di Eropa, tetapi untuk maksud pengurangan bukan untuk pembagian.

Adapun tanda yang sudah kita kenal dalam geometri, yaitu symbol (~) yang dipakai untuk menyatakan "mendekati", pada mulanya dipakai oleh Oughtred untuk menyatakan "perbedaan". Symbol (~) untuk menyatakan "mendekati", dan symbol ($\approx$) untuk menyatakan "kongruen" ditentukan oleh Leibniz.

Selain dari Clavis mathematicae Oughtred telah pula mempublikasikan The Circles of Proportion (1632) dan Trigonometrie (1657). Karyanya mengenai trigonometri ini sangatlah penting sebagai usaha-usaha untuk memperkenalkan nama-nama fungsi trigonometri. Cara kerja yang ditempuh oleh Oughtred, yaitu dengan membuat surat edaran tentang aturan-aturan penulisan, kemudian disebarkannya. Sebenarnya Oughtred tidaklah sendirian dalam membuat aturan-aturan penulisan itu, tetapi ia bersama-sama dengan muridnya yang bernama Richard Delamain.

Pada tahun 1622, Oughtred telah mengumumkan aturan penulisan logaritma. Namun pada tahun 1620, Gunter telah membuat susunan skala logaritma, yaitu pemakaian garis dengan bilangan-bilangan yang jaraknya terbagi-bagi ke dalam logaritma-logaritma dari bilangan-bilangan yang ditunjukkan. Dengan cara mekanik dapat dilakukan perkalian dan pembagian



dengan jalan penambahan dan pengurangan skala segmen tersebut. Ide lainnya untuk melakukan penambahan dan pengurangan, dapat dilakukan dengan membuat dua buah skala logaritma yang serupa, dengan yang satu bergerak pada yang lainnya, seperti yang ditunjukkan pada gambar 9.4 yang dibuat oleh Oughtred.

Meskipun Oughtred telah menemukan aturan pergeseran yang sederhana pada tahun 1622, namun ia tidak membahasnya dalam bentuk buku hingga tahun 1632. suatu aturan pergeseran yang serupa telah pula diperkenalkan oleh Isaac Newton pada tahun 1675, tetapi tidak disusun dalam bentuk buku pula.

Skala log log untuk aturan pergeseran ditemukan pada tahun 1815, dan pada tahun 1850 Armedee Mennheim (1831-1906) seorang pegawai militer di Perancis telah membuat aturan pergeseran standar yang modern. Namun dia tetap meyakini, bahwa Oughtred adalah seorang pengarang besar yang sejak tahun 1618 bukunya telah diterbitkan oleh Edward Wright yang membahas penjelasan tulisan Napier. Dalam tulisan ini pertama kali muncul tanda kali (X) untuk menyatakan perkalian, dan penemuan bilangan pokok dalam perhitungan logaritma serta tabel logaritma yang pertama.

Oughtred telah pula menulis masalah “pengukuran” (Gauging, ilmu perhitungan kapasitas), dan ia telah pula menterjemahkan serta mengedit suatu rekreasi matematika dari bahasa Inggris ke bahasa Perancis.

9-5. **Gaileo Galilei**

Pada abad ke-17, ada dua orang astronom terkenal yang secara khusus telah membantu perkembangan dalam matematika. Mereka itu, yaitu Galileo Galilei yang berkebangsaan Italia dan Johanes Kepler berkebangsaan Jerman.

Galileo galilei (1564-1642), adalah seorang putera bangsawan Florentine yang lahir di Pisa pada tahun 1564, dan ia telah berusaha untuk memiskinkan dirinya. Setelah ia mulai menjadi pelajar dalam bidang kimia, ia permisi kepada kedua orang tuanya untuk mencurahkan perhatiannya kepada bidang matematika, yaitu bidang yang disenangi secara bakat alami.

Ketika ia melanjutkan studinya di Universitas Pisa, disana Galileo melakukan pengamatan yang bersejarah terhadap lampu gantung yang besar yang terdapat di gereja keuskupan. Ia telah melakukan observasi terhadap lampu gantung yang bergoyang-goyang perlahan-lahan. Ia mengambil waktu ayunan lampu itu dengan menggunakan detakan jantungnya sebagai pengukur waktu, karena pada waktu itu belum ada alat pengukur waktu (jam) yang teliti. Suatu hal yang mengherankan dia, bahwa walaupun ayunan itu semakin perlahan-lahan namun waktu ayunnya adalah sama. Hal ini sekarang sudah umum diketahui orang, dan telah dijadikan dasar dalam pembuatan jam bandul.

Ketika berusia 25 tahun, Galileo diangkat menjadi seorang guru besar matematika di Universitas Pisa. Pada saat pengangkatan sebagai guru besar, ia mengatakan telah melakukan eksperimen pada menara Pisa yang miring, bahwa benda yang lebih berat tidak akan jatuh dibandingkan dengan benda yang lebih ringan. Hal ini adalah bertentangan dengan penegasan yang diberikan oleh Aristoteles, bahwa benda jatuh kecepatannya berbanding lurus dengan beratnya. Pernyataan Aristoteles ini telah dianut lebih dari 2000 tahun.

Pada suatu hari di tahun 1591, Galileo naik ke menara Pisa dengan membawa benda yang satu beratnya 10 pon dan yang satu lagi beratnya 1 pon. Kedua benda itu dijatuhkan bersama-samadari atas menara yang tinggi itu. Ternyata kedua benda tersebut tiba di atas permukaan tanah secara bersama walaupun dilakukan secara berulang-ulang. Hal ini sungguh merupakan lonceng kematian ajaran Aristoteles. Akhirnya Galileo mendapat kesimpulan, bahwa jarak jatuh benda tersebut adalah kuadrat dari waktu jatuhnya, sehingga mendekati rumus $S = ½ gt^2$.

Namun disebabkan adanya perbedaan pendapat pada lingkungannya, Galileo meletakkan jabatan pada tahun 1591, kemudian ia diteriama menjadi guru besar di Universitas Padua. Disini ia lebih senang melakukan pengajaran dan penelitiannya, sehingga ia menjadi orang yang termasyur.

Di Padua pada tahun 1607, Galileo menguraikan penemuannya tentang teleskop yang dibantu oleh seorang pengasah Lensa, berkebangsaan Belanda yang bernama Johann Lippersheim. Teleskop karya Galileo ini telah memiliki daya pembesar yang yang lebih besar dari 30 kali diameter lensanya. Dengan teleskop ini, Galileo meneliti tentang adanya bintik-bintik hitam pada permukaan matahari, adanya gunung-gunung pada permukaan bulan, garis edar saturnus, venus dan empat buah satelit penerang Jupiter.

Pendapat Galileo mengenai adanya bintik-bintik hitam pada permukaan matahari, sangatlah bertentangan dengan Aristoteles yang mengatakan bahwa matahari tidaklah berdebu. Pendapat Galileo ini mendapat tantangan dari kaum gereja dan para pengikut Aristoteles. Akhirnya pada tahun 1633, tiga tahun setelah penerbitan bukunya mengenai Solar System yang mendukung teorema Copernicus, Galileo dipanggil untuk memberikan penjelasan pendapatnya. Dia dipaksa untuk menarik kembali penemuan ilmiahnya, dan ia dicap sebagai orang durhaka yang perlu untuk dikutuk. Setelah beberapa tahun ia bersembunyi, akhirnya Galileo meninggal dunia pada tahun 1642.

Galileo telah kita terima sebagai pendorong ilmu pengetahuan modern dalam teori maupun praktek. Dengan teori benda jatuhnya, ia telah meletakkan dasar yang kuat yang dipakai oleh Isaac Newton untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Dialah orang pertama yang mengemukakan hukum tumbukan suatu benda pada ruang hampa udara. Dia penemu mikroskop modern yang pertama yang sangat popular dalam masalah tersebut. Yang menarik perhatian, bahwa Galileo telah mengerti dengan ide-ide tentang masalah tak berhingga. Hal inilah yang memberikan dasar dalam teori himpunan yang dikembangkan oleh Cantor pada abad ke 19 yang sudah dipengaruhi oleh analisis modern.

Laporan-laporan di atas serta luasnya saran atau ide dinamis yang diberikan oleh Galileo, dapat kita peroleh dalam Liscorsi e dimostrazionimatematiche intorno a duenuove scienze yang dipublikasikan di Leyden pada tahun 1638. dalam buku ini terlihat bahwa Galileo merasa cemburu terhadap kepopuleran Johann Kepler pada saat itu, dan walaupun Kepler telah mengumumkan tiga hukumnya yang penting tentang pergerakan planet tahun 1619, namun hukum tersebut sama sekali diabaikan oleh Galileo.

9.6 **Johann Kepler**

Johann Kepler (1571-1630), dilahirkan di dekat Stutgart dalam tahun 1571. Ia mendapat pendidikan di Universitas di Tubingen dengan tujuan ingin menjadi seorang mentri. Namun pada kenyataannya ia lebih tertarik untuk mendalami matematika dan astronomi, dan pada tahun 1594, ia diterima sebagai seorang mahasiswa di Universits Gratz Austria. Pada tahun 1599, ia menjadi seorang asisten yang terkenal, dan telah terjadi perbedaan pendapat dengan beberapa ahli astronomi seperti Danish-Swedish dan Tycho Brache.

Tycho Brache (1546-1601), seorang astronom dan pengamat yang cermat tetapi bukan matematikawan. Dilain pihak, Johann Kepler bukanlah seorang pengamat tetapi seorang matematikawan dan pemimpin yang besar. Kepadanya Tycho Brace mempercayakan catatan-catatan hasil pengamatannya untuk kemudian diolah oleh Kepler, sehingga menghasilkan rumus-rumus astronomi yang luar biasa.

Sumbangan tycho Brache untuk pengembangan astronomi modern adalah hasil pengamatan tentang langit yang teliti dan sabar yang berlangsung selama 20 tahun. Tycho hidup sebagai seorang pangeran yang dibuang di pulau lepas pantai Denmark. Ia bekerja tanpa menggunakan daya khayal yang luar biasa, kecuali ketekunan dan ketelitian yang luar biasa. Pada waktu itu teleskop belum diketemukan dan ia bekerja dengan mempergunakan matanya, kemudian membuat suatu kuadran untuk mengukur sudut elevasi yang dipasang pada tiang yang dapat berputar mengikuti kedudukan bintang-bintang di langit. Hasil pencatatannya merupakan angka-angka yang seolah-olah tidak beraturan.

Tycho Brache dan Johann Kepler berturut-turut menjabat sebagai astronom dan matematikawan dari kerajaan Kaisar Rudolph di Praha. Tidak lama setelah itu, yaitu pada tahun 1601, brache tiba-tiba meninggal dunia dan Kepler mewarisi semua catatan hasil pengamatan Brache yang telah dilakukan secara cermat.

Dengan ketabahan yang luar biasa dan bekerja dengan perhitungan yang matang untuk memecahkan dan mencari hubungan angka yang satu dengan yang lainnya. Kepler mencoba mencari hubungan antara jarak planet-planet dengan matahari dan dengan waktu beredarnya mengelilingi matahari, apakah ada kesamaan untuk semua planet?. Namun apa yang ia temukan ternyata tidaklah demikian, tetapi ia tidaklah cepat untuk berputus asa dalam menghadapi kegagalan. Kemudian ia mencari lagi hubungan, apakah kuadrat dan jarak mempunyai nilai perbandingan yang sama untuk semua planet? Dan seterusnya.

Akhirnya setelah menyelidiki planet Mars pada berbagai waktu sepanjang tahun, ia menemukan berbagai kenyataan bahwa " jika ditarik garis khayal dari mata hari ke Mars, garis ini akan menutupi areal yang sama dalam waktu yang sama". Hal ini sungguh menggembirakan hatinya, karena ia telah menemukan hubungan yang sederhana yang telah dicari dan diteliti selama bertahun-tahun.

Kemudian Kepler mulai memikirkan pula, bagaimana bentuk lintasan-lintasan planet yang ditempuh pada waktu beredar mengelilingi matahari? Angka-angka dari Brache menunjukkan secara mudah bahwa jarak dari Mars ke matahari tidaklah selalu sama. Dari sini dapatlah ia simpulkan bahwa garis edar itu bukanlah berbentuk lingkaran. Kesimpulan ini amat mengganggunya, masa alam raya ini begitu keadaannya? Akhirnya setelah dilakukan coba-coba, ia bertemu dengan suatu gugusan pada bentuk ellips sebagai orbit dan matahari sebagai fokusnya. Namun ia masih mempertimbangkan kembali tentang "orbit dari planet-planet yang berbentuk ellips tidak berbentuk lingkaran seperti yang telah dipercayai orang banyak, selama berabad-abad lamanya".

Namun Kepler tetap melanjutkan penelitiannya dengan mencari hubungan antara jarak planet dengan waktu mengelilingi matahari, yang disebut waktu edar. Akibatnya, setelah mengalami berbagai kegagalan, ia dapatkan pula kesimpulan bahwa "untuk semua planet, kuadrat waktu sebanding dengan pangkat tiga jarak rata-rata dari matahari".

Akhirnya, setelah selama 10 tahun mengadakan penelitian, tepatnya pada tahun 1619 lahirlah Hukum Kepler. Hukum ini merupakan hukum pergerakan planet yang merupakan kejadian yang amat penting dalam sejarah astronomi dan matematika. Ketiga hukum ilmiah Kepler dapat dirumuskan seperti berikut:

I. Semua planet bergerak di sekitar matahari dalam lintasannya (orbitnnya) yang berbentuk ellips, dan matahari berada dalam salah satu fokusnya.
II. Garis yang menghubungkan planet dengan matahari (jari-jari vector = radius vektor) menempuh areal yang sama dalam waktu yang sama.
III. Untuk semua planet, kuadrat waktu revolusi (satu putar penuh).
lintasan planet mengelilingi matahari) sebanding dengan pangkat tiga jarak rata-rata dari matahari.

Penemuan empiris yang disebut hukum ilmiah yang diolah dari data yang ditinggalkan Brache, merupakan pekerjaan yang sangat luar biasa yang pernah ada dalam ilmu pengetahuan. Penemuan Kepler pada awal abad ke-17 ini, adalah abad dimana orang masih memenggal kepala sesama manusia atas nama agama. Penemuan ini telah membuka jalan bagi penemuan yang baru seperti kita lalui sekarang. Kepler adalah seorang pelopor dan perintis jalan ke arah Kalkulus. Untuk keperluan menghitung luas daerah yang rumit dalam hukumnnya yang kedua, Kepler telah melalui jalan Kalkulus integral yang sederhana. Demikian pula dalam Stereometria doliorum vinorum, telah diuraikan mengenai penggunaan integral yang sederhana untuk menemukan volume 93 benda padat.

Para matematikawan sependapat, bahwa Keplerlah orang yang telah membahas masalah bidang banyak beratuan (polyhedra), dan memperkenalkan istilah kerucut dalam geometri untuk irisan kerucut. Kepler telah memberikan rumus pendekatan untuk menghitung keliling sebuah ellips dengan setengah sumbu panjang dan setengah sumbu pendek a dan b , rumusnya π (a + b).

Kepler telah pula menetapkan postulat khusus, bahwa sebuah bidang dibentuk dari sejumlah tak terbatas garis dan titik. Juga dijelaskan bahwa sebuah garis dapat dianggap sebagai hal yang tidak terbatas, sehingga dua buah garis sejajar harus dianggap berpotongan pada tempat yang tidak berhingga. Demikian pula dengan parabola dan hiperbola telah dianggap sebagai hal yang terbatas, karena salah satu fokusnya telah dipindahkan ke tempat yang tidak terhingga. Konsep ini telah diperluas pada tahun 1822 oleh seorang ahli geometri Perancis yang bernama Poncelet.

Hasil karya Kepler sering merupakan campuran mistik, spekulasi, dan khayalan tinggi yang digabungkan dengan kebenaran ilmu pengetahuan namun memang kadang-kadang jalan ke arah kebenaran itu banyak melalui kesalahan. Kepler hidup dalam kesedihan yang berkepanjangan, disebabkan berbagai kemalangan yang menimpa dirinya. Anak yang disayanginya meninggal Karena penyakit cacar, istrinya meninggal karena penyakit ingatan, ibunya terserang ilmu hitam, dan ia sendiri dituduh sebagai orang yang menyimpang dari agamanya, demikian pula dengan gaji tahunannya yang selalu terlambat dibayarnya.

9-7. Desargues

Pada tahun 1639, sembilan tahun setelah meninggalnya Kepler, di Paris muncul sebuah risalah yang benar-benar asli tentang irisan kerucut, namun pada saat itu kurang mendapat perhatian. Risalah itu ternyata ditulis oleh Gerard Desargues (1593-1662), seorang insinyur, arsitek, dan pernah menjadi perwira angkatan bersenjata Peracis. Ia lahir di Lyons tahun 1593 dan meninggal di kota yang sama tahun 1662.

Hasil karya Desargues, pada umumnya diabaikan oleh para matematikawan lainnya. Namun dua abad kemudian, ketika ahli geometri Perancis Michel Chasles (1793-1880) menulis sejarah geometri, ternyata karya Desargues itu tidak ternilai harganya. Enam tahun kemudian, yaitu tepatnya tahun 1845 Chasles menulis sebuah salinan naskah dari risalah yang dibuat oleh murid Desargues, yaitu Phillippe de la Hire (1640-1718). Sejak itulah karya Desargues telah diperhatikan sebagai sesuatu yang klasik dalam pengembangan awal dari geometri proyektif sintetik.

Ada beberapa alasan yang menerangkan permulaan diabaikannya laporan yang diberikan oleh Desargues. Alasan yang paling pokok, karena adanya geometri analitik yang diperkenalkan secara supel oleh Descartes dalam jangka waktu dua tahun lebih awal. Juga pada umumnya para ahli geometri telah memperluas usaha-usahanya untuk mengembangkan kemampuan barunya, yaitu mencoba untuk menggunakan integral dan deferensial ke dalam geometri.

Desargues adalah orang yang bernasib sial, yang disebabkan oleh gaya penulisan dan penyampaiannya yang cukup aneh. Dalam penulisannya, Ia telah memperkenalkan 70 istilah baru untuk geometri dengan beberapa istilah yang sukar dimengerti. Ada istilah-istilah yang diambil dari nama tumbuh-tumbuhan. Satu diantaranya yang sampai saat ini dipertahankan adalah istilah *"involution"*. Istilah ini diberikan oleh Desargues, dan ternyata beasal dari bahasa daerahnya. Penggunaan istilah ini telah menimbulkan berbagai kritik yang tajam, ejekan-ejekan, dan adanya usaha-usaha untuk menggantikannya.

Di samping menulis masalah irisan kerucut, Desargues menulis pula sebuah risalah yang mengajarkan kepada anak-anak untuk menyanyi dengan baik. Namun buku kecil tentang irisan kerucutlah sumbangan Desargues yang sangat asli terhadap perkembangan geometri sintetik dalam abad ke-17.

Dimulai dengan ajaran yang diberikan oleh Kepler, kemudian dikebangkan bersama-sama dengan teorema involution Desargues akhirnya menghasilkan topik-topik seperti jarak harmonis, involusi, nomologis, kutub dan perspektif. Topik-topik ini sekarang dikenal dalam geometri proyektif.

Yang cukup menarik adalah hal yang berhubungan dengan polesan polar (kutub), yang dapat diperluas kepada bola dan permukaan lain dari persamaan derajat dua. Namun apa yang diketahui oleh Desargues tentang permukaan derajat dua adalah sedikit sekali, dan masalah ini baru diperkenalkan secara lengkap oleh Euler pada tahun 1748.

Dalam bagian lain, kita menemukan pula teorema dasar tentang dua segitiga yang diberikan oleh Desargues. Secara lengkapnya teorema Desargues ini berbunyi:
" Jika dua buah segitiga yang terletak pada suatu bidang, dengan sisi-sisinya yang berkoresponden berpotongan di titik-titik pada sebuah garis, maka garis-garis hubung titik-titik sudut yang berkoresponden berpotongan di satu titik (titik 0), dan sebaliknya" yang dimaksud dengan dua buah segitiga adalah segitiga $A_1B_1C_1$ dan $A_2B_2C_2$. Adapun sisi-sisi yang berkorespondennya adalah:

A_1B_1 dan A_2B_2 berpotongan di titik L
A_1C_1 dan A_2C_2 berpotongan di titik M
B_1C_1 dan B_2C_2 berpotongan di titik N.

Titik-titik L, M, dan N terleta pada sebuh garis, dalam hal ini, adalah garis a.

Banyak karya-karya Desargues yang dihargai baik oleh Descartes maupun oleh Blaise Pascal. Mereka memuji dan mengakui karya-karya Desargues sebagai sumber inspirasi yang tak ternilai harganya untuk karya-karya mereka.

Selain dari Descartes dan Pascal, telah banyak pula para ahli matematika berikutnya yang mengembangkan teori-teori geometri karya Deargues. Diantara tokoh-tokoh matematika yang telah tertarik pada karya Desargues sehingga mereka mempunyai karya-karya yang besar dan modern adalah Gergonne, Poncelet, Dupin, Brianchon, dan Steiner.

9-8. Perkembangan Geometri Proyektif

Istilah "pole" yang digunakan dalam pengertian geoletri proyektif, untuk pertama kalinya diperkenalkan pada tahun 1810 oleh seorang sarjana matematika Perancis yang bernama Sevois. Namun tiga tahun kemudian, istilah pole dikaitkan dengan istilah "polar" oleh Gergonne. Selanjutnya gagasan tentang "Pole" dan "polar" dikembangkan lebih terperinci lagi oleh Gergonne dan Poncelet dalam suatu metode yang teratur, namun masih di luar prinsip-prinsip dualitas (principle of duality) sebagai akibat pesatnya perkembangan dalam geometri proyektif. Selanjutnya pada tahun 1847, Staudt telah pula mengembangkan geoletri proyektif yang terlepas dari item perhitungan satuan dasar.

Kira-kira tahun 1872, Felix Klein mengumumkan karyanya Erlanger Program untuk geometri. Namun nampaknya terlalu sederhana, karena menuntut geometri ini untuk melakukan penelitian yang didasarkan pada sifat-sifat bangun geometri yang tidak mengalami perubahan kalau dilakukan suatu grup transformasi. Sedangkan yang dimaksud grup transformasi dalam geometri bidang (Euclid), adalah jumlah sluruh rotasi dan translasi suatu bangun geometri dalam bidang. Karena itu dalam Geometri Euclid, masalah luas daerah dan panjang segmen garis adalah tetap invariant bilamana dilakukan grup transformasi seperti itu. Demikian pula dengan sebuah lingkaran akan tetap merupakan lingkaran, dan titik tengah sebuah segmen garis tetap merupakan titik tengah segmen garis, jika kita lakukan beberapa transformasi seperti tadi. Lingkaran dan titik tengah segmen garis termuat pula pada salah satu bagian geometri Euclid.

Selanjutnya, dalam geometri proyektif bidang dipelajari sifat-sifat bangun geometri yang tetap invariant (istilah yang dipakai dalam geometri proyektif). Bilamana dilakukan grup transformasi proyektif, yaitu transformasi-transformasi proyeksi pusat. Maksudnya, sebuah bangun geometri bidang yang terletak pada sebuh bidang datar dapat diproyeksikan dari suatu titik diluar bidang tersebut tehadap bidang lain yang tidak melalui pusat proyeksi yang terpilih. Berdasarkan ini sebagai contoh suatu lingkaran dapat diproyeksikan menjadi ellips sedangkan luas suatu daerah dan panjang suatu segmen garis akan tetap tidak berubah terhadap transformasi seperti itu, karenanya tidak diangkat menjadi materi dalam geometri proyektif. Demikian pula dengan masalah lingkaran dan titik tengah segmen, bukanlah konsep-konsep geometri proyektif. Namun dapat diperlihatkan bahwa titik-titik yang kolinear (collinear) jika ditranspormasikan akan menjadi titik-titik yang kolinear pula, dan garis-garis yang konkuran (concurren) di bawah transformasi menjadi garis-garis yang konkuren pula. Kekolinearan titik-titik dan kekonkurenan garis-garis merupakan permasalahn dalam geometri proyektif.

Dalam pasal sebelumnya, Papus telah menyadari berlakunya invariasi (invariance) dari cros ratio (an harmonic ratio, yaitu suatu istilah dalam geometri proyektif untuk menyatakan suatu harga dari perbandingan bagian sinar-sinar garis tertentu dalam proyeksi) di bawah proyeksi. Sedangkan sintesa dari geometri Klein, tetap terpakai dalam wilayah aplikasinya, serta banyak pula geometri-geometri lainnya yang dapat di dekati dengan cara ini. Namun setelah adanya perkembangan teori relatifitas pada tahun 1916, banyak materi-materi dalam geometri yang terlihat semakin tidak cocok dalam menetapkan teorema dan titik pandangan barunya untuk menghadapi masalah-masalah geometri yang semakin berkembang. Semakin lama, geometri semakin berkembang berdasarkan ide-ide ruang abstrak dengan struktur yang berlapis-lapis ke atas, dan beberapa diantaranya menyangkut grup transformasi (transformation group).

9-9. **Blaise Pascal**

Salah seorang matematikawan yang sejaman dengan Desargaus yang telah memperlihatkan apresiasi nyata dalam karyanya, adalah Blaise Pascal (1625-1662). Ia seorang matematikawan yang mempunyai kecakapan yang luar biasa. Pascal dilahirkan di propinsi Auvergue Perancis pada tahun 1623. Dalam usia yang sangat muda, ia telah memperlihatkan kemampuannya dalam melihat fenomena-fenomena matematika. Pada usia 12 tahun, tanpa bantuan orang lain ia telah menyelidiki beberapa teorema geometri elememter. Pada usia 14 tahun, ia telah menjadi anggota perkumpulan matematikawan Perancis yang merupakan cikal bakal berdirinya Akademi Perancis pada tahun 1666. Ketika ia berusia 16 tahun telah menemukan beberapa teori baru dalam masalah geometri proyektif, yaitu teorema-teorema yang berhubungan dengan kurva. Dua sampai tiga tahun berikutnya, ia telah menemukan mesin hitung yang pertama. Mulai saat itu, untuk setiap tahunnya Pascal memberikan sumbangan aplikasi matematika untuk mekanika dan fisika. Dan beberapa tahun kemudian, tepatnya pada tahun 1648, ia telah menulis secara lengkap masalah irisan kerucut.

Aktivitas yang mengagumkan dan mengherankan ini muncul secara tiba-tiba sampai akhir tahun 1650, yaitu pada saat-saat kesehatannya mulai menurun. Akhirnya Pascal memutuskan untuk meninggalkan penelitiannya dalam bidang matematika dan ilmu pengetahuan, dan ia lebih mendekatkan dirinya pada masalah keagamaan. Namun, ia hanya bertahan selama tiga tahun dalam mendalami keagamaan, dan akhirnya ia kembali lagi pada bidang matematika. Pada saat itu ia menulis tentang segitiga aritmetika, yaitu," *Traitedu triangle aritmetiqque*", dan membantu Permat dalam meletakkan dasar-dasar teori probabolitas matematika, serta telah pula melakukan beberapa percobaan yang berhubungan dengan masalah tekanan.

Keterlambatannya untuk kembali lagi pada bidang matematika tahun 1654, diterima oleh dia sebagai suatu isyarat yang kuat bahwa aktivitas pemunculannya kembali ini bukanlah untuk menyenangkan Tuhan. Namun demikian, ia masih tetap medapat petunjuk-petunjuk dari Tuhan dalam mengembangkan berbagai teori matematika lainnya. Diantaranya, ketia ia sedang menderita penyakit gigi timbulah ide-idenya mengenai geometri dan pada saat itu pula sakit giginya menjadi sembuh. Hal ini ia anggap sebagai suatu keajaiban dari Tuhan, dan dengan ketekunannya, salama delapan hari ia mengembangkan ide-ide mengenai kurva-kurva yang melingkar serta munculah berbagai masalah yang kemudian diberikan sebagai tantangan bagi para ahli matematika yang lainnya.

Petunjuk Tuhan berikutnya telah pula ia peroleh ketika sedanng mengendarai kuda dengan penuh semangat dan sesampainya dijembatan Nuilly ia berhenti kemudian menyandarkan badannya pada tiang jembatan. Kemudian berdasarkan pengakuannya, ia telah menulis pada sepotong kertas tentang keinginan dirinya untuk patuh dan lebih mendekatkan diri pada ajaran agama.

Pascal meninggal di Paris pada tahun 1662 pada usia39 tahun. Perlu pula diketahui, bahwa ayahnya Pascal yang bernama Etienne Pascal (1588-1640), juga orang yang mempunyai keahlian dalam bidang matematika. Limacon of Pascal diperuntukan oleh Pascal bagi ayahnya.

Pascal termasuk salah seorang matematikawan besar yang tercatat dalam sejarah matematika. Sumbangan-sumbangan pemikirannya telah diberikan hampir setiap tahun, sehingga ia telah berperan serta dalam membangun dunia ilmu pengetahuan kearah yang lebih baik. Namun karena kesehatannya banyak mengalami gangguan, sehingga jiwanya banyak dibebani oleh siksaan-siksaan mental keagamaan.

Tulisan Pascal perihal irisan kerucut diketemukan pada cara kerjanya Desargues dan sekarang telah hilang, tetapi tulisan ini pernah dilihat oleh Descartes dan Leibniz. Pada mulanya, Descartes tidak percaya bahwa tulisan itu dimuat oleh anak kecil, dan Descartes

mempunyai anggapan bahwa tulisan itu dibuat oleh ayahnya. Pascal telah menemukan kejadian yang luar biasa mengenai Mystic hexagram, yaitu teorema tentang geometri proyektif yang berbunyi sebagai berikut:
"Bila suatu segienam (hexagon) terbentuk dalam suatu kerucut, maka titik-titik potong dari tiga pasang yang berhadapannya akan terletak pada satu garis (collinear), demikian pula sebaliknya".

Pascal telah membuat teorema yang sama dengan yang diperlihatkan oleh Desargues. Pertama-tama dibuktikan kebenarannya untuk lingkaran, kemudian dilanjutkan melalui proyeksi ke setiap irisan kerucut yang lainnya. Teorema di atas termasuk salah satu yang paling kaya dalam membangun geometri proyektif. Kemungkunan besar kita secara langsung sering mengambil manfaatnya, karena apa yang diutarakan oleh Pascal di atas telah menurunkan lebih dari 400 teorema akibat dari geometri proyektif. Tulisannya itu tidak pernah diterbitkan, karena kemungkinan adanya anggapan bahwa apa yang ditulisanya tidak pernah lengkap. Baru pada tahun1640, Pascal menerbitkan salah satu karyanya yang berjudul Essay pour les conques, yang berisikan tentang beberapa hasil penemuannya. Hanya ada dua salinan dari tulisan yang mengagumkan ini yang dikenal dan tetap ada, satu diantaranya di Hanover dalam salinan yang ditulis oleh Leibnis dan yang satunya lagi di perpustakaan Nasional Paris. Teorema Pascal yang dimuat dalam Mystic hexagram dicakup dalam ketiga dalil akibat (lemma) yang diutarakannya dalam tulisan tersebut.

Tulisan Pascal Traite du triangle arithmeticus yang ditulis pada tahun 1653 dan baru dicetak tahun 1665. Pascal menyusun segitiga secara aritmetika sebagaimana terlihat dalam bagan susunan bilangan. Suatu unsur pada baris kedua atau baris seklanjutnya diperoleh sebagai jumlah dari semua unsur yang ada di atasnya yang terletak di sebelah kirinya. Jadi unsur dalam baris keempat kolom kelima yang terletak dalam bagan susunan bilangan adalah,
35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1
dan unsur dalam baris keenam kolom kelima adalah,
126 = 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1
dan sebagainya.

Gambar-gambar segitiga diperoleh dengan menarik garis diagonal, Dan secara aljabar kita akan mengetahui bahwa bilangan-bilangan sepanjang diagonal yang ditarik tadi merupakan koefisien-koefisien binomial. Sebagai contoh, bilangan-bilangan sepanjang diagonal ketiga, keempat, dan kelima berturut-turut adalah koefisien-koefisien dari binomial berikut:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (1, 2, 1)
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, (1, 3, 3, 1)
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, (1, 4, 6, 4, 1)

Koefisien-koefisien binomial yang diperoleh, merupakan salah satu penggunaan dari segitiga pascal atau segitiga aritmetika. Segitiga Pascal ini dipakai pula untuk penentuan probabilitas, yaitu untuk memperoleh besarnya kombinasi n terhadap r (banyaknya kombinasi dari n obyek yang berbeda dengan sekali pengambilan r onyek) (soal latihan). Pernyataan ini secara tepat dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)}$$

dengan n ! dalam notasi kita sehari hari merupakan perkalian:

n (n – 1) (n – 2) (n – 3) … (3) (2) (1).

Selain dari hal-hal tersebut di atas, masih banyak lagi relasi-relasi yang dapat dimanfaatkan dari segitiga Pascal, dan beberapa di antaranya ada yang dikembangkan oleh pascal sendiri.

Pascal sendiri bukanlah orang pertama yang membicarakan segitiga aritmetika. Referensi yang paling tua yang telah diketahui membahas Segitga Aritmetika dikerjakan oleh ahli aljabar Cina yang bernama Chu Shi-kie pada tahun 1303. Berdasarkan tulisan inilah Pascal telah mengembangkan sifat-sifat Segitiga Aritmetika dan aplikasinya yang sekarang dikenal sebagai Segitiga Pascal.

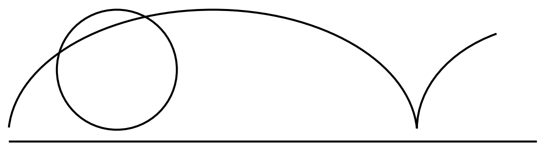
Meskipun para filsuf Yunani kuno telah membicarakan syarat-syarat yang perlu dari bentuk ketidaktentuan secara panjang lebar, tetapi pekerja matematika perihal probabilitas baru muncul pada akhir abad ke-16. pda saat-saat itulah beberapa orang matematikawan Italia berusaha untuk menghitung peluang dalam suatu permainan judi, seperti halnya permainan yang mempergunakam dadu.

Seperti halnya dinyatakan dalam pasal 8-8 yang lalu, Cardano telah menulis buku petunjuk yang singkat untuk seorang penjudi, termasuk aspek-aspek kemungkinannya secara matematika. Namun secara umum dalam buku tersebut disetujui bahwa masalah-masalah yang dibahasnya hanyalah merupakan pemula ilmu probabilita (teori kemungkinan), sehingga sering pula disebut Problem of the points. Sedang Pacioli dalam bukunya Suma yang ditulis pada tahun 1494 telah memperkenalkan problem of the points secara matematis. Pacioli merupakan orang pertama yang membahas probabilitas secara matematis.

Sebenarnya masalah probabilitas ini telah pula dibicarakan oleh Cardano dan Tartaglia, tetapi tidak memperoleh kemajuan yang nyata. Akhirnya pada tahun 1654, masalah ini diusulkan kepada Pascal oleh Chevalier de Mere. Chevalier De Mere adalah seorang penjudi yang berpengalaman. Ia tidak menyetujui alasan-alasan teortis yang diberikan oleh Pascal, karena tidak cocok dengan pengamatannya. Selanjutnya Pascal lebih tertarik terhadap masalah-masalah yang diajukan oleh Chevalieari De Mere.

Lebih lanjut lagi, Pascal mengkomunikasikan masalah ini kepada Fermat. Dalam surat-menyurat oleh mereka, Pascal bersama-sama dengan Fermat telah memecahkan masalah-masalah probabilitas secara jelas, tetapi masih tetap ada perbedaan dalam setiap penyelesaiaannya. Korespondensi antara Pascal dengan Fermat telah meletakkan dasar-dasar teori probabilitas.

Pekerjaan matematika lainnya dari Pascal adalah tentang "Sikloida" (Cycloid), yaittu kurva yang diperoleh pergeseran suatu titik sekeliling lingkaran yang berputar sepanjang garis lurus Kurva ini secara matematis dan fisis memegang peranan yang penting dalam metode-metode kalkulus. Galileo adalah orang pertama yang memberikan perhatian pada masalah kurva ini, yang kemudian teori ini sering dipakai pada permasalahan busur-busur jembatan.



Gambar 9.16

9-10. Perhitungan Dengan Mesin

Mesin hitung ditemukan oleh Pascal pada tahun 1642, adalah suatu peralatan mesin penjumlahan. Mesin penjumlahan ini diciptakan oleh Pascal untuk membatu pekerjaan ayahnya dalam menghitung uang pemerintah di Rouen. Peralatan ini hanya mampu menangani bilangan-bilangan yang tidak melebihi enam digit.

Peralatan mesin hitung ini, memuat sejumlah lempengan yang diberi tanda dari 0 sampai 10, dirancang sedemikian rupa sehingga kalau suatu lempengan diputar dari 9 ke 0 maka lempengan sebelumnya otomatis berputar satu satuan. Karena itu untuk mendapatkan proses seperti ini diperlukan peralatan tambahan secara mekanik.

Pascal telah membuat lebih dari 50 unit mesin, dan beberapa diantaranya disimpan di Conservatoire des Arts et Metiers di conservatoire des Art et Metiers di Paris yang menarik pula untuk diketahui bahwa pascal yang telah menyumbangkan penemuannya tentang gerobak tangan beroda satu seperti yang kita kenal sekarang.

Tahun-tahhun selanjutnya, Leibniz (1671) di Jerman dan Sir Samuel Morland (1673) di Inggris telah menemukan peralatan mesin hitung yang lebih baik lagi. Ada pula usaha-usaha yang lainnya yang telah dikerjakan oleh orang lain, tetapi pada umumnya mesin-mesin hitung tersebut bekerja secara lambat dan tidak praktis.

Pada tahun 1820, Thomas de Colmar telah mengubah jenis mesin hitung Leibniz mennjadi mesin hitung yang melakukan operasi bagi maupun operasi kurang. Mesin ini menjadi prototip dari seluruh mesin komersil yang dibuat sebelum tahun 1875, dan sejak itu telah banyak mesin-mesin hitung yang dikembangkan lebih baik lagi.

Pada tahun 1875, seseorang berkebangsaan Amerika yang bernama Frank Stephen Baldwin, telah meminta hak paten untuk mesin hitung pertama yang bisa melakukan empat operasi hitung dasar (operasi kali, operasi bagi, operasi tambah an operasi kurang).

Pada tahun 1878, Wilgodt Theophile Odhner seseorang berkebangsaan Swedia telah memiliki hak paten di Negara-negara bagian Amerika untuk mesin hitung yang mirip seperti yang dirancang Baldwin. Seskarang ini ada beberapa mesin hitung yang dibuat secara elektronik, seperti kalkulator. Mesin-mesin hitung elektronik yang sama prinsipnya dengan yang dibuat Baldwin telah dibuat pula oleh Friden, Marchant, dan Monroe.

Sekitar tahun 1818, seorang matematikawan Inggris yang bernama Charles Babbage (1792-1871), mulai mempertimbangkan susunan mesin yang dapat dipergunakan untuk menghitung tabel-tabel secara matematika. Ia adalah orang yang pernah menduduki jabatan guru besar Lucasian di Cambridge yang telah berhasi menyusunmesin hitung. Dalam tahun 1823, ia mendapat bantuan dari pemerintah Inggris untuk membuat peralatan mesin hitung. Mesin hitung yang dibuatnya telah mampu menghitung sampai 26 angka signifikan. Namun, Babbge sendiri tidak merasa puas, dan 10 tahun kemudian bantuan pemeintah itu telah dikembalikannya.

Proyek Babbge merupakan hasil pemikiran yang begitu besar yang pernah ada akhir-akhir ini. Mesin hitung yang ditemukan oleh Babbge dinamakan Mesin Analitik (analytic engine). Mesin analitik yang pertamakalinya dihasilkan oleh Babbge adalah IBM Automatic Sequence Controlled Calculator (ASCC). Peralatan mesin hitung ini dilengkapi di Universitas Harvard pada tahun 1944, dan bekerjasama juga dengan para pedagang internasional yang melakukan kontrak untuk keperluan Departemen Perdagangan Inggris.

Mesin hitung yang pertama ini mempunyai ukuran panjang 51 feet, tinggi 8 feet, dengan dua fanel sepanjang 6 feet, sedangkan bobotnya kurang lebih 5 ton. Model yang kedua sebagai perbaikan dari TBM ASCC dibuat pada tahun 1948 yang dipersiapkan untuk keperluan Nava Profing Ground, Dahlgren, Virginia.

Peralatan mesin hitung lainnya yang didasarkan pada inspirasinya Babbge, adalah mesin hitung elektronik yang dinamakan Numerical Integrator and Calculator (ENIAC). Komputer elektronok ini dibuat pada tahun 1945 di Universitas Pensylvania. Komputer ini mempunyai fungsi yang lebih banyak, dan dibuat berdasarkan kontrak dengan ballistic Research Laboratory yang dipakai untuk keperluan militer. Tempat yang diperlukan untuk menyimpan mesin ini hampir mencapai 100 meter persegi dengan bobot kurang lebih mencapai 30 ton.

Komputer lainnya yang dibuat oleh IBM (*Internasional Business Machines Corporation)*, adalah Selective Sequence Electronic Calculator (SSEC). Kemudian Electronic Discrete Variable Calculator (EDVAC) dari Universitas Pensylvania, MANIAC dari Institut Advanced Study di Princeton, Universal automatic Computer (UNIVAC) dan masih banyak lagi variasi-variasi lainnya.

Tabel berikut merupakan perbandingan dalam menghitung harga π (pi) yang dilakukan oleh bermacam-macam komputer elektronik yang semakin lama semakin cepat prosesnya.

PENEMU	MESIN	TAHUN	TEMPAT DESIMAL	WAKTU
Reitweisner	ENIAC	1949	2037	70 jam
Nicholson dan Jeenel	NORC	1954	3089	13 menit
Felton	Pegasus	1958	10000	33 jam
Genuys	IBM 704	1958	10000	100 menit
Genuys	IBM 704	1959	16167	4,3 jam
Shanks dan Wrench	IBM 7090	1961	100265	8,7 jam

Sharks dan Wrech telah memperhitungkan, bahwa generasi komputer elektronik IBM 7090 mempunyai kecepatan sepuluh kali lebih cepat, reliabilitasnya 100 kali lebih besar, dan ternyata mesin hitung ini mampu menghitung harga π (pi) sampai 10^6 tempat decimal tanpa menemui kesulitan.

BAB X
PERKEMBANGAN GEOMETRI ANALITIK DAN PRA-KALKULUS.

10-1 Geometri Analitik

Beberapa lama setelah Desargues dan pascal membuka lembar baru dalam bidang geometri proyektif, selanjutnya Descartes dan Fermat mengemukakan idenya mengenai "geometri analitik" yang modern. Ada suatu perbedaan yang mendasar diantara dua penelitian besar tersebut, bentuk pertama merupakan "cabang" dari geomeri yang kemudian adalah "metode" dalam geometri.

Ada sedikit pengalaman Akademis yang dapat menawan hati para pelajar di sekolah, yaitu unutk pertama kali berkenalan dengan metode dalam matematika yang dapat dipakai unutk memecahkan persoalan geomertri. Kemudian timbul ide yang di dasarkan pada hubungan antara kurva-kurva geometri dengan persamaan-persamaan aljabar dalam dua variable. Hubungan itu mempunyai aturan-aturan yang khusus, sehingga untuk setiap kurva selalu didapatkan persamaannya yang pasti dalam bentuk $f(x,y) = 0$, dan sebaliknya untuk masing-masing persamaan selalu ada kurvanya yang tertentu, selain itu juga didapatkan pula suatu hubungan yang didasarkan pada aljabar dan sifat-sifat analitik dari persamaan $f(x,y) = 0$ dengan sifat-sifat geometri dari kurva yang dihubungkannya. Geometri ada reduksi yang cermat terhadap aljabar dan analisis.

Ada sedikit perbedaan pendapat dalam masalah "siapa" yang menemukan geomatri analitik?,"berapa" umur yang sebenarnya dari penemuan itu?, dan "bagaimana" kejadian dalam penemuan itu? pertanyaan-pertanyaan ini secara pasti tidak dapat dipecahkan tanpa adanya persetujuan untuk memberikan penjelasan terhadap, berupa "apakah" goematri analitik itu?.

Kita telah melihat pada jaman Yunani kuno yang sudah juga memberikan aljabar geometri dengan baik. Demikian pula dengan ide koordinat yang terkenal, telah pula digunakan oleh orang-orang mesir dan romawi. Demikian pula dengan orang yunani kuno yang telah menggunakan ide koordinat dalam pembuatan peta. Fakta khusus diperlihatkan orang yunani, dapat kita lihat pada karya Appolonius. Ia telah membentuk geometri dengan irisan kerucutnya dari persamaan-persamaan cartecius untuk kurva-kurvanya yang ekuivalensi geometris. Ini adalah sebuah ide yang nampaknya berasal dari menaechemus.

Telah pula kita mencatat dalam pasal 8-4, bahwa pada abad ke-14 Nicole Oresme telah menemukan aspek lain dari geometri analitik. Hal ini terlihat ketika Oresme menyatakan hukum grafik variabel terikat. Semua keterangan di atas adalah penelitian-penelitian yang jauh dari apa yang kita pikirkan sekarang sebagai geometri analitik. Namun mungkin pula betul seperti apa yang telah diberikan pada abad ke-17 oleh Descartes dan fermat yang secara khusus paling sedikit telah memberikan dorongan semangat modern.

10-2. Rene Descartes

Rene Descartes (1596-1650) lahir dekat Tours pada tahun 1596. Kerika berumur 8 tahun dia dikirim ke sekolah Jesuit di Lafleche. Disanalah ia membangun kebiasaan tinggal di tempat tidur merenung hingga pagi (pada mulanya karena alasan kesehatan).

Jam-jam merenung pada waktu istirahat pagi dianggap oleh Descartes sebagai periode yang paling produktif.

Pada tahun 1612, Descartes meninggalkan sekolahnya untuk pergi ke paris. Kemudian bersama-sama dengan Mersenne dan Mydorge. Descartes menyediakan waktu untuk belajar matematika.

Pada tahun 1617, dia memulai untuk beberapa tahun menjadi tentara yang bergabung dengan angkatan perang Prince Maurice of Orange. Setelah dari militer, dia menghabiskan waktunya selama empat atau liam tahun melawat ke Jerman, Denmark, Belanda, Swis, dan Italia. Setelah itu ia kembali lagi ke Paris untuk meneruskan pelajaran matematikanya dan ia mulai berpikir secara filsafat, ia telah membuat peralatan optik, dan akhirnya memutuskan untuk pindah ke Belanda. Di Belanda Descartes tinggal selama 20 tahun dan menyediakan waktunya untuk Filsfat, Matematika, dan Sains.

Pada tahun 1649, dengan rasa malas Descartes pergi ke Swedia atas undangan ratu Christiana. Beberapa tahun kemudian ia menderita penyakit paru-paru, ia meninggal di Stckholm pada permulaan tahun 1650. Selam 20 tahun tinggal di negeri Belanda, Descartes telah menyelesaikan berbagia tulisan yang berharga dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Dalam empat tahun pertama, Descartes telah mneghabiskan waktunya untuk menulis"Le Monde" buku ini merupakan karya untuk bidang fisika yang merupakan hasil penelitan terhadap alam semesta. Namun tulisanya ini ditinggalkan dalam keadaan belum lengkap, karena Descartes mendengar berita-berita tentang Nasibnya Galileo yang telah dianggap sebagai orang yang tidak terpakai oleh gereja.

Selanjutnya Descartes menulis sebuah filsafat tentang ilmu pengetahuan umum dengan judul "*Discours de la method phour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences*" yiatu sebuah ceramah tentang metode pemberian alasan yang benar dengan tiga buah lampiran yang masing-masing dengan judul ***La dioptrique*, *Les meteors***, dan ***La geometrie***, ketiga lampiran yang dimuat dalam tiga ceramahnya ini, baru diterbitkan pada tahun 1637. Dalam lampirannya yang ketiga inilah, Descartes memunculkan geometri analitik.

Pada tahun 1641, Descartes menerbitkan sebuah hasil kerjanya yang disebut Meditationes yang menerbitkan penjelasan secara panjang lebar tentang sudut pandang filosofi. Kemudian pada tahun 1644, ia telah pula menulis Principia Philosophiae yang memuat beberapa hukum ketidak tepatan alam semesta dan sebuah hukum kosmlogi yang tidak konsisten tentang pusaran.

Diantara tulisan Descartes yang paling terkenal dalam sejarah matematika, adalah lampiran yang ketiga yang berjudul La geometrie. Lampiran yang ketiga ini meliputi 100 halaman dan terbagi menjadi tiga bagian besar. Bagian pertama memuat tentang penjelasan beberapa prinsip geometri aljabar, dan memperlihatkan kemajuan-kemajuan yang telah diacapai oleh bangsa yunani kuno. Orang yunani kuno telah menghubungkan sebuah variable terhadap panjang segmen garis, menghubungkan dua variabel tehadap daerah bujur sangkar, dan menghubungkan tiga variabel terhadap volume sebuah kubus. Namun Descartes tidak menyarankan keterkaitan antara x^2 dengan luas daerah, tetapi lebih jauh lagi dari itu misalnya dalam hal perbandingan :

$$1 : x = x : x^2$$

Dinyatakan dengan panjang sebuah garis yang mudah dibentuk jika x diketahui. Penggunaan panjang sebuah segmen sebagai satuan panjang untuk menyatakan beberapa variabel telah pula dipakai. Pemakain variable sebagai satuan panjang telah dibantu dengan paralatan Euclid, dan tentunya jika nilai variabelnya diketahui.

Dalam pengaritmetikaan geometri yang dimuat pada bagian pertama, La geometri telah memisahkan x pada sebuah sumbu yang diketahui dengan sebuah satauan panjang y yang membentuk sudut yang tetap dalam rangka membentuk suatu titik dengan x dan y dinyatakan dalam sebuah relasi, sebagai contoh, jika kita mempunyai hubungan $y = x^2$, maka untuk semua nilai x akan diperoleh hubungan y seperti halnya hubungan di atas. Descartes menjumlahkan hubungan yang menarik, sehingga didapatkan sebuah metode. Ia membicarakan permasalahan sebagai berikut: jika

$$P_1, \ldots\ldots, P_m, P_{m+1}, \ldots\ldots P_{m+n}$$

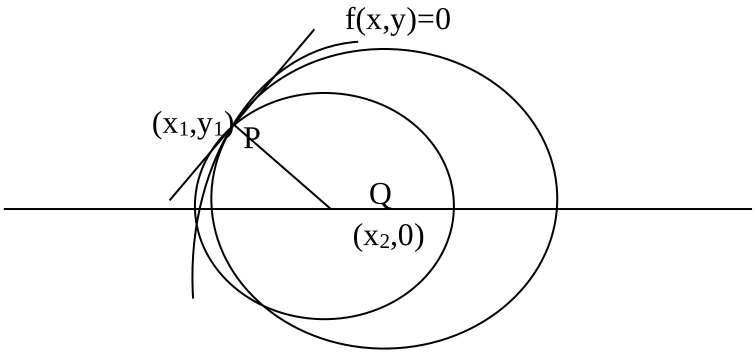
Adalah panjang dari *m+n* segmen garis yang ditarik dari sebuahn titik p sampai *m + n* garis-garis yang diketahui, membentuk sudut-sudut dengan garis-garis ini, dan jika

$$P_1\ P_2 \ldots\ldots P_m = K\ P_m + 1\ P_{m+2} \ldots\ldots P_{m+n}$$

Dengan K adalah sebuah konstanta, carilah tempat kedudukan dari P.

Orang-orang Yunani kuno telah memecahkan persoalan di atas dalam hal m dan n tidak lebih dari dua (pasal 6-9), tetapi persoalan umum seperti ini adalah sesuatu yang mengherankan. Namun Descartes dengan mudah menunjukkan, bahwa hal pokok dari persoalan ini telah membawa ke “tempat kedudukan” (loci) dengan derajat lebih dari dua. Dalam hal tertentu, mungkin dia membentuk titik-titik dari tempat kedudukan dengan memakai peralatan Euclid. Geometri analitik Descartes telah dapat memecahkan persoalan yang bersifat umum, dan telah memperlihatkan kebaikan metode barunya. Pemecahan persoalan ini dikatakan oleh Descartes sebagai dorongan penemuannya tentang geometri analitik.

Bagian kedua dari La geometri, membicarakan hal yang lain, yaitu sebuah pengklasifikasian kurva-kurva denga metode yang menarik, yaitu dengan membentuk garis singgung kurva metode untk menarik garis-garis singgung. Persamaan dari kurva yang diberikan adalah



$F(x,y) = 0$, dengan(x_1,y_2) adalah koordinat titik P yang terletak pada kurva, sedangkan permasalahanya kita akan membuat garis singgung. Titik Q mempunyai kordinat $(X_2,0)$, adalah sebuah titik yang terdapat pada sumbu x. Akibatnya didapatkan persamaan lingkaran dengan titik $Q(x_2, 0)$ sebagai koordinat titik pusatnya dan

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$$

Jika kita menghilangkan y di antara persamaan di atas dengan persamaan $f(x, y)= 0$, maka kita akan memperoleh sebuah persamaan dalam x, sebagai akibatnya kita dapatkan absis dari titik potong antara lingkaran dengan kurva yang diberikan.

Sekarang kita akan mencari x_2 sedemikian hingga persamaan di atas dalam bentuk x, sehingga mempunyai sepasang akar yang sama dengan x_1. Keadaan ini menentukan Q sebagai perpotongan sumbu x dengan kurva normal pada P, dengan menggambar lingkaran ini kemungkinan akan mudah menarik garis singgung yang diperlukan. Sebagai contoh pemakaian metode ini adalah penarikan garis singgung pada parabola $y^2= 4x$ di titik (1, 2). Dalam hal ini, kita mempunyai:

$(x- x_2)^2+ y^2= (1- x_2)^2+ 4.$

Dengan mengeliminasi y, kita dapatkan:

$(x- x_2)^2+ 4x= (x_1-x_2)^2+ y_1^2$

atau $x+ 2x(2-x_2)+ (2x_2-5)= 0$

Bentuk ini adalah persamaan kuadrat yang mempunyai dua buah akar yang sama, dengan diskriminannya adalah:

$(2-x_2)- 2(x_2-5)= 0$

atau $x_2= 3$

lingkaran dengan titik pusat (3, 0) dan melalui titik (1, 2) yang terletak pada kurva sudah bisa digambar, dan garis singgung yang diperlukan sudah bisa dibentuk. Metode pembentukan garis singgung ini dipakai oleh Descartes pada sejumlah kurva yang berlainan. Namun, tentunya untuk mencari garis singgung kurva ini masih ada metode lain yang lebih baik dari pada metode di atas.

Bagian ketiga dari la geometrie berisikan jawaban persamaan dengan derajat lebih dari dua. Dalam bagian ini, dimuat apa yang kita sebut sekarang dengan aturan pemberian tanda Descartes (Descartes rule of sign), yaitu sebuah aturan untuk menentukan batas jumlah negatif dan positif dari akar-akar yang dimiliki oleh sebuah polinom (soal latihan).

Pada la geometrie, Descartes telah menentukan keseragaman penggunaan huruf pertama dari abjad besaran yang diketahui dan P pemakaian huruf terakhir untuk menendai huruf besaran yang belum diketahui. Dia telah memperkenalkan system index, seperti a^3, a^4, … dst. yang kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh Vieta. Di sini, kita menemukan pula penggunaan pertama dari metode ketiga dari la geometrie yang merupakan metode terakhir. Sebagai contoh dari pemakaian metode ini dalam mencari x_2 dari persamaan kuadrat:

$x^2+ 2x(2- x_2)+ (2x_2-5)= 0$

harus mempunyai dua akar yang sama dengan 1. Sebagai akibatnya kita dapatkan:

$x^2+ 2(2- x_2)x+ (2x_2-5)= (x-1)^2= x^2- 2x+ 1$

sehingga:

$2(2- x_2)= -2$ dan $2x_2- 5= 1$

Ini pun sama menghasilkan $x_2= 3$

La geometrie bukanlah suatu pengembangan yang sistematik dari metoda analitik, tetapi lebih banyak menuntut para pembaca untuk membentuk metode dalam memperjelas pernyataan-pernyataan yang terasa asing. Di dalam teks ini dimuat 32 gambar, tetapi tidak satupun kita temukan istilah sumbu-sumbu koordianat yang dinyatakan secara tegas. Masih terlihat pula pekerjaan-pekerjaan yang kurang jelas, sehingga sulit untuk dibacanya. Kemudian pada tahun1649 muncul sebuah terjemah dalam bahsa latin yang di tulis oleh F Debeaune yang diedit dengan komentar Frans Shcooten the younger yang kemudian direvisi dalam edisi 1659-1661 dengan peredaran yang lebih luas lagi.

Setelah seratus tahun kemudian baru ditemukan buku yang memuat materi geometri analitik seperti yang sekarang dijadikan pegangan di sekolah-sekolah. Kata koordinat, absis, dan ordinat yang sekarang sering kita pakai dalam geometri analitik, diberikan oleh leibinz pada tahun 1692.

Ada beberapa dongeng yang menjelaskan awal mula geometri analitik ditemukan oleh Descartes. Salah satu ceritanya ada yang menjelaskan bahwa geometri analitik semula ditemukan oleh Descartes di dalam mimpi. Cerita lain, mungkin hampir sama dengan cerita jatuhnya buah apel untuk Isaac Newton, sehingga ditemukan teori gravitasi. Demikian pula dengan Descartes, ide pertama tentang geometri analitik datang kepadanya ketika memperhatikan seekor lalat yang bergerak dengan perlahan di sekitar langit-langit dekat salah satu sudut kamarnya. Descartes memperhatikan lintasan gerak lalat tersebut dapat dijelaskan jika diketahui sebuah relasi yang mengaitkan jarak lalat dari dua dinding yang berdampingan. Walaupun cerita yang terakhir ini ragukan, tetapi mempunyai nilai pendidikan yang tinggi.

Dua lampiran lainnya menjelaskan tentang optic dan meteorologi (atmosfer fenomena alam termasuk bianglala). Di antarnya adalah pembentukan relasi v- e+ f= 3, dengan v puncak (vertek), e sudut (edge), dan f bidang permukaan (face) dari sebuah bidang banyak konvek (convex polyhedron).

Descartes merupakan orang pertama yang membicarakan sebuah simpul kurva kubik yang disebut folium, yang kita temukan dalam beberapa buku teks kalkulus, tetapi ia tidak melengkapi gambar kurvanya. Descartes telah pula mempertimbangkan tentang parabola angka tinggi (y^n= px, n>2), dan ia telah pula hal menarik tentang pembentukan garis singgung yang beraturan terhadap sikloida (cycloid).

10-3. Beberapa Perkembangan Geometri Analaitik

Selain dari sitem koordinat Cartesian siku-siku, ada pula sistem koordinat yang lainnya. Dan sebenarnya seseorang dapat saja menciptakan sistem kordiant selain dari sistem koordinat Cartesian. Seseorang membutuhkan rangka dasar dengan peraturan-peraturan yang menyertainya. Peraturan itu menceritakan pada kita bagaimana menempatkan satu titik pada bidang dengan pertolongan sebuah himpunan dari susunan bilangan-bilangan yang di tempatkan pada rangka dasarnya.

Dalam system koordinat Cartesian siku-siku, rangka dasarnya terdiri dari dua buah sumbu yang saling berpotongan tegak lurus, dan masing-masing sumbu memiliki skala. Selain itu disertai pula dengan peraturan-peraturan yang menceritakan kepada kita bagaimana menempatkan sebuah titik dengan memperlihatkan susunan angka real. Susunan ini menggambarkan tanda jarak dari titik tersebut terhadap sumbu-sumbu koordinat.

Sistem koordinat Cartesian siku-siku adalah sistem koordinat yang paling banyak dipakai, dan sistem ini telah banyak mengalami perkembangan sampai pada sistem koordinat yang sekarang kita pakai. Banyak peristilahan yang dikenal dalam sistem kordinat Cartesian siku-siku sepeti halnya pengklasifikasian kita terhadap kurva dalam linier, kuadratik, kubik, dan seterusnya. Cabang-cabang sistem kordinat ini telah pula banyak dipakai.

Ada pula kurva yang bebentuk spiral yang mempunyai persamaan yang sulit unutk digambarkan pada rangka koordinat Cartesian dan persamaan ini akan lebih mudah jika digambarkan dalam sitem koodinat lain. Umumnya persamaan kurva yang berentuk spiral akan lebih mudah jika digambarkan dalam system koordinat kutub. System koordinat kutub atau system koordinat polar mempunyai rangka dasar yang tidak terbatas, setiap titik yang terletak pada bidang dapat dinyatakan sebagai pa………… koordinat kutub ini nampaknya telah diperkenalkan pada tahun 1691 oleh Jacob Bernouli (1654-1705).

Sebuah perkembangan yang menarik dalam sisitem koordinat telah dibuka oleh Julius plucker(1801-1868) pada tahun 1869. Ia telah memperhatikan bahwa unsur dasar geometri tidak memerlukan titik, tetapi ia memilih garis lurus sebagai unsur dasar, dan sistem koordinatnya dinamakan sistem koordinat garis. Pada tahun 1700 telah dikembangkan pula geometri analitik secara sistematis oleh Antoine parent (1666-1716) yang ditulis diakademi prancis. Kemudian A.C clairaut (173- 1765) pada tahun 1731 ia menulis secara analitik tentang kurva-kurva dalam ruang, tulisanya yang pertama yang membahas kurva non bidang secara analitis.

Pengetahuan ynag samar-samar dari suatu titik dengan n dimensi ($n > 3$) dalam geometri analitik di bingungkan oleh perkembangan metafisika. Penelitan untuk dimensi yang besar ini telah banyak pula dirintis, dan sampai pertengahan abad ke 19 tidak pernah dimunculkan. Diantaranya dirintis oleh Arthury cayley (1821-1895) pada tahun 1843 herman grassmann (1809-1877) pada tahun 1844 dan Bernard rieman(1826-1866) pada tahun 1854.

Sekarang ruang nyata dari dimensi n didefinisikan sebagai kumpulan dari semua n tupel ($x_1^3,x_2^3,x_3^3,\ldots\ldots..x_n^3$) dari n bilangan real $x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots..x_n$. secara khusus n tupelo ini disebut sebagai titik yang terletak dalam ruang dimensi n. sedangakan relasi diantara titik-titik ini didefinisikan oleh rumus-rumus yang diberlakukan secara analogi dengan rumus-rumus yang berlaku dalam dua dimensi. Misalnya jarak antara dua titik (x_1,x_2) dan(y_1,y_2) dalam syitem koordinat Cartesian dua dimensi diberikan rumus:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Dan jarak antara dua titik (x_1,x_2,x_3) dengan (y_1,y_2,y_3) dalam system koordinat Cartesian tiga dimensi diberikan rumus:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Selanjutnya kita definisikan jarak antara dua titik ($x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots..x_n$) dan ($y_1,y_2,y_3,\ldots\ldots..y_n$) dalam n dimensi pada sistem koordinat cartesian adalah:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Sebuah geometri n dimensi sesungguhnya merupakan hasil penelitian matematika secara murni terhadap geometri. Dengan kata lain beberapa perkembangan yang penting dalam matematika modern.

10-4 Pierre de fermat

Pada waktu bersamaan dengan dirumuskannya geometri analtik oleh Descartes,dikenal pula seorang ahli matematika prancis, Pierre de fermat(1601-1665) dalam tuisannya yang pernah diterbitkan oleh *isogoge locus planus et solidos*, ditemukannya pembahasan persamaan garis secara umum, kemudian uraian-uraian tentang parabola, elips, dan hiperbola.

Fermat telah mendefinisikan pula beberapa kurva secara analitik. Sedangkan pembahasan tentang garis singgung dan persamaan pangkat dua merupakan tulisan yang pernah ada pada tahun 1637. Banyaknya kurva –kurva yang diusulkan oleh fermat yang didefinisikan secara aljabar, sedangkan kurva-kurva baru yang didefinisikan oleh Descartes berasal dari pergerakan mekanik.

Kurva-kurva $x^m y^n = a$, $y^n = a x^m$ dan $r^n = a\,\theta$ dikenal sebagai hiperbola, parabola, dan spiral dari fermat. Fermat juga telah mengusulkan kurva kubik yang kemudian yang kemudian dikenal denga ilmu sihir dari aganesi (witch of agensi) diambil dari nama seorang wanita maria gawtan agensi(1718-1799). Maria adalah seorang wanita yang mempunyai keahlian rangkap, yaitu dalam bidang matematika, bahasa, filsafat, dia dikenal sebagai orang yang mempunyai kebiasaan berjalan dalam keadaan tidur. Maria lahir di Milan dan ia menjabat sebagai guru besar di universitas Milan, diceritakan bahwa keitka ia tidur, Maria meninggalkan tempat tidur dan mengerjakan soal-soal yang dalam keadaan bangunnya ia tidak dapat mengerjakan soal-soal tersebut. Ketika ia terbangun maria terkejut heran soal-soal tersebut telah diselesaikan dengan baik.

Perlu pula diketahui, bahwa ada dua aspek yang berbalikan dari teori yang dikembangkan oleh Descartes dan fermat. Perluasan tersebut oleh Descartes dimulai dari tempat kedudukan kemudian dicari persamaannya, sedangkan fermat dimulai dari persamaan dan kemudian baru dipelajari tempat kedudukannya.

Hasil pekerjaan fermat ditulis dalam notsi vieta, dan kelihatannya lebih kuno dibandingkan dengan simbol-simbol yang diggunakan Descartes yang kelihatannya lebih modern. Demikian pula dengan hasil penemuan fermat sedikit sekali yang digunakan dalam geometri. Penemuan fermat banyak dipakai dalam masalah maksimum dan minimum yang akan di bahas pada bagian yang akan datang.

Fermat dilahirkan didekat tulouse pada tahun 1601, dan meninggal di castres pada tahun 1665. Ia adalah anak seorang pedagang penyamak kulit, pendidikan dasarnya di rumah. Pada usia 30 tahun, ia menjadi anggota parlemen dikota Toulouse, dan ia melaksanakan tugasnya dengan baik dan cermat.

Fermat bekerja sebagai ahli hukum sederhana dan pemalu, dan ia menghabiskan waktu luangnya sebagai sambilan untuk mempelajari matematika. Ia telah memperkaya cabang matematika dengan memberikan bahasan bagian-bagian yang penting, sehingga ia disebut sebagai matematikawan prancis yang ternama pada abad ke-17.

Dari berbagai variasi konsep matematika yang di kembangkan oleh fermat, yang terkemuka adalah penemunya tentang teori bilangan yang modern. Dalam bidang ini Fermat memiliki intuisi dan kemampuan yang luar biasa.

Hasil terjemahan kedalam bahasa latin dari aretmatika, diopthanus yang dikerjakan oleh Bachet De Meziriac pada tahun 1621, secara langsung telah mempengaruhi teori bilangan fermat. Beberapa teori yang dikembangkan oleh fermat memuat beberapa kalimat yang disalin dari tulisan Buchet.

Pada tahun 1670, lima puluh tahun setelah ia meninggal, catatan-catatannya digabungkan dalam sebuah lembaran baru, tetapi sayangnya dicetak secara kurang teratur. Edisi aritmatika yang baru ini dikeluarkan oleh anaknya yang bernama Samuael Clement.

Dalam catatannya dimuat beberapa teorema yang tidak dibuktikan, tetapi oleh fermat ditunjukkan kebenarannya. Beberapa contoh berikut sebagai ilustrasi dari hasil penelitian yang pernah dilakukan oleh Fermat.

1. Jika p adalah sebuah bilangan prima dan a adalah bilangan prima yang lebih kecil dari p, maka a^{p-1}- 1 habis dibagi oleh p.

sebagai contoh jika p = 5 dan a =2 maka a^{p-1}- 1 = 2^{5-1}- 1 = 2^4 – 1= 15 =(5)(3) artinya habis dibagi 5. Teorema ini dikenal sebagai toerema fermat kecil, yang diberikan oleh fermat tanpa disertai dengan pembuktiannya. Teorema ini termuat dalam sebuah surat dari fermat yang ditunjukkan kepada Frenicle De Dessu, tertanggal 18 oktober 1640. Sedangkan penerbit pertama dari pembuktiannya dibrilan oleh Euler pada tahun 1736.

2. Setiap bilangan prima yang ganjil dapat dinyatakan sebagai perbedaan dari dua contoh pengkuadratan dengan satu cara. Dalam hal ini fermat telah memberikan pembuktian yang sederhana.

Jika p dalah sebuah bilangan prima yang ganjil, maka dengan mudah ditentukan :

$$\mathrm{p} = \left[\frac{(\mathrm{p}+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(\mathrm{p}-1)}{2}\right]^2$$

dipihak lain, jika P =x^2 + y^2, maka p = (x + y)(x - y).

$$x = \frac{(\mathrm{p}+1)}{2} \text{ dan } \mathrm{y} = \frac{(\mathrm{p}-1)}{2}$$

3. Sebuah bilangan prima dalam bentuk 4n+1 dapat dinyatakan jumlah dari dia bilangan kuadrat.sebagai contoh,

$$5= 4 + 1= 2^2 + 1^2$$
$$17=16+1=4^2 + 1^2$$
$$29 = 25+4=5^2+ 2^2$$

Dan sebagainya. Teorema ini unutk pertamakalinya ditulis oleh Fermat dalam surat yang ditunjukkan kepada Mersnne, tertanggal 25 desember 1640. Pembuktian pertama kali teorema oleh Euler diterbitkan pada tahun 1754.

4. Sebuah bilangan prima yang berbentuk 4n+1 meupakan hipotenusa (sisi miring) dari dua sisi yang lainnya pada segi tiga siku-siku. Jika ia berbentuk kuadrat dapat dinyatakan dalam dua bentuk penjumlahan kuadrat, jika pangkat tiga dapat dinyatakan dalam tiga bentuk penjumlahan kuadrat dan seterusnya.sebagai contoh kita perhatikan :

5 =4(1)

$5^2=3^2+4^2$

$25^2=15^2+20^2=7^2+24^2$

$125^2=75^2+100^2=35^2+120^2=44^2+177^2$ dan seterusnya.

5. Setiap bilangan bulat yang tak negative dapat dinyatakan sebagai jumlah dari empat atau kuadrat-kuadrat yang lebih kecil. Teorema yang sulit ini dibuktikan oleh lagrange pada tahun 1770.

6. Luas daerah suatu segitiga tidak merupakan kuadrat dari suatu bilangan. Teorema yang ini pun dibuktikan oleh lagrange
7. Hanya ada satu jawaban dalam bilangan-bilangan bulat untuk $X^2 + 4 = Y^3$, dan hanya ada dua jawaban untuk $X^2 + 4 = Y^3$. Persoalan ini merupakan tantangan untuk matematikawan pada saat itu jawabannya adalah X = 5, Y = 3. Untuk persamaan yang pertama, sedangkan untuk persamaan yang kedua jawabannya adalah pasangan X = 2, Y = 2, X= 1, Y= 5.
8. Tidak ada bilangan-bilangan bulat positif x, y, dan z sedemikian rupa sehingga $X^2 + Y^2 = Z^2$.
9. Tidak ada bilangan-bilangan bulat postif x, y, z,dan n sedemikian rupa sehingga $X^n + Y^n = Z^n$ dengan n>2. Pernyataan ini dikenal dengan teorema terakhir yang diberikan oleh Fermat.

Teorema terakhir dari Fermat:

"Untuk membagi sebuah bilangan pangkat tiga menjadi dua bilangan pangkat empat, atau secara umum untuk pangkat sembarang menjadi dua bilangan yang berpangkat sama merupakan hal yang tidak mungkin, dan saya telah menemukan pembuktian yang terpuji ini tetapi batasnya sangatlah sempit untuk menerangkannya".

Apakah Fermat sungguh-sungguh telah memiliki pembuktiannya? Atau kemungkinan yang tertinggal padanya hanyalah kebingungan untuk selama-lamanya.

Ada beberapa orang, matematikawan yang berusaha mencoba: membuktikan persoalan teorema terakhir dari Fermat, tetapi hasilnya hanyalah bersifat perkiraan secara umum saja. Ada sebuah pembuktian yang diberikan oleh Fermat pada bagian lain untuk masalah n=4, sedangkan Euler pernah memberikan sebuah pembuktian (merupakan penyempurnaan dari cara pembuktian yang pernah diberi oleh orang lain), yaitu untuk n=3.

Sekitar tahun1825 dari sebuah pembuktian untuk teorema terakhir dari Fermat, yaitu untuk n=5. Pembuktian ini diberikan oleh Legendre dan Dirichlet. Pada tahun 1839, Lame membuktikan teorema tersebut untuk n=7. Pembuktian yang sangat penting telah diberikan oleh matematikawan Jerman E.Kummer (1810-1893).

Pada tahun 1843, E.Kummer mengajukan sebuah pembuktian untuk teorema terakhir Fermat kepada Dirichlet, yang isinya menunjukkan sebuah kesalahan pada alasan-alasan pembuktian yang pernah diberikan oleh Dirichlet. Selanjutnya Kummer kembali lagi pada persoalannya, dan setelah beberapa tahun ia berhasil mengembangkan suatu hal yang penting dalam aljabar tinggi yang disebut teori ideal (theory of ideals). Teori ini dikembangkan dari kondisi-kondisi umum pada pada relasi Fermat yang tidak ada jawabnya. Seterusnya hampir semua kemajuan pembuktian yang diajukan oleh para ahli lain selalu didasarkan kepada hasil penelitian Kummer.

Sekarang ini diketahui bahwa teorema terakhir Fermat pasti benar untuk n < 4003, dan untuk beberapa nilai khusus yang lain dari n.

Pada tahun 1908, matematikawan Jerman yang bernama P. Wolfskehl telah mewariskan uang sebesar 100.000, Mark untuk Akademi Ilmu Pengetahuan di Gottingen sebagai hadiah kepada mereka yang dapat membuktikan secara lengkap dan pertama. Hasilnya pun telah banyak

Akhirnya persoalan teorema terakhir dari Fermat telah menjadi masalah yang angker seperti halnya tiga soal terkenal dalam geometri, yaitu Duplikasi, Triseksi, dan Kuadratur.

Teorema Fermat yang terakhir mempunyai kemegahan yang ganjil dalam persoalan matematika. Dalam sejarah perkembangan matematika, tercatat adanya penerbitan dalam jumlah besar tentang cara-cara pembutkian teorema tersebut, namun cara-cara tersebut di lakukan dengan tidak benar.

Pada tahun 1640, Fermat telah menduga, bahwa f(n) = $2^n + 1$ adalah bilangan prima untuk semua bilangan bulat n yang tidak negatip. Dugaan ini dibuktikan tidak benar oleh Euler dengan menunjukkan bahwa f(5) adalah sebuah bilangan komposit.

Pada tahun, 1897, telah diketemukan sebuah tulisan di perpustakaan Layden, yaitu sebuah naskah dari Chritiaan Huygens. Dalam naskah ini dijelaskan bahwa Fermat telah menentukan sebuah metode yang umum yang telah membantu penemuan Huygens. Metode yang diberikan oleh Fermat ini dikenal sebagai metode penemuan tidak terbatas dari Fermat (Fermat method of Infinite descent).

Metode yang diberikan oleh Fermat dipakai untuk membuktikan bahwa relasi tertentu yang menghubungkan keberlakuan dalam bilangan bulat positif tidaklah mungkin diandaikan sebaliknya. Dalam hal ini, relasi itu harus dipenuhi oleh beberapa kumpulan yang khusus dari bilangan bulat positif. Dengan mengasumsikan, ditunjukkan bahwa relasi yang sama dipenuhi pula oleh himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil. Kemudian dengan penggunaan kembali relasi yang masih harus dipenuhi oleh himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil lagi, dan seterusnya sampai tak terbatas. Karena bilangan bulat positif tidak dapat dikurangi dalam jumlah yang besar secara terus-menerus sampai tak terbatas, maka asal dari relasi tersebut adalah mustahil. Untuk memperjelas pemakaian metode ini, akan kita gunakan pada pengulangan kembali pembuktian bahwa 2 adalah bilangan irasional. Adaikan 2 = a/b dengan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat positif, sekarang.

$$\sqrt{2}+1=\frac{1}{(\sqrt{2-1})},$$

Sehingga

$$\frac{a}{b}+1=\frac{1}{\frac{a}{b}-1}=\frac{b}{a-b}$$

Dan

$$=\frac{a}{b}=\{b/(a-b)\}-1=\frac{(2b-a)}{a-b}=a_1/b_1$$

Tetapi, karena $1<\sqrt{2}<2$ sesudah menggantikan $\sqrt{2}$ dengan a/b dan mengalikan dengan b, kita peroleh b < a < 2b. Sekarang, karena a<2b, sesuai dengan 0 < 2b –a = a, juga karena b < a, setiap yang lebih kecil dari a, dengan penggunaan kembali prosedur, kita mencari $\sqrt{2}$ = a_2 / b_2, dengan a_2 adalah bilangan bulat positif yang lebih kecil dari a_1. Proses ini mungkin diulangi secara tidak terbatas. Karena bilangan positif tidak dapat dikurang besarnya secara tidak terbatas, maka hal ini menunjukkan bahwa √2 tidaklah mungkin rasional.

Kita telah menyebutkan pada pasal 9-9, tentang hubungan Pascal dengan Fermat yang telah meletakkan dasar ilmu probabilitas (teori kemungkinan atau teori peluang). Kita ulangi lagi tentang disebutkannya "*persoalan angka*" yang dimulai dari kejadian:

"menentukkan pembagian taruhan dari sebuah kemungkinan pertandingan di antara dua pemain yang menurut dugaan mempunyai keahlian yang sama, sehingga perlu diketahui skor dari pemain pada waktu pertandingan dan jumlah skor ditentukan untuk menentukan pertandingan."

Fermat mengganggap bahwa pemain A memerlukan dua angka lagi untuk menang, sedangkan pemain B memerlukan tiga angka lagi untuk menang. Bentuk ini adalah penyelesaian yang diberikan oleh Fermat dalam kasus tesebut. Dalam hal ini jelas bahwa empat kali lagi pertandingan sudah dapat ditentukan pemenangnya. Fermat memisalkan a untuk menunjukkan pemain A menang, dan untuk menunjukkan bahwa pemain B yang menang. Dengan memperhatikan 16 kombinasi kemungkinan dari dua huruf a dan b yang diambil dari hasil empat kali pertandingan dalam waktu yang sama, akan diperoleh hasil sebagai berikut:

a a a a	a a a b	a b b a	b b a b
b a a a	b b a a	a b a b	b a b b
a b a a	b a b a	a a b b	a b b b
a a b a	b a a b	b b b a	b b b b

kasus muncul a dua kali atau lebih yang ditunjukkan oleh A ada 11, sedangkan kasus b dapat muncul tiga kali atau lebih yang diinginkan oleh B ada lima. Karenanya taruhan antara pemain A dengan pemain B akan mempunyai perbandingan 11 : 5

10.5 Christiaan Huygens

Orang besar dari Belanda yang genius, Christiaan Huygens (1629-1695) yang hidup dengan tidak banyak peristiwa, tetapi ia hidup dengan penuh kreatifitas sehingga banyak hasil yang telah dicapainya. Dia lahir di Hugue tahun 1629, dan belajar di Leyden

Saint—Vincent dalam membujursangkarkan suatu lingkaran (quadratute of the circle). Tulisan berikutnya memecahkan persamaan pangkat dua dari irisan kerucut, dan pengembangan metode klasik untuk menghitung harga π (phi) (pasal 4-8)

Pada tahun 1654, Huygens bersama-sama dengan saudaranya telah menemukan sesuatu yang baru tentang cara terbaik untuk mengasah Lensa. Denga penemunya ini, Huygens telah mampu menyelesaikan sejumlah persoalan dalam penelitian astronominya, diantaranya telah diketemukan berbagai jenis bagian planet-planet Saturnus. Setelah beberapa tahun mendalami astronomi, mengakibatkan membawa Huygens kepada penemuan bandul jam, sehingga memungkinkan memperoleh peralatan yang lebih teliti untuk pengukuran waktu.

Pada tahun 1657, Huygens menulis risalah resmi yang pertama tentang probabilitas yang didasarkan kepada surat menyurat antara Pascal denga Fermat. Risalahnya berisikan anggapan yang sangat baik dalam masalah tersebut. Risalah ini baru muncul setelah ia meniggal, yaitu diberikan oleh Jakob Bernoulli pada tahun 1713 dengan bukunya *Ars Conjectandi*. Dalam probabilitasnya, ia telah memperlihatkan pula masalah permainan, misalnya jika p kemungkinan seseorang untuk menang sejumlah a dan q adalah kemungkinan menang sejumlah b, maka menurutnya boleh mengharapkan untuk menang sejumlah ap + bq.

Pada tahun 1665, Huygens pindah ke Paris untuk menerima penawaran pensiun kepadanya dari Lous XIV. Ketika tinggal di Paris, ia berhubungan dengan Royal Sosiety di London untuk menerbitkan sebuah tulisannya. Materinya membahas masalah percobaan yang berhubungan dengan dua buah benda dalam arah yang diketahui, dan menurutnya tumbukan tersebut adalah sama baik sesudah maupun sebelum terjadi.

Pada tahun 1673, muncul publikasi Huygens yang terbesar di Paris, yaitu pengukuran waktu berdasarkan ayunan. Pekerjaannya itu teridri dari lima bagian. Bagian pertama mengenai bandul yang pernah diterbitkan oleh penulis terdahulu pada tahun 1656. Bagian kedua membicarakan benda jatuh beas dalam hampa udara, dan peluncuruan pada bidang miring yang halus atau disebut pula peluncuran pada bidang miring yang halus atau disebut pula peluncuran sepanjang kurva halus. Di sini ditunjukkan tentang sifat yang sama dari sebuah cycloid yang dibaliknya, yaitu sebuah partikel yang berat akan mencapai dasar busur cycloid yang dibalikkan dalam waktu yang sama dengan yang terjadi dari titik sembarang pada busur dimulainya penurunan.

Pada bagian yang ketiga membahas tentang terjadinya perlakukan terhadap bentuk *evolute* dan "*involute*". Evolute dari sebuah kurva bidang meliputi normal-normal dari sebuah kurva, dan beberapa kurva involute. Sebagai generalisasi dari teorinya, Huygens menemukan evolute dari parabola dan evoloid dalam bentuk ini, ia mempeoleh parabola yang semi kubik dan cycloid dari ukuran yang sama.

Pada bagian yang keempat dari Horogium in ditemukan perlakukan dari susunan bandul dengan sebuah pembuktian, bahwa pusat ayunan dan titik gantungan dapat dipertukarkan.

Baigan terakhir berisikan teori jam itu sendiri. Di sini kita menemukan penjelasan dari bandul cycloid, yang berhubungan dengan perioda dan amplitudo ayunan. Pada bagian terarkhir in dimuat 13 teorema yang berhubungan dengan gaya sentripugal dalam gerak lingkaran disertai dengan pembuktiannya.

Pada tahun 1675, dengan pengarahan Huygens, dibuat jam penunjuk waktu yang pertama yang diatur oleh sebuah keseimbangan pegas. Jam pengukur waktu ini dihadiahkan kepada Louis XIV.

Pada tahun 1681, Huygens kembali ke Belanda. Di sana ia membuat beberapa lensa dengan panjang titik apinya yang besar. Ia telah pula menemukan lensa yang tidak berwarna untuk teleskop.

Pada tahun 1689, Huygens mengunjungi Inggris, dan ia berkenalan dengan Isaac Newton yang mengagumi pekerjaannya. Dalam waktu yang relatif singkat, yaitu pada tahun berikutnya ia di Belanda menerbitkan sebuah risalah yang membahas teori gelombang dan cahaya. Berdarkan teorinya itu, disimpulkan secara geometris hukum pemantulan, pembiasan, dan fenomena-fenomena rangkap pemantulan. Dilain pihak, Newton sangat mendukung dikeluarkannya teori ini, karena dukungan tersebut, teori ini mempunyai keistimewaan, yaitu banyaknya para ilmuwan yang sejaman dengan Huygens yang menyukai teori gelombang.

Huygens telah pula menulis sejumlah risalah kecil lainnya. Diantaraya ia telah menulis kurva logaritmik yang diberikan dalam bentuk yang modern, kemudian berbagai polinom, rumus Fermat untuk maksimum dan minimum, dan telah banyak pula menulis aplikasi matematika untuk fisika.

Seperti beberapa demonstrasi yang diberikan oleh Newton, pembuktian yang diberikan oleh Huygens memakai metode Yunani kuno dengan sifat yang lengkap dan tuntas walaupun masih terasa kaku. Untuk melengkapi pekerjaannya, Huygens telah memperkenalkan metode yang baru dalam geometri analitik dan kalkulus. Huygens meniggal di kota kelahirannya pada tahun 1695

10.6 Matematikawan Italia Abad Tujuh Belas

Ada beberapa matematikawan abad ke-17 yang pekerjaannya akan disebutkan dalam bentuk uraian yang singkat. Dalam tiga fasal berikut akan disebutkan paramatematikawan berdasarkan geografis

Kita telah mencatat seorang bangsawan dari Italia yang benama Galileo yang telah menghargai bentuk anggun sikloida (Cycloid), sehingga karena lengkungan inilah ia telah memberikan dasar arsitektur.

Pada tahun 1599, Galileo mencoba memastikan daerah yang terletak di bawah suatu busur kurva yaitu dengan memperhatikan model sikloida yang dibandingkan terhadap ukuran gerakan dari bagian lingkaran. Namun ia telah menyimulkan bahwa daerah di bawah sebuah busur adalah hampir sama dan tidak tepat tiga kali gerakan lingkaran. Demonstrasi matematika yang pertama memperhatikan bawah daerah tersebut adalah pasti tiga kali gerakan lingkaran. Hasil demonstrasi ini diterbitkan pada tahun 1644 oleh muridnya yang bernama Evangelista Torricelli (1608-1647) dengan memakai metode yang singkat.

Fermat pernah pula mengusulkan kepada Torricelli dalam persoalan menentukan titik pada bidang segitiga sedemikian rupa, sehigga jumlah jaraknya dari ketiga puncak adalah minimum. Jawaban yang diberikan oleh Torricelli baru diterbitkan pada tahun 1654 oleh muridnya yang bernama Viviani. Titik ini sekarang dikenal sebagai titik pusat isigenic dari suatu segitiga. Titik yang menarik perhatian kita ini, sebenarnya telah ditemukan lebih awal dari matematika Yunani kuno. Dan sebauah analisis yang sistimatis dari persoalan ini telah pula diberikan oleh Jacob Steiner.

Pada tahun 1640, Torricelli telah menemukan panjang sebuah busur dari spiral logaritma. Kurva ini telah pula diperbaiki dua tahun lebih awal oleh Descartes, dan merupakan kurva yang pertama sesudah memperbaiki lingkaran.

Torricelli sangat terkenal dengan sumbangannya pada bidang fisika, ia telah mengembangkan teori barometer, persoalan percepatan yang berhubungan dengan gravitasi, teori proyektif dan pergerakan dari benda-benda cair.

Pengikut lainnya dari Galileo yang telah tertarik pada bidang geometri dan fisika, adalah Vincenzi Viviani (1622-1703), yaitu orang yang sangat disukai semasa hidupnya. Ia telah menetukan garis singgung sikloida, namun persoalan ini pernah pula dipecahkan sebelumnya oleh orang lain.

Pada tahun 1962, viviani telah memberikan sebuah persoalan yang telah banyak menarik perhatian masyarakat luas. Masalahnya:

Sebuah lengkungan setengah bola yang mempunyai jendela dalam ukuran tertentu sedemikian rupa, sehingga permukaannya dengan tepat dapat berbentuk bujursangkar, tunjukkan bagaimana kemungkinannya?

Jawaban yang benar telah diberikan oleh matematikawan yang sebaya dengan dia. Sedangkan viviani sendiri memecahkan persoalan tersebut dengan menggunakan sebuah hiperbola dengan sisi-sisi yang

Disebutkan pula tentang keluarga Cassini, dengan beberapa anggotanya yang telah memberikan sumbangan dalam bidang astronomi dan aplikasi matematika. Diantaranya telah dikenla sebuah kurva yang dinamakan Cossinian (Cossinian Curve), yang merupakan tempat kedudukan titik yang dihasilkan dari jarak terhadap dua fokus tetap adalah sesuatu yang konstan. Kurva ini dipelajari oleh Giovanni Domenico Cassini (125-1712) pada tahun 1680 yang berhubungan dengan pergerakan relatif dari bumi dan matahari. Kurva Cossinian dapat ditemukan sebagai perpotongan dari sebuah torus dengan bidang yang paralel kepada sumbu dari torus tersebut.

10.7 Matematikawan Perancis Abad Tujuh Belas

Seorang pengagum Diophantus di Eropa yang berkebangsaaan Perancis, Bachet de Meziriac (1581-1638). Ia telah menulis masalah klasik "*Problems Plaisants et delectables*", yang muncul pada tahun 1612 dan kembali dipertahankannya pada tahun 1624. Tulisan ini berisikan tentang akal dalam aritmetika dan kumpulan soal-soal matematika secara praktis yang semuanya telah pernah dimunculkan sebelumnya.

Pada tahun 1621 Bachet menerbitkan sebuah edisi dari bahasa Yunani, Aritmetika Diophantus, bersama-sama dengan beberapa catatannya sebagai terjemahan dari bahasa Latin. Hal ini dimuat dalam catatan kecil Fermat.

Penulis teori bilangan lainnya adalah Minimite Friar Marin MERsenne (1588-1648). Pada masa hidupnya ia berkorespodensi secara terus menerus dengan para matematikawan lainnnya, dan dia diberi pujian sebagai seorang pemberi ide dalam matematika. Secara khusus telah dikenal suatu bilangan yang disebut bilangan *Prima* dari bentuk $2^p - 1$, yang ditulis dalam karnya *Cogitata Physico – mathematica* pada tahun 16444. Kaitan diantara bilangan prima mersenne dengan bilangan sempurna (ferfect number) ditunjukkan dalam pasal 3-3. Bilangan prima Mersenne untuk p = 4253, adalah bilangan prima yang pertama dikenal yang memiliki lebih dari 1000 angka.

Claude Mydorge (1585-1647), teman Descartes, adalah seorang ahli geometri dan fisika. Dan menerbitkan beberapa tulisan yang berhubungan dengan optik dan bentuk – bentuk kerucut untuk mempermudah bukti-bukti dalil Apollonius. Selain dari itu, Claude telah meninggalkan sebuah naskah yang menarik yang memuat pemberitahuan dari jawaban yang lebih dari 1000 persoalan geometri,

Ahli geometri dan fisika lainnya yang sering berkorepondensi dan bertindak sebagai perantara ide matematika, adalah Gilles Persona de Roberval (1602-1675). Dia menjadi terkenal, karena metodenya dalam menggambar garis singgung dan penemuannya dibidang kurva pangkat tinggi. Sebagai contoh, dalam hal parabola, kita mungkin mempertimbangkan dua pergerakan sebagai jalan yang berasal dari titik fokus dan direktriks. Karena jarak perpindahan titik dari fokus dan direktriks adalah sama, maka vektor kecepatan dari dua gerakan haruslah sama. Garis singgung di suatu titik pada parabola membagi dua sudut antara tali busur yang melalui fokus (focal radius=focal chord) dengan garis yang tegak lurus direktriks yang melalui titik singgung, ide garis singgung ini pernah pula diberikan oleh Torricelli.

Roberval pernah pula mengusulkan kepada penemu metode prakalkulus Cavalieri tentang mengkuadratkan sikloida sebelum Torricelli. Namun Robeval sendiri terus menerus terlambat dalam meperlihatkan penemuannya, kejadian ini merupakan hal yang sulit untuk diselesaikan. Keterlambatan ini telah dijelaskan oleh fakta yang berlangsung selama 40 tahun, yang dimulainya sejak tahun 1634

Roberval pernah menduduki kursi jabatan guru besar di Colege Royale. Kursi ini diisi setiap tiga tahun oleh persaingan terbuka dalam kontes matematika, sedangkan persoalannya dikemukakan oleh pemegang jabatan tersebut. Dalam beberapa kejadian. Roberval telah berhasil menggunakan metode bagian yang tidak dapat dibagi-bagi lagi yang dipergunakan untuk mencari luas daerah-daerah dan volume-volume yang tertentu.

Kita telah melihat pada pasal yang lalu tentang kerja yang telah dilakukan oleh Phillipe de la Hire (1640-1716). Ia orang jenius yang mempunyai banyak keahlian, diantaranya bidang arsitek, astronomi dan matematika. Ia telah menjelaskan masalah irisan kerucut. Menulis metode grafik. Selain dari itu Phillipe telah pula membuat peta dunia dengan mengambil pusat proyeksi tidak pada pusat bola, tetapi jari-jarinya didapatkan melalui titik kutubnya dengan jarak dari r sin 45^0 ke sebelah luar kota.

10.8 Matematikawan Inggris, Abad ketujuh Belas

Inggris mempunyai ahli-ahli matematika dari abad ke-17 yang kurang mendapat perhatian. Kita telah mengenal William Oughtred (1574-1660), dilain tempat terdapat matematikawan lainnya yang bernama Viscount Brouncker (1620-1684). Ia adalah seorang pendiri dan presiden pertama dari Royal Society di London. Ia mempunyai banyak relasi dengan para ahli matematika lainnya terutama dengan Wallis dan Fermat.

Brouncker telah menulis perbaikan masalah parabola dan sikloida, juga ia tidak merasa keberatan untuk menyatakan jumlah deret tak hingga yang oleh dia sendiri tidak dapat ditentukan. Sebagai akibatnya dalam menentukan daerah yang dibatasi oleh hiperbola siku-siku xy = 1, sumbu x, x = 1 dan x – 2 adalah sama dengan

1/(1) (2) + 1/(3) (4) + 1/(5) (6) + ……..

Dan

1- ½ + 1/3 – ¼ + ….

Brouncker adalah orang Inggris pertama yang menulis hasil penelitian tentang penggunaan pecahan yang terus-menerus.

Matematikawan Inggris lainnya, yaitu James Gregory (1638-1675). Pada tahun 1668 dan 1674. Ia telah berhasil menjadi guru besar matematika di St. Andrews dan di Edinburgh. Dalam bidang fisika, ia telah pula menerbitkan sebuah karyanya tentang optik yang menjelaskan pencerminan pada teleskop, sehingga namanya menjadi terkenal.

Pada tahun1667, Gregory telah memperdalam matematika dan menjelaskan tentang deret tak hingga arc tg x, arc sec x dan telah pula membedakan deret konvergen dan divergen

Selain dari itu, Gregory telah pula membuat sesuatu yang cerdik tetapi tidak mempunyai pembuktian yang memuaskan, bahwa membujursangkarkan suatu lingkaran dari Euclid adalah tidak mungkin. Deret

Arc tg x = $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$.

Yang mempunyai peran besar dalam perhitungan harga π (phi). Gregory meninggal pada usia muda setelah mengalami kebutaan sebagai akibat penelitian astronominva.

David Gregory (1661-1708) juga sebagai guru besar matematika di Edinbutgh sejak tahun 1684 sampai 1691 setelah ditunjuk guru besar Savilian dari Oxford. Ia terkenal pula dalam bidang optik dan geometri.

Seorang guru besar astronomi yang menduduki jabatan Savilian di Oxford dari tahun 1661 sampai 1673 adalah Sir christopher Wren (1632-1723). Ia dikenal pula sebagai seorang ahli matematika bahkan arsitektur. Ia telah beberapa kali memegang jabatan presiden Royal Society.

Robert Hooke (1635-1703) dan Edmund Halley (1656-1742) adalah orang-orang yang mencapai kemashuran dalam menggabungkan beberapa bidang matematika.

Hampir 40 tahun, Hooke menjadi guru besar geometri di Gresham College. Ia dikenal oleh setiap mahasiswanya, karena penemuannya yang diberikan dalam perkuliahan fisika dasar, yaitu berhubungan dengan hukum yang mengaitkan tekanan dan tegangan dari sebuah pegas elastis.

Hooke telah menemukan bandul irisan kerucut, dan telah pula mencoba hukum gaya (yang kemudian diketemukan oleh Newton) perputaran planet-planet di bawah pengaruh matahari.

Hooke dan Huygens, kedua-duanya merancang jam penunjuk waktu yang diatur oleh keseimbangan pegas.

Orang lainnya, yaitu Edmund Halley telah menggantikan Wallis sebagai Savilian dan menjadi guru besar geometri. Kemudian ia dikenal pula sebagai ahli astronomi

Halley diperkirakan telah mengembalikan Buku VIII karya Apollonius tentang irisan kerucut yang telah lama hilang. Kemudian ia menerbitkan bermacam-macam buah tangan orang Yunani kuno yang diterjemahkan dari bahasa Arab, sekalipun ia tidak mengetahui satu patah katapun dalam bahasa itu.

Sumbangan Halley yang paling besar dan terpenting adalah dalam bidang astronmi yang telah ditulis dalam mutu yang baik. Seperti halnya Hooke, Halley adalah orang yang baik budi dan murah hati dalam segala urusan dengan sekolah. Banyak sekali karya mereka yang dibahas dalam abad ke-18

10.9 Matematikawan Jerman dan Negara-Negara Kecil Abad ke – 17

Kemajuan yang memberikan harapan yang baik untuk bidang matematika selama abad ke – 16 diberikan oleh Jerman, namun tidak diteruskan sampai abad ke – 17. Perang yang berlangsung selama 30 tahun (1618-1648) menimbulkan kegelisahan dalam negara, sehingga mengakibatkan abad yang tidak menguntungkan dalam kemajuan ilmu pengetahuan

Kapler dan Liibhniz adalah sebagai bukti matematikawan Jerman

Disini, kita akan menyebutkan Ehrenfried Walther von Tschirhausen (1651-1708) yang telah banyak menghabiskan waktunya untuk matematika dan fisika. Ia telah meninggalkan kesannya untuk teori persamaan dan kurva.

Pada tahun 1682, Tschirnhausen telah memperkenalkan kurva *Catacaustic*, yaitu kurva yang meliputi garis-garis sinar cahaya yang dipancarkan dari titik sumber sesudah pemunculan dari sebuah kurva yang diketahui. Persamaan spiral sinusoida, $r^n = a \cos n\theta$, dengan θ adalah bilangan rasional yang kemudian dipelajari oleh Colin Maclaurin pada tahun 1718.

Teori transformasi, yaitu merubah persamaan polinom pangkat n dalam x ke dala polinom pangkat n dalam y, dengan koefisien-koefisien y^{n-1} dan y^{n-2} kedua-duanya adalah nol. Kemudian pada tahun 1834, G.B Jerard menemukan sebuah transformasi Tschirnhasen yang merubah persamaan polinom pangkat n dalam x kepersamaan polinom pangkat n dalam y, dengan koefisien-koefisien y^{n-1} dan y^{n-2}, dan y^{n-3} semuanya adalah nol. Tranformasi ini digunakan pada persamaan pangkat lima, dan pernah diberikan oleh E. S Bring pada tahun 1786. Namun jawaban dari persamaan pangkat lima yang diberikan Bring dengan menggunakan fungsi-fungsi eliptik tidaklah jelas.

Disamping beberapa negara Besar seperti telah kita sebutkan di atas, dikenali pula beberapa negeri kecil disekitarnya yang telah melahirkan sejumlah matematikawan yang tidak begitu dikenal pada abd ke- 17

Willebrord Snell (1580 atau 1581-1626) telah dikenal dengan karyanya tentang lingkaran. Ia dikenal sebagai anak ajaib, dikatakan bahwa pada usia 12 tahun telah memperkenalkan matematika yang standard yang berlaku pada waktu itu. Selain itu, ia telah pula melakukan penelitian tentang sifat-sifat segitiga bola yang selanjutnya banyak dibicarakan oleh Viete.

Albert Girard (1959-1632) yang pernah tinggal lama dinegara Belanda. Ia tertarik pada masalah geometri dan trigonometri. Pada tahun 1626, ia menerbitkan sebuah risalah trigonometri yang muat pemakaian singkatan untuk pertama kalinya. Misalnya, ia telah memakai singkatan Sin, Tan, Sec masing-masing untuk Sinus, Tangan, dan Secans. Selain itu, ia dikenal pula sebagai orang yang mempunyai keahlian dalam aljabar terutama untuk masalah pangkat. Ia pernah pula mengedit beberapa karya Simon Stevin.

Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) yang hidup di sekitar abad ke-17. Ia telah mempergunakan metode pra-kalkulus untuk menyelesaikan bermacam-macam persoalan pangkat dua.

Frans van Schoten the Younger (1615-1660 atai 1661), adalah penulis tentang prespektif karya Vieta dan beberapa karya Vieta lainnya. Perlu pula diketahui bahwa ayahnya yang bernama Frans van Schootente Elder, dan sodaranya Petrus van Shooten juga professor-professor matematika yang ternama.

Johann Hudde (1633-1730) seorang walikota Amsterdam pernah menulis masalah maksimum dan minimum. Kemdian ia menulis pula masalah teori persamaan. Dalam tulisannya ini, ia memberikan sebuah aturan singkat untuk mencari akar-akar ganda dari sebuah polinom. Metode ini sama dengan metode yang berlaku seperti sekarang.

Rene Francois Walter de Sluze (1622-1685) telah banyak menulis risalah matematika. Ia banyak membahas masalah spiral, titik belok dan cara mencarinya secara geometris. Suatu kelompok kurva-kurva dengan bentuk umum:

$Y^n = k\ (a - x)\ P\ x^m$,

Dengan pangkat-pangkatnya anggota bilangan bulat positif disebut Mutiara dari Sluze (Pearls of Sluze)

Kita akhiri dengan mengenal nicolaus Mercator ($\pm$ 1620-1687) yang lahir di Holstein termasuk dalam wilayah Denmark, tetapi ia banyak melakukan kegiatan hidupnya di Inggris. Ia pernah mengedit Element Euclid, menulis trigonometri, astronomi, perhitungan logaritma, dan kosmografi. Deretnya dalam bentuk:

$\text{Ln}(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots..$

Yang lepas dari penemuan saint-vincent, kadang-kdang disebut sebagi Deret Mercator (Mercator Series). Deret tersebut adalah konvergen untuk $-1 < x \leq 1$, dan dapat dipergunakan untuk perhitungan logaritma.

Perlu pula diketahui bahwa bola dunia yang dikenal sebagai proyeksi mercator (Mercator Projection) yang memunculkan loxodromes sebagai garis lurus, bukanlah hak dari Nicolous Mercator, tetapi konsep ini adalah miliknya Gerhardus Mercator (1512

Akademi, Masyarakat dan Majalah

Keamajuan besar yang terjadi dalam bidang sains dan matematika sebelum adanya majalah sebagai media komunikasi, dicapai melalui pertemuan-pertemuan. Akhrinya, kelompok-kelompok berkumpul dalam suatu akademik. Akademi yang pertama didirikan di Neples pada tahun 1650, kemudian diikuti oleh Akademi dei lincei di kota Roma pada tahun 1603

Pembanguan dan perkembangan akademi berikutnya, bergerak. Terutama pada abad ke-17. Royal socitey didirikan di London pada tahun 1662, dan akademi Perancis didirikan pada tahun 1666. Di akademi-akademi ini didirikan pusat-pusat pengkajian karya-karya ilmiah, dengan cara mempresentasikan dan mendiskusikannya

Keperluan akan majalah untuk menginformasikan pengetahuan yang baru dan penemuan-penemuan matematika semakin terasa, dan jika kita lihat pada hari ini maka perluasan bacaan seperti itu telah menjadi kebutuhan pokok.

Sebelum tahun 1700, seseorang dapat menghitung jumlah majalah yang ada yang tidak lebih dari 17 macam majalah. Majalah yang memuat artikel matematika yang pertama muncul pada tahun 1665. Pada abad ke-18, ada sebanyak 210 majalah seperti itu yang muncul, dan pada ke-19 jumlah majalah ilmiah (jurnal-jurnal) yang muncul telah mencapai 950 macam. Namun dari beberapa jurnal tersebut sering mempunyai kaitan yang relatif kecil dengan matematika murni.

Jurnal yang paling tua yang pernah beredar dan memberikan andil dalam mamajukan matematika, adalah jurnal dari Perancis, yaitu “Journal de l’Ecola Polythechique”. Jurnal tertua ini pertama kali diedarkan pada tahun 1794.

Sejumlah jurnal untuk matematika dasar dimulai lebih awal, namun beberapa diantaranya telah memberikan hadiah berupa uang terhadap teka-teki dan persoalan yang lebih bersifat mamajukan pengetahuan matematika. Beberapa majalah matematika tingkat tinggi dimulai dalam pertengahan abad ke-19. Diantaranya yang paling terkemuka adalah jurnal dari Jerman yang berjudul Journal Furdie Feine und Angewandte Mathematik”, yang diterbitkan pada tahun 1826 oleh A.L. Crelle. Jurnal yang terkemuka lainnya, adalah jurnal dari perancis yang berjudul “Journal de mathematiques pures et appliquess” yang muncul pada tahun 1836 dengan redaktur J.

Lioville. Kedua jurnal terkemuka ini sering disebut "Journal Crelle" dan Journal Liouville", sesuai dengan nama-nama pendirinya.

Di Inggris terdapat Jurnal matematika Cambridge (cambridge Mathematical Journal), didirikan pada tahun 1839. Selanjutnya dari tahun 1846 sampai tahun 1854, jurnal ini menjadi jurnal Matematika cambridge dan Dublin. Kemudian sejak tahun 1855, jurnal ini dikenal dengan judul Jurnal Triwulan matematika murni dan aplikasinya.

American Journal of Mathematics" didirikan pada tahun 1878 dengan redakturnya J. J. Sylvester. (1834-1897). Selanjutnya, tetap yang lebih awal yang banyak memberikan sumbangan yang menarik untuk para guru matematika, adalah Archiv der Mathematik and Physik yang didirikan pada tahun kedua dalam pertengahan abad ke-19 ada sesuatu kekuatan yang mengembangkan peningkatan jumlah jurnal matematika yang berkualitas tinggi. Hal ini disebabkan adanya sejumlah majalah matematika umum yang mempunyai keteraturan sebagai media komunikasi yang resmi.

Majalah umum yang pertama adalah London Mathematical Society. Majalah ini diorganisir pada tahun 1865 dan segera melakukan penerbitan dalam jumlah yang cukup banyak. Majalah ini telah menjadi milik masyarakat banyak, karena menjadi majalah nasional di Inggris. Tujuh tahun kemudian, di Perancis didirikan, Societe Mathematique de France", dan selanjutnya jurnal ini dikenal dengan nama Bulletin

Di Italia, pada tahun 1884 diterbitkan matematika untuk masyarakat umum yaitu Circolo Matematico di Palermo. Masih disekitar waktu ini majalah masyarakat Matematika edingbrgh diterbitkan di skotlandia.

Perhimpunan Matematika Amerika (The American Mathematical Society), mulai menerbitkan "Bulletin" pada tahun 1888. Kemudian Transaction" pada tahun 1900, dan "Proceeding" pada tahun 1950.

Jerman telah pula memiliki perhimpunan matematika Deutsche Mathematiker Vereinigung yang didirikan pada tahun 1890, dan mulai menerbitkan jurnalnya pada tahun 1892. Jurnal ini memberikan sejumlah laporan yang luas tentang perkembangan matematika. Laporan yang demikian ini kadang-kadang mencapai ratusan halaman. Laporan ini mungkin sebagai pelopor ensiklopedia matematika. Jurnal matematika lainnya yang tidak boleh kita lupakan adalah jurnal yang pernah diterbitkan di Uni Soviet.

Pada saat sekarang ini, hampir semua negara telah mempunyai perhimpunan matematika. Perhimpunan ini telah menjadi kekuatan organisasi dalam mengembangkan aktifitas penelitian matematika, dan dalam meningkatkan pengajaran matematika. Sangat mengahargai sekali kepada para peneliti dalam jurnal Matematical Review, yang disponsori oleh sejumlah organisasi matematika di Amerika dan di luar Amerika. Jurnal ini pertama kali muncul pada tahun 1940. Adapun isinya membuat ringkasan (abstract) dan review dari berbagai literatur matematika yang sedang beredar di dunia.

BAB XI
KONSEP-KONSEP RELASI DAN KALKULUS

11.1 Pendahuluan

Dalam abad ke-17, kita telah melihat bagaiman banyaknya penemuan baru dalam matematika yang lebih menitikberatkan pada prinsif dan konsep yang bersifat luas. Hal ini mengakibatkan era tersebut menjadi sangat terkenal dalam sejarah perkembangan matematika.

Pada akhir abad ke-17, Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Liebniz telah menemukan kalkulus. Karena penemuan besar inilah telah mengakibatkan abad ke -17 menjadi abad yang paling luar biasa dalam prestasi matematika. Dengan penemuan ini mengantarkan kreasi matematika ketingkat yang lebih tinggi, yang berarti mengakhiri sejarah matematika yang bersifat mendasar.

Bagian pembicaraan kita yang sekarang, merupakan cerita singkat mengenai pengertian dasar dan pengembangannya tentang konsep-konsep kalkulus. Konsep kalkulus ini telah cukup jauh jangkauan dan pengaruhnya terhadap dunia modern sekarang ini, dan telah dapat kita rasakan sebagai sesuatu hal yang cukup besar. Pada saat ini, ilmu tersebut telah menjadi tuntutan pendidikan sain dan teknologi kearah yang lebih baik.

Hal yang sangat menarik perhatian bahwa perkembangan konsep-konsep kalkulus penyajiannya berlawanan dengan yang kita dapatkan di bangku perkuliahan. Dalam mempelajari kalkulus, kita mulai dengan pengertian diferensiasi dilanjutkan dengan pengertian integrasi. Namun dalam sejarahnya, kalkulus integral dekembangkan sebelum kalkulus deferensial.

Untuk pertama kali munculnya ide penyajian pengintegralan berhubungan dengan pemakaian perhitungan luas daerah, volume, dan panjang busur. Namun, kadang-kadang dilanjutkan pula dengan penyajian pendiferensialan yang berhubungan dengan pembahasan soal-soal garis singgung dari beberapa kurva, dan persamaan-persamaan yang berhubungan dengan maksimum dan minimum dari suatu fungsi. Selanjutnya, setelah dikaji dengan seksama ternyata bahwa permasalahan integral dan diferensial satu sama yang lainnya mempunyai kaitan yang sama erat seperti halnya operasi-operasi invers.

Sebagian besar cerita mengenai abad ke-17 ini, haruslah dimulai lagi dengan meninjau kembali beberapa perkembangan matematika di jaman Yunani Kuno dan dongengan matematika abad ke-5 sebelum masehi.

11.2. Paradoks Zeno

Apakah kita akan mengasumsikan bahwa suatu besaran (magnitude) dapat dibagi-bagi tak terhingga, atau ia merupakan susunan dari patikek-partikel kecil seperti atom yang jumlahnya sangat besar sehingga jumlahnya tidak dapat dibagi lagi? munculnya asumsi yang pertama lebih pantas untuk digunakan kebanyakan orang, tetapi pemakaian asumsi yang kedua untuk penelitian dan penemuan merupakan kemustahilan. Ada bukti-bukti yang memperlihatkan bahwa pada jaman Yunani Kuno, pemakaian kedua asumsi itu di sekolah-sekolah yang memakai pola berfikir matematika telah dikembangakan pemakaiannya.

Timbulah beberapa kesulitan sebagai akibat dari penemuan pola berfikir secara logika yang terpisah dari asumsi-asumsi itu mulai nampak pada abad ke-5 SM. Pemisahan yang menyolok sebagai ketidak setujuan terhadap pemikiran para akhli pada saat itu, dikemukakan oleh seorang filsuf dari Elea yang bernama Zeno ($\pm$450 SM). Zeno telah mengemukakan empat buah pemikiran yang kemudian lebih dikenal dengan paradoks Zeno.

Paradoks Zeno telah berpengaruh besar dalam pemikiran matematika. Ia mengemukakan, bahwa kita tidak mungkin untuk mengasumsikan suatu besaran dapat dibagi-bagi menjadi tak tehingga, atau terdiri dari partikel-partikel kecil seperti atom yang jumlahnya sangat besar.

Sebagai ilustrasi dasarnya dari paradoks Zeno itu, adalah dua hal berikut ini.

Pembagian Dua (The Dichotomy):

Jika suatu segmen lurus dapat dibagi tak terhingga, maka hal ini adalah suatu hal yang tidak mungkin. Dalam hal ini, untuk membagi suatu segmen garis perlu ditentukan titik tengahnya. Kemudian bagian-bagian yang lainnya dibagi lagi menjadi seperempat bagian, dan yang seperempat bagian dibagi lagi menjadi seperdelapan bagian, dan seterusnya sampai tak terhingga kali. Hal seperti ini memperlihatkan, bahwa pembagian tak hingga banyaknya titik tengah dalam waktu yang terhingga adalah tidak mungkin, kita tidak mungkin sampai ke titik ujung segmen tersebut. Jadi, membagi suatu segmen garis menjadi dua bagian yang sama tigak akan dapat dimulai.

Anak Panah (The Arrow):

Jika pada waktu anak panah itu memenuhi saat saat struktur yang tidak dapat dibagi lagi, maka arah anak panah itu akan selalu tidak bergerak, karena anak panah itu untuk beberapa saat ada pada posisi tertentu. Karena hal seperti demikian adalah benar untuk setiap saat, maka anak panah itu tidak pernah bergerak untuk berpindah tempat.

Banyak penjelasan mengenai paradok Zeno yang telah diberikan, namun tidaklah sulit untuk memperlihatkan bagaimana mereka menolak paradoks. Mereka menolaknya berdasarkan intuisi bahwa jumlah tak terhingga dari bilangan positif besarnya adalah tak terhingga, jumlah tak terhingga dari besaran-besaran yang kecil adalah tak terhingga ($\sum_{i=1}^{\infty} \in i = \infty$), dan juga jumlah bilangan yang tak terhingga dari besaran yang dimensinya atau ukurannya nol adalah nol (n x 0 = 0 dan ∞ x 0 = 0).

Adapun motif yang dimaksudkan oleh paradoks-paradoks itu adalah menghapuskan variabel-variabel yang menuju nol sebagai limit dari geometri demonstrative Yunani.

11.3 Metode Menghabiskan Eudoxus

Problem pertama yang muncul dalam sejarah kalkulus adalah yang berkaitan dengan melakukan perhitungan luas, volume, dan panjang busur. Sedangkan cara untuk melakukannya, yaitu dengan menggunakan salah satu dari kedua asumsi tentang pembagian jarak seperti yang telah kita pertimbangkan di atas.

Salah satu sumbangan pemikiran yang penting dalam masalah membujursangkarkan suatu lingkaran telah dikemukakan oleh Antiphon, seorang pemikir sesat pada masa Socrates ($\pm$430 SM). Antiphon telah menyatakan pendapat barunya. Ia menyatakan bahwa melipatgandakan jumlah sisi-sisi poligon beraturan yang terletak di dalam lingkaran, ternyata bahwa perbedaan luas daerah antara polygon beraturan dengan luas daerah lingkarannya adalah bagian sisa (yaitu bentuk yang tidak terletak pada bagian dalam lingkaran). Sebagai akibatnya, kita dapat membentuk suatu bujur sangkar yang mempunyai luas daerah yang sama dengan sembarang polygon. Karena hal inilah maka memungkinkan kita dapat melukis suatu bujursangkar yang mempunyai luas daerah yang sama dengan suatu lingkaran (membujursangkarkan suatu lingkaran).

Argumen dari Antiphon seperti yang telah dikemukakan di atas, segera mendapat kecaman yang luar biasa. Pernyataan seperti itu telah melanggar prinsip yang menyatakan bahwa besaran-besaran (magnitudes) dapat dibagi tanpa batas (limit), dengan demikian proses Antiphon tidak menyelesaikan masalah. Meskipun demikian, keberanian Antiphon telah mengundang ketenaran tentang Metode Menghabiskan (Method of exhaustion) dari Yunani.

Metode Menghabiskan yang terkenal itu, telah pula diungkapakan oleh Eudoxus ($\pm$ 370 SM) dan barangkali dapat dianggap sebagai jawaban sekolah Platonic terhadap paradok Zeno. Metode ini mengasumsikan tentang pembagian tak hingga kali dari suatu besaran, dan merupakan dasar dari preposisi:

"Jika suatu besaran dikurangi sebagian sebanyak tidak kurang dari setengahnya, dan dari bagian sisa sikurangi lagi sebanyak tidak kurang pula dari setengahnya, dan seterusnya, maka banyaknya besaran yang tertinggal akan lebih kecil dari setiap pengurangnya tetapi masih merupakan besaran yang mempunyai jenis yang sama dengan besaran semula".

Sebagai contoh, marilah kita melihat pemakaian "Metode Menghabiskan" untuk membuktikan, bahwa jika A_1 dan A_2 berturut-turut adalah luas daerah dari dua buah lingkaran yang berdiameter d_1 dan d_2, maka:

$$A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2$$

Pertama-tama kita perlihatkan bantuan perbandingan dasar, bahwa perbedaan luas daerah lingkaran dengan poligon beraturan yang terlukis didalamnya dapat dibuat sekecil mungkin seperti yang kita inginkan. Misalnya AB, pada gambar 11.1 merupakan sebuah sisi dari poligon berturan yang terlukis di dalam lingkaran, dan M adalah titik pusat busur AB. Karena luas daerah segitiga AMB adalah setengah dari segiempat ARSB, dan lebih besar dari setengah luas daerah tembereng AMB, hal ini berarti bahwa dengan melipatgandakan jumlah sisi dari poligon beraturan yang terlukis, maka kita akan mendapatkan pertambahan perbedaan luas daerah antara poligon dengan lingkaran. Jika penambahan jumlah sisi poligon, maka selisih luas antara poligon dengan lingkaran menjadi setengah kali dari selisih semula. Sebagai akibatnya, dengan melipatgandakan jumlah sisi-sisinya secara terus menerus, maka kita akan dapat membuat perbedaan luas daerah antarpoligon dengan lingkaran menjadi beberapa lipat lebih kecil daripada yang digambar, dan perbedaan ini dapat kita buat sekecil mungkin.

Sekarang kita kembali lagi kepada teorema, dan diperkirakan sebagai pengganti kesamaan kita mempunyai:

$$A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$$

Sebagai akibatnya, kita dapat melukiskan dalam lingkaran yang pertama sebuah poligon beraturan yang luas daerahnya sebesar P_1, yang selisihnya cukup kecil dengan A_1, sehingga kita dapatkan:

$$P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$$

Misalkan P_2 adalah sebuah poligon beraturan yang sama dengan P_1, tetapi dilukiskan pada lingkaran yang kedua. Akibatnya menurut teorema yang diketahui, tentang poligon beraturan yang sama,

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$$

Hal berikutnya bahwa;

$$P_1 : A_2 > P_1 : P_2 \text{ atau } P_2 > A_2$$

Suatu keanehan, karena luas daerah dari poligon beraturan tidak dapat melebihi luas daerah lingkaran yang mengelilinginya. Dengan cara yang sama, kita akan memperlihatkan bahwa kita tidak akan mempunyai:

$$A_1 : A_2 < d_1^2 : d_2^2$$

Konsekuensinya, dengan melakukan dua kali lipat proses "reduction ad absurdum", kita memiliki teorema yang tidak dapat dipungkiri lagi. Jadi, jika A adalah luas daerah suatu lingkaran dengan d sebagai diameternya, maka A = kd^2, dengan k adalah sebuah konstanta (umumnya $\pi/4$) adalah sama untuk setiap lingkaran.

Archimedes mempertegas apa yang pernah ditetapkan oleh Democritus ($\pm$410 SM), bahwa volume sebuah piramid dengan alas poligon sebarang adalah sepertiga dari prisma dengan alas dan tinggi yang sama. Sebenarnya hanya sedikit sekali teorema yang diketahui oleh Democritus, tetapi dengan kerja keras ia telah berhasil memberikan teoremanya dengan demonstrasi yang teliti. Karenanya, suatu prisma dapat disusun sebagai jumlah dari semua prisma alas segitiga, dan sebaliknya. Selanjutnya, sebuah prisma dapat disusun menjadi tiga buah piramid dengan alas berbentuk segitiga, dan tiap pasangan selalu mempunyai alas yang ekuivalen dengan tinggi yang sama. Berikutnya persoalan besar yang diperlihatkan oleh Democritus, yaitu tentang dua buah piramid dengan tinggi yang sama dan alas yang ekuivalen (sebanding) akan mempunyai volume yang sama. Demonstrasi ini selanjutnya dilengkapi oleh Eudocus dengan menggunakan metode menghabiskan.

Bagaimana langkah berikutnya sehingga Democritus dapat menemukan hasil akhir? Suatu saran yang diberikan oleh Plutarch merupakan pelengkap yang mempertemukan dilema yang dijumpai oleh Democritus. Masalahnya diketemukan ketika ia memperhatikan sebuah kerucut yang dibangun dari sejumlah besar irisan-irisan antara bidang yang sejajar dengan alas. Jika dua bidang yang berbatasan *("adjacent")* mempunyai ukuran yang sama, maka pengisinya bukan kerucut, melainkan sebuah silinder. Sebaliknya, jika dua buah bidang yang berbatasan memiliki luas daerah yang berbeda, maka permukaan pengisi atau pemadatnya akan dipecah-pecah menjadi beberapa bagian yang lebih kecil, yang tentunya bukanlah merupakan kotak. Di sini, kita memperoleh asumsi mengenai pembagian suatu besaran (magnitude) yang kemungkinannya dapat dilanjutkan, sehingga memerlukan dua buah asumsi sebagai pertimbangannya. Untuk ini, kita mengasumsikan bahwa volume sebuah kerucut dapat dibagi secara tak terhingga, yaitu menjadi bidang-bidang yang tak terhingga jumlahnya, tetapi bagian-bagian bidang itu dapat dihitung. Hasil perhitungannya akan sangat berguna untuk membantu menyelesaikan persoalan yang lainnya.

Sekarang Democritus telah membuktikan, bahwa jika dua buah piramid dengan alas yang ekuivalen dan tinggi yang sama, dipotong oleh bidang-bidang yang sejajar dengan alas, sehingga membagi alas dan tinggi dalam perbandingan yang sama, maka bagian-bagian yang berkorespondensi yang terbentuk adalah ekuivalen. Karena itu, piramid-piramid memuat sejumlah tak hingga bidang-bidang datar yang ekuivalen, dan sebab itulah maka mempunyai volume yang dapat dicari dengan rumus yang sama. Hal ini merupakan awal dari "Metode tak terbagi" *(Method of indivisibles)* dari Capalieri yang akan kita jumpai dalam fasal 11-6.

Pada zaman Yunani kuno, Archemedes telah memberikan aplikasi yang paling baik tentang metode menghabiskan, dan pada masa berikutnya telah menjadi topik perdebatan yang paling actual untuk pengintegralan. Salah satu contoh pemulanya adalah masalah quadratur dari sebuah segmen parabolik (*parabolic segment*).

Misalkan C, D, dan E yang terletak pada busur segmen parabolik, yang diperoleh dengan menarik LC, MD, dan NE sejajar terhadap sumbu parabola yang melalui titik-titik tengah L, M, N dari AB, CA dan CB.

Menurut geometri dari parabola Archemedes diperlihatkan bahwa:

$$\Delta CDA + \Delta CEB = (\Delta ACB)/4$$

Dengan memakai pendapat ini secara berulang-ulang, dapatlah kita mencari luas daerah segmen parabola, sebagai berikut:

$$\Delta ABC + (\Delta ABC)/4 + (\Delta ABC)/4^2 + (\Delta ABC)/4^2 + \ldots\ldots..$$

$$= \Delta ABC\ (1 + 1/4 + 1/4^2 + 1/4^2 + \ldots\ldots)$$

$$= (4/3)\ \Delta ABC$$

Di sini kita telah mempersingkat pekerjaan, yaitu dengan menggunakan pendekatan dari jumlah geometri, sedangkan Archemedes telah menggunakan reduction ad absurdum yang berlipat ganda dari metode penghabisan.

Dalam penjelasannya, khusus mengenai luas dan volume, sebenarnya Archemedes telah menggunakan ekuivalen jumlah integral tertentu, yang tentunya bagian ini akan kita jumpai dalam buku-buku pelajaran kalkulus dasar.

11.4 Metode Kesetimbangan Archemedes

Metode menghabiskan (Method exhaustion) adalah metode yang penuh ketelitian, namun metode ini masih bersifat hampa. Dengan kata lain, metode tersebut hanya dapat digunakan sebagai alat penyelesaian yang baik, jika rumus yang lainnya diketahui, tetapi rumus itu sendiri tidaklah dapat menemukan hasil jika ia berdiri sendiri. Metode menghabiskan sangat banyak menuntut induksi matematika. Selanjutnya bagaimanakah perkembangan metode menghabiskan itu? Apakah formula yang ditemukan oleh Archemedes ditetapkan dengan bantuan metode menghabiskan?

Pertanyaan di atas baru menjadi jelas pada tahun 1906 M, yaitu setelah Heiberg menemukan catatan Archemedes di Constantinopel. Catatan Archemedes ini dialamatkan kepada Eratosthenes, dan naskah kuno atau manuskrip ini dikenal dengan nama Long Lost Method.

Naskah Archemedes tersebut didapatkan berupa sebuah palimsest (lihat fasal 1-8), yang kemudian ditulis kembali pada abad ke-10 dalam kertas yang dibuat dari kulit. Namun pada abad ke-13 naskah kuno tersebut rusak, dan ditulis kembali dari naskah lain yang sebenarnya dapat dipertanggungjawabkan. Namun sebagian besar dari naskah asli masih beruntung dapat dilindungi dari kerusakan tulisannya.

Di sini, kita akan melihat landasan ide dari metode Archemedes. Untuk mencari luas daerah atau volume yang diperlukan, potonglah bagian atasnya dalam jumlah yang sangat banyak yang terdiri dari bidang-bidang datar yang tipis dan sejajar (lapisan-lapisan yang sejajar). Kemudian tempelkanlah potongan-potongan tersebut pada salah satu ujung pengungkit yang diberikan, dengan demikian salah satu ujungnya mendapatkan muatan dan pusatnya diketahui. Sebagai ilustrasi dari metode tersebut, akan digunakan untuk mendapatkan rumus volume bola.

Misalkan r adalah jari-jari bola. Tempatkanlah bola tersebut dengan diameter polar sepanjang sumbu mendatar x dengan kutub utara N pada titik pangkal. Lukiskan silinder dan kerucut yang dihasilkan dari perputaran sudut NABS dan segitiga NCS mengelilingi sumbu x. Sekarang potonglah ketiga benda tersebut dengan suatu irisan tipis secara vertikal (diasumsikan bahwa ketiganya berbentuk silinder yang datar) sejauh x dari N dengan tebal Δx. Secara aproksimasi, volume dari irisan tersebut adalah:

Bola	: π x (2r – x) Δx
Silinder	: $\pi r^2 \Delta x$
Kerucut	: $\pi x^2 \Delta x$

Berikanlah pegangan pada T sebagai irisan dari bola dan kerucut, dengan TN = 2r. Gabungan “moment’ disekitar N adalah

$$\{\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2 \Delta x\}2r = 4\pi . r^2 x . \Delta x.$$

Jika ini kita teliti, ternyata sebesar empat kali “moment” dari potongan tempat irisan silinder, apabila irisan itu terletak di sebelah kiri dari tempat ia beredar. Dari penambahan sejumlah besar irisan tersebut kita dapatkan:

2r{volume bola + volume kerucut} = 4r {volume silinder}, atau

2r{volume bola + $8\pi\ r^3/3$} = $8\pi\ r^4$, atau

volume bola = $4\pi\ r^3/3$

Metode inilah yang kita sebut sebagai Metode Kesetimbangan (Method Equilibrium), yaitu metode yang telah dipakai oleh Archemedes dalam menemukan formula volume bola. Namun suara hati matematikanya tidaklah menerima, bahwa metode yang demikian adalah suatu pembuktian secara matematika. Sesuai dengan anggapannya itu, ia mengadakan demonstrasi yang teliti untuk mengartikan metode penghabisan.

Pada metode kesetimbangan, kita melihat kesuburan ide yang didapat secara longgar. Sutu besaran yang besar dapat disusun dari struktur-struktur kecil (atomic) dalam jumlah yang besar. Tiada gunanya kita mengatakan dengan metode limit yang modern, karena metode kesetimbangan Archemedes dapat pula membuat ketelitian yang sempurna, dan hal itu telah menjadi suatu yang esensial yang sama seperti pengintegralan yang kita kenal sekarang.

11.5. Permulaan Hitung Integral di Eropa Barat

Teori integral mendapat kemajuan yang sangat kecil setelah prestasi yang luar biasa dari Archemedes. Keadaan ini berkelanjutan terus hingga jaman modern.

Kira-kira pada tahun 1450 M, hasil kerja Archemedes telah sampai di sebelah barat Eropa. Sampainya ke Eropa Barat melalui terjemahan dari abad ke-9 yang salinannya ditemukan di Konstantinopel (Constantinople). Terjemahan tersebut direvisi oleh Regiomontanus, dan dicetak pada tahun 1540 M. Beberapa tahun kemudian, terjemahan yang kedua telah muncul pula. Namun tidaklah sampai pada permulaan abad ke-17, kita memperoleh perkembangan-perkembangan yang luar biasa dari ide-ide Archemedes ini.

Dua orang penulis pada zaman modern telah menggunakan metode-metode yang sebanding dengan metode Archemedes. Mereka itu adalah seorang insinyur dari Flemish yang bernama Simon Stevin (1548-1620 M), dan seorang lagi adalah matematikawan Italia yang bernama Luca Valerio ($\pm 1552 - 1618$ M).

Simon Stevin dan Luca Valerino mencoba menghindari penggunaan ganda “reduction ad absurdum” dari “metode penghabisan”. Mereka telah membuat jalan pintas, yaitu langsung pada konsep limit seperti telah kita biasa gunakan untuk mencari luas daerah suatu segmen parabola (fasal 11-3).

Stepin dalam kerjanya telah menggunakan suatu metode hydrostatic, ia telah mendapatkan suatu gaya untuk melawan tekanan pada suatu daerah segiempat pertikal, yaitu dengan membagi-bagi daerah tersebut menjadi beberapa strip horizontal yang tipis. Kemudian strip-strip tersebut diputar pada ujung atas dan bawah, sehingga menjadi sejajar dengan bidang horizontal. Ide ini merupakan landasan dari metode yang kita pakai dalam buku-buku pelajaran kalkulus dasar yang sekarang.

Dari fakta-fakta, diketahui bahwa orang yang telah mengembangkan ide-ide hubungan antara tak terhingga dengan integral ialah Johann Kepler. Peristiwa ini terjadi pada awal era Eropa modern. Kita juga mengetahui (fasal 9-6), bahwa Kepler adalah orang yang telah menemukan teknik integrasi untuk mencari luas-luas daerah yang rumit. Peristiwa ini kita temukan pada hukumnya yang kedua mengenai pergerakan benda-benda angkasa. Disamping itu diperoleh pula cara untuk mencari volume cairan anggur dalam satuan barel.

Kepler sama seperti yang lainnya, ia memiliki ketekunan dan ketelitian yang luar biasa. Demikian pula dengan metode menghabiskan, ia telah banyak bersabar, menghemat waktu, dan menjauhkan diri dari gangguan proses pemikiran yang bebas, sehingga Archemedes menganggapnya sebagai heuristic belaka.

Kepler menganggap bahwa untuk mencari kelliling suatu lingkaran adalah sama seperti proses pada polygon beraturan dengan sisi-sisinya tak terhingga. Jika setiap sisi dianggap sebagai alas dari suatu segitiga dengan puncaknya terletak pada pusat lingkaran, kemudian luas daerah lingkaran dibagi menjadi daerah-daerah segitiga kecil yang jumlahnya tak terhingga dengan tinggi yang sama dengan jari-jari lingkarannya. Karena luas daerah tiap segitiga kecil adalah hasil perkalian dari setengah alas dengan tinggi, maka kebalikannya bahwa luas daerah lingkaran adalah setengah dari hasil perkalian keliling dengan jari-jarinya.

Demikian pula dengan volume bola yang dianggap sama dengan kerucut yang memiliki titik puncak pada pusat bola dengan jumlah yang tidak terhingga. Hal ini berarti, bahwa volume bola adalah sepertiga dari perkalian luas permukaan dengan jari-jarinya.

Pada saat sekarang ini, metode “atomic” seperti demikian banyak dipakai oleh para ahli teknik. Mereka banyak menggunakan metode tersebut untuk memecahkan persoalan pekerjaan yang berhubungan dengan matematika. Demikian pula para ahli geometri, mereka seringkali menyusun konsep titik-titik yang “berurutan” (consecutive) dan kurva-kurva yang “ berurutan”, maupun permukaan-permukaan dalam satu parameter secara keseluruhan.

Hal-hal seperti di atas, sebagai usaha-usaha Kepler dalam pengintegralan, mungkin telah berperan penting bagi Capalieri dalam pengembangan metodenya.

11.6 Metode “Indivisibles” dari Cavalieri

Bonaventura Cavalieri dilahirkan di Milan pada tahun 1598, pada usia muda ia telah menjadi Jesuate, belajar di bawah bimbingan Galileo, kemudian dari tahun 1629 sampai tahun 1647 menjadi guru besar matematika di Universitas Balogna. Pada masanya, ia telah menjadi salah seorang matematikawan yang paling berpengaruh. Ia telah banyak menulis dalam bidang matematika, optik, dan astronomi.

Cavalieri adalah orang yang memiliki rasa tanggung jawab yang paling besar dalam memperkenalkan logaritma ke Italia. Namun sumbangannya yang paling besar adalah risalahnya yang untuk pertama kalinya dipublikasikan pada tahun 1635. Tulisannya ini, telah memperkenalkan metode “Indivisibles” atau “katakterbagian”, yaitu suatu metode yang barangkali mengikuti jejaknya Democritus.

Risalah Cavalieri telah disusun secara panjang lebar, tetapi penulisannya masih kurang jelas, sehingga sulit bagi kita untuk mengetahui dengan seksama apa arti dari “indivisibles” yang sesungguhnya.

Menurut Cavalieri, jika titik-titik digeserkan maka akan membentuk garis, jika garis digeserkan maka membentuk bidang, dan jika bidang digeserkan membentuk ruang. Barangkali yang dimaksud dengan “indivisibles” menurut Cavalieri adalah titik, garis, dan bidang yang tidak dapat dibagi-bagi lagi.

Adapun prinsip-prinsip Cavalieri itu, adalah dua buah pernyataan berikut:

1) Jika dua buah bidang permukaan yang terpisah yang terletak di antara pasangan garis yang sejajar, dan jika dua segmen dipotong oleh garis yang sejajar tersebut pada garis sejajar yang lain sehingga garis yang diperoleh memiliki panjang yang sama, maka luas dari kedua bidang permukaan tersebut adalah sama.
2) Jika dua buah bangun ruang terletak di antara sepasang bidang yang sejajar, dan jika dua bagian dipotong oleh bidang sejajar tersebut pada bidang sejajar yang lain sehingga bidang yang diperoleh memiliki luas daerah yang sama, maka volume dari kedua bangun ruang tersebut adalah sama.

Prinsip Cavlieri ini merupakan alat yang berharga untuk mempermudah perhitungan luas dan volume. Sebagai ilustrasi dari prinsip tersebut, akan kita pergunakan untuk mencari volume bola. Pada gambar 11.4 sebelah kiri, kita melihat gambar setengah bola dengan jari-jari r. Pada gambar sebelah kanannya, silinder dengan jari-jari r dan tinggi r. Di dalam silinder terdapat sebuah kerucut dengan alas merupakan permukaan alas silinder, sedangkan titik puncak kerucut terletak pada titik pusat alas silinder. Sekarang kedua bangun ruang itu kita potong dengan bidang sejajar alas sejauh h dari alas tersebut. Irisan-irisannya itu tentu merupakan lingkaran-lingkaran yang menurut geometri dasar, kita dapat menghitung luasnya, yaitu π (r^2 – h^2) (karena masing-masing jari-jari lingkaran irisan adalah r^2 – h^2, ingat teorema Phytagoras).

Selanjutnya dengan mengingat prinsip Cavalieri, bahwa jika dua bangun yang memiliki luas yang sama, maka volumenya juga sama. Jadi volume setengah bola pada gambar sebelah kanan adalah sama dengan volume silinder berlubang kerucut pada gambar sebelah kiri. Karena volume silinder berlubang kerucut adalah sama dengan isi silinder dikurangi isi kerucut di bagian dalamnya, maka dengan mengetahui rumus volume silinder (πr^3) dan rumus volume kerucut (1/3 πr^3), kita dapatkan volume setengah bola adalah:

Volume bola = 2 (Volume silinder – Volume kerucut)
= 2 (πr^3 – 1/3 πr^3)
= 4 πr^3
= 4/3 πr^3

Konsep yang diberikan oleh Cavalieri telah banyak membantu menurunkan rumus-rumus yang banyak kita jumpai di perguruan tinggi, yaitu yang menyangkut geometri ruang. Prosedur ini telah banyak dipergunakan oleh para penulis buku teks, dan telah pula dianjurkan oleh ilmu mendidik.

Gagasan yang diberikan oleh Cavalieri telah menimbulkan terjadinya perubahan dan kritikan dari berbagai golongan. Di antaranya dari beberapa pelajar matematika, seperti Paul Guldin dari Swiss. Cavalieri mengulang kembali pekerjaannya. Namun karyanya sia-sia dalam mengembangkan abyek tersebut. Seorang matematikawan Perancis, Roberval telah mampu mengembangkan metode tersebut, sehingga ia telah memiliki hak yang penting dalam memperkenalkan konsepsi tersebut.

Dengan metode indivisibles, atau beberapa metode lainnya yang serupa telah digunakan dengan efektif oleh Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent, Barrow, dan yang lainnya. Pada umumnya pelajaran-pelajaran dan karya-karya tulis yang berkaitan dengan integral yang telah mereka berikan adalah ekuivalen, misalnya pernyataan-pernyataan seperti x^n, sin θ, $\sin^2 \theta$, dan sin θ.

11-7 Permulaan Differensial

Hitung differensial dapatlah dikatakan dimulai dari masalah melukis garis singgung terhadap kurva, dan mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi. Meskipun demikian, jika kita kembali ke zaman Yunani Kuno sebagai pemberi dasarnya, kiranya perlu untuk dipertegas bahwa ide-ide yang dikembangkan oleh Fermat pada tahun 1629 adalah muncul untuk pertama kalinya.

Kepler telah meneliti bahwa pertambahan nilai pada lingkungan sekitar fungsi maksimum atau minimum berubah menjadi semakin kecil bahkan menghilang. Fermat telah menterjemahkan fakta-fakta ini kepada suatu proses untuk mencari nilai-nilai maksimum atau minimum. Metode Fermat tersebut akan kita perhatikan pada uraian singkat berikut.

Jika f (x) memiliki nilai maksimum atau minimum di x, dan jika e adalah sangat kecil, maka nilai dari f (x-e) hampir sama dengan f(x). Karena itu untuk sementara kita menyatakan bahwa f (x-e) = f(x), dan kita membuat persamaan yang teliti dengan mengasumsikan e adalah nol. Akar-akar persamaan memberikan nilai-nilai x untuk f(x) adalah maksimum atau minimum.

Sebagai ilustrasi dari prosedur di atas, marilah kita melihat sebuah contoh yang diberikan oleh Fermat, yaitu untuk membagi suatu besaran ke dalam dua bagian yang hasil kali dari kedua bagian itu adalah maksimum. Fermat telah memakai notasi-notasi yang diberikan oleh Vieta, yaitu untuk konstanta dilambangkan dengan konsonan dari hurup kapital, sedangkan untuk variabel dengan hurup kapital dari vokal. Selanjutnya besaran semula dimisalkan dengan huruf B dan salah satu besaran bagiannya dengan huruf A, sehingga kedua bagian besaran itu adalah A dan (B-A).

Setelah nilai A dikurangi dengan nilai yang sangat kecil yang dimisalkan dengan huruf E, kita dapatkan:

$$(A - E)\{B - (A - E)\}$$

apabila hasil kali ini maksimum, maka menurut Fermat harus disamakan dengan A (B – A), sehingga menjadi

$$A(B - A) = (A - E)\{B - (A - E)\}$$

atau
$$A(B - A) = (A - E)B - (A - E)^2$$

atau $AB - A^2 = AB - BE - A^2 + 2AE - E^2$

atau $2AE - BE = E^2 = 0$

Setelah dibagi oleh E, kita dapatkan

$$2A - B - E = 0$$

Sekarang kita masukkan E = 0, sehingga didapatkan

$$2A - B = 0 \text{ atau } A = \tfrac{1}{2}B$$

Dengan demikian Fermat mendapatkan hasil kali maksimum yang terjadi pada A = ½B atau nilai hasil kali maksimumnya adalah:

$$\tfrac{1}{2}B \cdot \tfrac{1}{4}B^2$$

Sebenarnya, secara logika apa yang dijelaskan oleh Fermat, telah banyak memberikan dorongan ke arah perkembangan kalkulus, hal itu terlihat bahwa metodenya adalah ekuivalen dengan:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

yang merupakan turunan dari f(x) yang disamakan dengan nol. Bentuk ini adalah metode yang biasa dipakai untuk mendapatkan nilai maksimum dan minimum dari fungsi f(x), dan kadangkala bentuk ini dimuat dalam beberapa buku pelajaran kalkulus dasar yang kita pelajari sekarang, dan sebenarnya sesuai dengan metode Fermat.

Fermat tidaklah mengetahui bahwa menghilangkan turunan f(x) hanyalah dalam hal-hal tertentu saja, dan bukanlah hal yang cukup untuk suatu kondisi maksimum dan minimum yang biasa. Juga metode Fermat tidaklah membedakan antara nilai maksimum dengan nilai minimum.

Fermat telah pula memakai suatu prosedur yang berlaku secara umum untuk menentukan garis singgung di suatu titik dari suatu kurva yang persamaan cartesiusnya diketahui. Sebagai ilustrasi misalkan persamaan kurvanya adalah f(x, y) = 0, dan marilah kita cari persamaan garis singgung di suatu titik (x, y) yang terletak pada kurva itu. Dengan segitiga-segitiga yang hampir sama, kita dapat memperoleh koordinat titik singgung yaitu dengan mengambil e sebagai penambah yang kecil pada sumbu x, maka ordinat y dari garis singgung akan bertambah (e/a)y. Akibatnya didapatkan koordinat titik singgung yang baru, yaitu:

$$[(x + e) \cdot y\,(1 + e/a)]$$

yang juga terletak pada kurva f(x,y)=0, sehingga kita dapat

$$f\; x + e \cdot y\,(1 + e/a) = 0$$

Fermat dapat menemukan persamaan garis singgung kurva, yaitu dengan mengasumsikan e = 0. Kemudian kita menyelesaikan persamaan untuk garis singgung a dalam koordinat-koordinat x dan y dari titik singgung. Pada pembicara kita ini, hasilnya akan ekuivalen. Dengan bentuk :

$$A = -y(df/dy) \,/\, (df/dx)$$

Dengan cara ini Fermat telah memperoleh persamaan-persamaan garis singgung untuk ellips, cycloid, cissoid, conchoids, quadratrix, dan folium dari Descartes.

Sebagai contoh, marilah kita mencoba untuk mendapatkan garis singgung dari suatu titik yang terletak pada folium Descartes:

$$x^3 + y^3 = nxy \text{ atau } x^3 + y^3 - nxy = 0$$

Menurut cara Fermat, kita menambah x dengan besaran kecil e, sebagai akibatnya y bertambah pula sebesar (e/a)y. Dengan memisalkan titik yang baru ini terletak pula pada kurva folium Descartes, maka kita dapatkan:

$$(x + e)^3 + y^3 (1 + e/a)^3 - ny(x + e) (1 + e/a) = 0$$

atau

$$e^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + 3y^3 e/a + 3y^3 e^2/a^2 + y^3 e^3/a^3 - nxy - nxy e/a - nye - ny e^2/a = 0$$

atau

$$(x^3 + y^3 - nxy) + e (3x^2 + 3y^3/a - nxy/a - ny) + e^2 (3x^2 + 3y^3/a - ny/a) +$$
$$e^3(1 + y^3/a^3) = 0$$

Karena suku pertama sama dengan fungsi asal, yaitu nol maka persamaan menjadi:

$$e (3x^2 + 3y^3/a - nxy/a - ny) + e^2 (3x^2 + 3y^3/a^3 - ny/a) + e^3 (1 + y^3/a^3) = 0$$

sekarang, kita bagi dengan e dan kita anggap pula bahwa e=0, sehingga kita dapatkan

$$3x^2 + 3y^3/a^3 - nxy/a - ny = 0, \text{ atau}$$
$$a = - (3y^3 - nxy) / (3x^2 - ny)$$

Bentuk terakhir ini adalah persamaan garis singgung di titik (x , y) pada lingkungan $x^3 + y^3 - nxy = 0$.

11-8 John Wallis dan Issac Barrow

Orang-orang Inggris yang dapat dianggap sebagai pendahulu sebelum Issac Newton (1642-1727) adalah John Wallis (1616-1703) dan Issac Barrow (1630-1677).

Wallis adalah seorang ahli matematika murni yang cerdas. Ia seorang penulis yang mempunyai karya dalam bidang-bidang lain di luar matematika, disebut-sebut bahwa ia adalah orang pertama yang telah memberikan sistem pengajaran untuk orang-orang tuna rungu dan tuna netra.

Pada tahun 1649, ia telah ditunjuk sebagai guru besar Savilian untuk bidang geometri di Universitas Oxford. Hampir selama 54 tahun ia menduduki jabatan tersebut, sehingga meninggal pada tahun 1703. Hasil karyanya dalam bidang *analisis* merupakan persiapan dan dasar-dasar yang kemudian dikembangkan lebih jauh oleh Newton.

Willis adalah orang pertama yang membahas irisan kerucut sebagai kurva berderajat dua di samping irisan-irisan terhadap kerucut. Pada tahun 1656, ia mempersembahkan *aritmetica infinitorum*, yaitu sebuah buku yang menjadi standar selama beberapa tahun. Namun bukunya ini masih memuat beberapa kesalahan secara logika. Dalam bukunya ini, metode Descartes dan metode Cavalieri telah diperluas dan disistematiskan sehingga banyak kasus-kasus khusus yang dapat kita kenal sekarang yang ditulis dalam bentuk:

$$\int_o^1 x^m dx = 1/(m+1)$$

dengan m bilangan bulat positif. Wallis adalah orang pertama pula yang telah menjelaskan secara lengkap tentang signifikansi dari nol, negatif, dan eksponen pecahan. Ia telah pula memperkenalkan simbol (~) untuk tak hingga sekarang telah sampai kepada kita.

Dengan usahanya yang tekun, Wallis telah dapat mencari harga π(pi) dengan menggunakan konsep luas daerah, yaitu dari ¼ sebagai bagian dari luas daerah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang terletak pada salah satu kuadran. Bentuk ini adalah ekuivalen dengan menghitung:

$$\int_o^1 (1-x^2)^2 dx$$

yang pada waktu itu Wallis belum mampu menghitung secara langsung, karena belum dikenal teorema binomial yang umum. Demikian pula dengan menghitung bentuk-bentuk:

$$\int_o^1 (1-x^2)^0\,dx . \int_o^1 (1-x^2)^1\,dx . \int_o^1 (1-x^2)^2\,dx$$

dan seterusnya, ia memperoleh barisan 1, 2/3, 8/15, 16/35, ….. Selanjutnya ia telah pula memperhatikan masalah untuk mencari hukum yang berlaku untuk n = 0, 1, 2, 3, … yang berkaitan dengan barisan di atas. Hal ini merupakan interpolasi nilai-nilai rumus di atas untuk n = ½. Melalui proses yang rumit dan panjang, akhirnya Willis telah sampai pada ekspresi perkalian tak terhingga, seperti yang telah kita kenal untuk /2 dalam pasal 4-8. Para ahli matematika seringkali menggunakan proses interpolasi untuk menghitung besaran yang sulit dihitung secara langsung.

Wallis telah pula beranjak ke masalah-masalah matematika lainnya. Dia adalah matematikawan yang telah mampu memecahkan masalah yang pernah dilontarkan oleh Pascal, yaitu masalah sikloida (cycloid) (lihat pasal 9-9). Untuk masalah ini, melalui argumennya yang bisa diterima, ia telah memperoleh rumusan yang ekuivalen, yaitu:

$$ds = \{1 + (dy/dx)^2\}^{1/2}\,dx$$

untuk panjang sebuah elemen busur dari kurvanya.

Dalam *De algebra tractatus; historicus & practicus* yang diterbitkan pada tahun 1673, Willis dianggap sebagai orang pertama yang telah berusaha menyusun sejarah matematika di Inggris. Dalam karyanya ini kita memperoleh catatan pertama yang memberikan interpretasi grafik untuk akar-akar kompleks dari persamaan kuadratik real.

Wallis telah mengedit sejumlah tulisan matematikawan Yunani Kuno untuk masalah-masalah fisika. Ia termasuk pula salah seorang pendiri Royal Societ, dan selama bertahun-tahun ia diperbantukan dalam bidang cryptologi.

Selain John Wallis yang memberikan sumbangan dalam pengembangan kalkulus dengan teori integralnya, juga Isaac Barrow telah pula memberikan sumbangannya yang cukup penting untuk teori differensial.

Isaac Barrow dilahirkan di London dalam tahun 1630. Menurut sejarahnya, mula-mula di sekolahnya ia sangat menyusahkan, sehingga ayahnya selalu berdoa kepada Tuhan. Barrow menyelesaikan pendidikannya di Cambridge, dan ia memperoleh nama baik sebagai orang yang banyak mempelajari pendidikan di Yunani. Ia banyak berkecimpung di perguruan tinggi dan telah banyak membicarakan bidang-bidang matematika, fisika, astronomi dan theology.

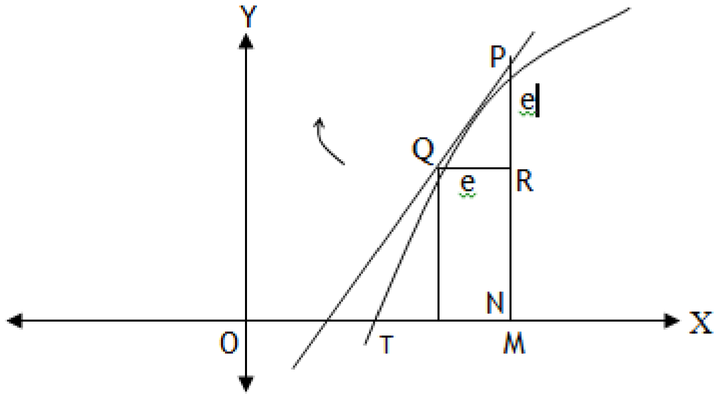
Banyak cerita yang menarik, di antaranya ada yang menyebut-nyebut bahwa Barrow orang yang mempunyai kekuatan fisik, pemberani, cerdas dan cermat. Ia adalah orang pertama yang menduduki jabatan Lucasian di Cambridge. Dengan kebaikannya, ia meletakkan jabatan tersebut pada tahun 1669, dan diserahkan kepada muridnya yang menjadi orang ternama dalam dunia sain dan matematika, yaitu Isaac Newton. Dalam sejarah tercatat, bahwa Barrow adalah orang pertama yang banyak membantu dan mengakui kebesaran Newton.

Karya Barrow yang terpenting dalam matematika adalah sebuah tulisannya yang berjudul *Lectiones opticae et geometricae*. Karyanya ini diperlihatkan ketika ia menduduki jabatan Lucasian di Cambridge. Dalam beberapa bagian buku tersebut, dimuat masalah probabilitas yang berhubungan dengan bidang optik. Dalam pembahasan masalah ini, kita memperoleh suatu pendekatan yang paling awal tentang diferensial segitiga (*differential triangle*). Konsep yang dikemukakan Barrow ini diperlukan untuk mencari persamaan garis singgung di suatu titik pada suatu kurva.

Misalkan Q adalah suatu lingkungan (neighboring) titik pada kurva. Akibatnya segitiga-segitiga PTM dan PQR hampir sebangun. Kemudian Barrow menyatakan, bahwa kita dapat membuat segitiga lainnya yang sebangun dan lebih kecil dengan jumlah yang tak terhingga, sehingga kita mendapatkan:

RP/QR = NP/TM

Sekarang misalkan QR = e dan RP = e. Selanjutnya, jika koordinat-koordinat P adalah x dan atau titik P (x, y) maka koordinat-koordinat Q adalah x – e dan y – e atau (x -, y-e). Subtitusikan nilai-nilai ini ke dalam persamaan kurva, kemudian hitunglah kuadrat dari pangkat tertinggi dalam e dan a, sehingga peroleh perbandingan a/e.



Gambar 11.8

selanjutnya kita mendapatkan :

OT = OM – TM = OM – MT(QR/RP) = x – y(e/a),

Dan akhirnya persamaan garis singgung dapat kita tentukan.

Barrow telah menggunakan metode diatas untuk melukis garis singgung pada sebuah kurva, misalnya dengan kurva-kurva persamaan seperti berikut:

$^2(x^2 + y^2) = r^2 y^2$ (kurva Kappa)

$^3 + y^3 = r^3$ (kurva Lame)

+ y = rxy (folium Descartes atau la galande Barrow)

= (r - x) tgn $\pi x/_{2r}$ (quadratrix)

= r tgn $\pi x/_{2r}$ (kurva tangent)

sebagai gambaran dari pemakaian metode Barrow, kita gunakan pada kurva Lame $x^3 + y^3 = r^3$. disini kita mempunyai :

$$(x-e)^3 + (y-a)^3 = r^3,$$

Atau $x^3 + 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3$

Hitunglah kudrat dari pangkat tertinggi dalam e dan a, selanjutnya $x^3 + y^3 = r^3$, direduksi menjadi: $3x^2e + 3y^2e = 0$,

Sehingga kita peroleh: $a/e = -x^2/y^2$.

Perbandingan a/e dalam pengertian kita yang modern adalah dy/dx, dan prosedur dari Barrow untuk mendapatkan nilai ini dapat pula dibuat dengan menggunakan teori-teori limit.

Disamping masalah seperti diatas, telah pula mengembangkan pengertian integral yang berhubungan dengan diferensial. Ia adalah orang pertama yang menyatakan bahwa "hitung diferensial dan hitung integral adalah dua hal yang saling berkebalikan". Pengertian ini dinamakannya sebagai "Teorema Fundamental Kalkulus" yang tersurat dalam karyanya yang berjudul Lectiones Oppticae et geometricae.

Meskipun Barrow banyak mencurahkan kehidupannya untuk Theologi, namun pada tahun 1675 ia sempat menerbitkan edisi pertama empat buah buku karya Apollonius perihal Irisan Kerucut (Conic Section). Selain itu, ia sempat pula mengembangkan beberapa karya Archemedes dan Theodosius.

Dalam karyanya ia pernah pula mengembangkan kalkulus diferensial dan kalkulus integral secara terpadu. Diantaranya banyak dibahas masalah quadratur, cubatur, gagasan-gagasan konsep limit, proses diferensial, persamaan garis singgung untuk berbagai kurva beserta cara-cara melukisnya, dan masih banyak lagi teorema fudamental kalkulus lainnya.

Dalam setiap karyanya, Barrow selalu menyertakan kreasi simbol-simbol yang berlaku secara umum, formal, dan memperhatikan azas analitis yang sistimatis. Hal seperti ini telah memberikan dasar dalam pengembangan kalkulus secara lebih lanjut oleh Newton dan Leibniz, walaupun mereka telah bekerja secara terpisah.

Pada periode berikutnya, telah terjadi pengembangan ulang konsep-konsep dasar kalkulus sampai pada tingkat cara-cara penyajian yang mudah diterima lebih jauh lagi, kalkulus telah memasuki masa aplikasi untuk bidang-bidang tertentu secara besar-besaran. Hal ini ditandai dengan munculnya karya-karya dari para ahli analisis, diantaranya seorang ahli analisis perancis, Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) dan para pengganti lainnya diabad ke-19.

11-9 Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727), dilahirkan pada hari natal tahun 1642, bertepatan dengan tahun meninggalnya Galileo. Ayahnya meninggal sebelum Newton di lahirkan, bekerja sebagai seorang petani dan mengharapkan anaknya menjadi seorang petani pula.

Pada usia mudanya, newton telah memperlihatkan kecerdasan dan kecakapan yang luar biasaa, ia telah mencoba peralatan mekanik dan telah mencoba melakukan berbagai eksperimen. Ia telah mampu membuat mesin untuk menghaluskan gandum sehingga menjadi tepung, dan telah mampu pula membuat jam penunjuk waktu yang digerakkan oleh air. Semuanya itu dibuat ketika ia masih sekolah.

Ketika ia berumur 18 tahun telah diizinkan memasuki trinity College diCambridge. Pada waktu itu belum terlihat bahwa ia menaruh perhatian yang besar terhadap matematika. Buku matematika yang pertama kali dibacanya adalah Element Euclid, dan buku ini menjadi penyebab ia tertarik terhadap matematika. Kemudian ia membaca La Gemetrie Descartes, dan ternyata tidak mendapatkan kesulitan untuk mempelajarinya.

Newton telah pula mempelajari Oughtred's karya Clavis, karya-karya kepler Vieta, dan Arithmetica infinitorum yang ditulis oleh Wallis. Masih banyak karya-karya matematikawan besar lainnya yang telah dibacanya.

Pada tahun 1665, ketika ia berusia 23 tahun, ia telah mampu menyelesaikan generalisasi teorema binomial. Kemudian ia menciptakan "metode fluxions" yang berkaitan dengan perubahan yang terus menerus, sehingga menghasilkan apa yang kita kenal sekarang sebagai hitung diferensial dalam kalkulus.

Pada waktu kegiatan di Universitas ditutup karena merajalelanya wabah penyakit sampar, ia untuk beberapa lama tinggal dirumahnya. Selama periode ini ia telah mengembangkan kalkulusnya untuk menyelesaikan masalah-masalah garis singgung dan jari-jari kelengkungan disuatu titik yang terletak pada sembarang kurva.

Newton telah tertarik pula pada permasalahan fisika, dan untuk pertama kalinya ia melakukan eksperimen dalam bidang optik. Kemudian ia telah sampai pula pada rumusannya tentang prinsip dasar grafitasi.

Newton kembali ke Cambridge pada tahun 1667, dan selama dua tahun ia hanya melakukan penelitian dalam bidang optik saja. Pada tahun 1669, Newton menggantikan kedudukan Barrow sebagai Lucasian di Universitas Cambridge, dan hampir selama 18 tahun ia telah bnyak menghasilkan tulisan yang diterbitkan dilingkungan Universitas. Hasil pemikirannya yang pertama mengenai optik terlambat untuk dikomunikasikan dalam bentuk karya tulis ke Royal Society, namun telah menjadi topik yang menarik untuk didiskusikan. Teori warnanya sebagai hasil eksperimen yang berkaitan dengan optik telah menimbulkan banyak tantangan dari para ahli lainnya. Selanjutnya Newton memberikan pernyataan bahwa ia tidak akan menerbitkan kembali masalah yang dipertentangkan tersebut. Kemudian ia mengalihkan perhatiannya ke masalah pathologi yang merupakan penghubung penting dalam sejarah matematika, dan apa yang dihasilkannya hampir semuanya tidak dipublikasikan hingga beberapa tahun setelah penelitiannya.

Penerbitan hasil penelitiannya dalam bidang kalkulus telah menimbulkan perselisihan dengan Leibniz (1646-1717) yang telah pula mengutarakan penelitiannya dalam bidang yang sama. Pertentangan ini telah berkepanjangan, sehingga matematikawan inggris yang dipimpin oleh Newton telah menutup diri dari perkembangan matematika didaratan Eropa. Sebagai akibatnya, sejarah perkembangan matematika di inggris dan di Eropa mengalami masa-masa suram, dan keadaan ini berlangsung hampir mencapai 100 tahun.

Selanjutnya Newton bekerja pada masalah optik, dan pada tahun 1675 ia telah mengkomunikasikan masalah "emission" atau Corpuscular" dan teori cahaya ke Royal Society.

Beberapa tahun pula ia menerbitkan pula tulisannya yang membahas masalah teori gelombang. Karyanya ini mendapatkan reputasi yang baik, karena telah memperlihatkan suatu hasil penelitian dengan hipotesis yang baik sekali.

Dalam memberikan kuliahnya di Universitas dari tahun 1675 sampai tahun 1683 banyak membicarakan masalah aljabar dan teori persamaan. Pada periode ini, yaitu pada tahun 1679, Newton telah menguji dan membuktikan hukum-hukum grafitasinya dengan menggunakan ukuran jari-jari bumi yang dipelajarinya dari hubungannya dengan pergerakan bulan.

Newton telah pula membuat penyesuaian hukum gravitasinya dengan hukum pergerakan planet dari Kepler. Penyesuaian didasarkan pada asumsi, bahwa matahari dan planet-planet dapat dipandang sebagai partikel-partikel yang mempunyai gaya berat yang besar. Namun hasil penelitian yang penting ini tidak dipublikasikan secara terbuka. Setelah lima tahun berikutnya tatkala Halley mengunjungi Newton di Cambridge baru didiskusikannya Halley mengunjungi Newton untuk membicarakan hukum gaya yang menyebabkan planet-planet memiliki orbit berbentuk ellips dengan matahari berada pada salah satu titik fokusnya.

Karya Newton dalam bidang sain yang merupakan satu-satunya karya yang membahas dasar-dasar mekanika adalah "principia". Bagian pertama dari principia ditulis pada tahun 1685, sedangkan bagian kedua dan ketiga ditulis pada tahun berikutnya. Pada waktu akan diselesaikan bagian yang ketiga, timbulah rasa iri hati dari Hooke. Hooke merasa iri atas keberhasilan yang dicapai Newton, dan hampir saja terjadi kegagalan untuk dipublikasikan. Namun berkat adanya dorongan dari Halley untuk tidak menanggapi rasa ketidaksenangan dari Hooke, akhirnya dapat menyelesaikannya. Selanjutnya karya Newton yang lengkap ini diberi judul " Philosophiae naturalis principia mathematic", karya besar Newton ini diterbitkan pada tahun 1687 atas biaya Halley, yang kemudian mendapat sambutan yang luar biasa diseluruh Eropa.

Pada tahun 1689, Newton mempresentasikannya dihadapan senat Universitas. Mulai tahun 1692 kondisi tubuhnya melemah disertai dengan kekacauan mental, banyak sisa-sisa hidupnya yang dipersembahkan untuk bidang kimia, logam dan teknik.

Seperti telah dicatat di atas, bahwa semua hasil karyanya telah diterbitkan, kecuali principia yang dipublikasikan setelah meliput semua isinya dan itupun dipublikasikan karena tekanan dari para sahabatnya. Data-data dari urutan penerbitan karya Newton adalah sebagai berikut : Principia (1687), Opticks de Rectification of Curvesby the Use of Infinite Series (1704), Arithmetica universalis (1707) Analisys perseries, Fluxiones, dan sebagainya, methodus differentialis (1711) leotiones opticae (1729), dan the Method of Fluxiones and Infinite Series yang diterjemahkan dari Newton kedalam bahasa latin oleh J. Colson pada tahun 1736.

Salah satu suratnya yang terpenting yang ditunjukkan kepada H. Oldenburgh, sekertaris Royal Society adalah penjelasan tentang metode-metode matematika dalam suratnya ini telah dijelaskan pengertian induksi dari generalisasi teorema binomial yang dituliskan dalam bentuk

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-n}{3n}CQ + ...,$$

Dengan A menyatakan suku pertama, sebutlah $P^{m/n}$, B menyatakan suku kedua sebutlah (m/n)AQ, C menyatakan suku ketiga, dan seterusnya.

Teorema perluasan dalam binomial yang berlaku untuk semua nilai-nilai kompleks dari eksponen, diberikan 150 tahan berikutnya oleh matematikawan Norwegia, N H Abel (1802-1829).

Suatu penelitian penting tentang matematika yang dikerjakan oleh Newton adalah metode fluxion. Hal inilah yang telah mengakibatkan ia berkomunikasi dengan Barrow pada tahun 1669. metode fluxion ditulis pada tahun 1671, namun tidak pernah diterbitkan hingga tahun 1736. dalam karyanya ini, mengamati suatu kurva yang dibangun oleh gerak kontinu suatu titik. Berdasarkan konsepnya, absis dan ordinat suatu lengkungan secara umum berubah besarannya dalam membangun suatu kurva. Perubahan besaran ini dinamakan "fluent" (pergeseran besaran), dan laju perubahannya dinamakan "fluxion" dari fluent. Bila suatu fluen terjadi, berarti titik itu membangun suatu kurva dan dinyatakan dengan y, maka fluxion dari fluen itu dinyatakan dengan y. Dalam notasi yang modern ekuivalen dengan dy/dt, dengan menyatakan waktu. Sedangkan fluxion dari y dinotasikan y. Demikian seterusnya untuk menyatakan fluxion yang lebih tinggi. Sedangkan fluent dari y dinotasikan dengan simbol y dengan kuadrat kecil, atau dengan notasi y.

Newton telah pula memperkenalkan konsep lainnya yang ia namakan "moment" dari suatu fluent yaitu besaran yang tak hingga kecilnya yang bertambah pada suatu fluent seperti x dalam satu interval yang tak hingga kecilnya dari waktu 0. dengan demikian moment fluent x dinyatakan sebagai perkalian X0. Newton menyatakan bahwa kita dapat menjabarkan setiap suku yang dikalikan dengan nol yang dipangkatkan dua atau pangkat yang lebih tinggi. Karenanya akan didapatkan suatu persamaan diantara koordinat-koordinat x dan y yang dibangun oleh titik dari suatu kurva dan fluxion- fluxion x serta y. Sebagai contoh, ia memberikan kurva pangkat tiga :

$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$

dengan melalui moment fluent, terjadilah penggantian x dengan x + x0 dan y oleh y + y0, sehingga kita mendapatkan :

$$x^3 + 3x^2(x0) + 3x(x0)^2 + (x0)^3$$
$$- ax^2 - 2ax(x0) - a(x0)^2$$
$$+ axy + ay(x0) + a(x0)(y0) + ax(y0)$$
$$- y^3 - 3y^2(y0) - 3y(y0)^2 - (y0)^3 = 0$$

sekarang, gunakan fakta bahwa $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, bagilah suku-suku sisanya dengan 0, dan abaikan suku-suku yang memuat 0 pangkat dua dan lebih tinggi, sehingga kita dapatkan apa yang kita cari :

$$3x^2x - 2axx + ayx + axy - 3y^2y = 0$$

Selanjutnya, Newton memperhatikan dua tipe maslah. Jenis pertama, kita dihadapkan pada suatu relasi antara beberapa fluent dan dari padanya kita mencari relasi antara fluent-fluent dan fluxion. Langkah inilah yang telah kita lakukan seperti diatas tadi, dan tentu saja hal ini adalah ekuivalen dengan deferensiasi. Jenis kedua, kita dihadapkan pada suatu relasi yang mengkaitkan beberapa fluent dan beberapa fluxion, dan dari padanya kita mencari relasi yang mengkaitkann antara fluent dengan fluent sendiri. ini adalah masalah invers yang ekuivalen dengan menyelesaikan persamaan diferensial.

Gagasan mengabaikan setiap suku yang dikalikan dengan 0 yang kemudian dipangkatkan dua atau lebih tinggi dimulai oleh Newton sebagai simbolisasi dari limit. Selanjutnya Newton telah membuat aplikasi dari metode fluxionnya ini. Ia mmenentukan maksimum dan minimum, garis singgung sebuah kurva, lengkungan kurva, titik belok, kecekungan dan kecembungan sebuah kurva, dan menggunakannya pula untuk sejumlah lengkungan kuadrat serta meratifikasi sejumlah kurva.

Selanjutnya dalam hal mengintegrasikan beberapa persamaan diferensial, Newton memperlihatkan kemampuannya yang liusar biasa. Dalam bidang ini ia telah memperoleh suatu metode (sebagai modifikasinya apa yang sekarang kita kenal sebagai metode Newton) untuk aproksimasi nilai-nilai akar real baik secara aljabar maupun persamaan numerik transenden.

"Arithmetica universalis" memuat materi-materi perkuliahan yang pernah diberikan oleh Newton mulai tahun 1673 sampai 1683. dalam tulisannya tersebut banyak ditemukan teori-teori persamaan yang penting, diantaranya mencari akar-akar real atau imajiner dari suatu polinom, aturan-aturan untuk mendapatkan batas atas akar-akar suatu polinom, jumlah pangkat ke-n akar-akar polinom yang berkaitan dengan koefisien suku-suku polinom, perluasan aturan Descartes terhadap banyaknya akar imajiner dari polinom real, dan masih banyak lagi aturan dan masalah lainnya.

"Curva Cubic" (kurva pangkat tiga) yang diperlihatkan sebagai apendiks pada karyanya yang berjudul "optics" telah memperlihatkan pnelitian sifat-sifat kurva pangkat tiga secara geometri analitik. Dari 78 klasifikasi yang mungkin tentang kurva pangkat tiga, ia telah memperlihatkan 72 diantaranya adalah kurva kubik yang diberikan oleh Newton. Namun banyak teoremanya yang tidak dibuktikan secara lengkap. Diantaranya teorema yang menyatakan bahwa semua irisan kerucut merupakan proyeksi sentral dari sebuah lingkaran, juga semua kurva kubik dapat diperoleh dari proyeksi-proyeksi kurva : $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Teorema ini telah lama menjadi teka-teki, dan baru dibuktikan pada tahun1731.

Tentu saja karya Newton yang terbesar adalah "principia" dalam karyanya ini terlihat untuk pertama kalinya sistem dinamik (dynamics) dibahas secara lengkap yang disertai dengan rumusan matematika secara lengkap pula terutama tentang bumi dan fenomena-fenomena pergerakan benda angkasa. Bukti-bukti itu telah banyak mempengaruhi perkembangan dan perubahan sejarah ilmu pengetahuan. Lebih menarik lagi, bahwa teorema-teorema itu diliput dengan menggunakan metode fluxion, dan semuanya diselesaikan dengan bantuan geometri yunani klasik, dan kadang-kadang pula diselesaikan dengan menggunakan notasi limit yang sederhana.

Semua masalah fisika dan astronomi berkembang karena asumsi-asumsi yang diberikan oleh Newton. Keadaan ini berjalan terus hingga munculnya teori relativitas einstein.

Dalam "principia" banyak ditemukan pembahasan kurva-kurva bidang drajat tinggi disertai pembuktian secara geometris dari teorema-teorema tersebut, diantaranya :

1. Tempat kedudukan pusat-pusat dari semua irisan kerucut yang menyinggung sisi-sisi suatu bujursangkar adalah garis (garis Newton) yang melalui titik diagonalnya.
2. Bila suatu titik p bergerak sepanjang garis yang menghubungkan dua titik tetap 0 dan 0', dan jika garis 0Q dan 0'Q membentuk sudut tetap dengan 0P dan 0'P, maka tempat kedudukan dari titik-titik Q adalah irisan kerucut.

Newton tidak pernah membicarakan masalah-maslah apa saja yang ditemukan oleh para matematikawan pada masanya. Hanya salah satu diantaranya apa yang diusulkan oleh Leibniz, namun ia telah menyelesaikan masalah (untuk mencari trayektori ortogonal keluarga kurva-kurva).

Newton seorang pelaku eksperimen yang mempunyai kemampuan analisis yang luar biasa. Sebagai seorang matematikawan, ia disebut sebagai orang terbesar yang pernah ada. Dalam masalah fisika ia mempunyai kemampuan penalaran secara matematis, sehingga menjadikan orang yang belum pernah ada yang melebihi, ia adalah orang yang telah banyak mendapatkan penghargaan sehubungan dengan kemampuan dan kebesarannya. Leibniz telah pula memberikan penghargaan dalam ucapannya : "menguasai matematika dari permulaan dunia hingga Newton hidup, setengahnya dari itu yang telah dilakukan oleh dia adalah terbaik”. Sedikit catatan pula yang pernah diberikan oleh Langrange, yang mengatakan bahwa Newton adalah seorang yang jenius yang pernah hidup dan kita telah memperoleh keuntungan yang besar, karena ia telah menetapkan suatu sistem yang universal. Hal demikian, secara puitis pernah pula diekspresikan oleh Paus dalam beberapa baris sajaknya :

Alam dan hukum-hukum alam tersembunyi dimalam hari;
Tuhan menyatakan, biarkan Newton berbuat banyak dan semuanya menjadi jelas.

Bertentangan dengan kata-kata pujian ini, Newton mengatakan dengan rasa rendah hati tentang karya-karyanya :

”saya tidak pernah mengetahui apa-apa yang saya perlihatkan pada dunia, namun begitu saya melihat diri sendiri layaknya seperti anak kecil yang bermain dipesisir pantai, dan ternyata sekarang menyenangkan, kemudian saya memperoleh pasir yang berlimpah-limpah atau kerang yang begitu indah lebih indah dari kerang biasa, ini seluruhnya kebesaran lautan, dan sebenarnya telah ada semuanya sebelum saya mencarinya”.

Sebagai rasa hormatnya kepada para pendahulunya, Newton menjelaskan bahwa tidak ada yang ia lihat lebih jauh, selain dari apa yang pernah diamati sebelumnya oleh orang lain, dan ia hanya sekedar menceritakan kembali.

Tercatat pula bahwa Newton sering menghabiskan waktunya untuk menulis sebanyak 18 atau 19 jam dari 27 jam waktu yang tersedia selama satu hari satu malam. Ia memiliki daya konsentrasi yang sangat luar biasa. Banyak cerita tentang kehidupan Newton, namun yang terpenting bagi kita bagaimana keuletan dan pengabdiannya kepada ilmu pengetahuan, dan tentunya kita merasa berhutang budi akan jasa-jasanya.

11-10 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1717), seorang super jenius di abad ke-17, dan ia merupakan saingan Newton dalam menemukan kalkulus. Ia lahir di Leibzig pada tahun 1646, semenjak kecil sudah mempelajari sendiri bahasa latin dan bahasa Yunani kuno. Sebelum berusia 20 tahun ia telah menulis beberapa teks buku dalam bidang matematika, filsafat, theologi, dan hukum.

Dalam usia muda ia telah mulai mengembangkan ide pertamanya tentang ” Characteritica generalis”. Karyanya ini membahas matematika yang universal, yang kemudian dikenal sebagai ”Symbolic Logic” dari George Boole (1815-1864), yang selanjutnya pada tahun 1910 dimuat dalam ”Principia Matematica” yang merupakan karya besar dari Whitehead dan Russell.

Masih dalam usia yang relatif muda, ia menilai untuk memperoleh gelar doctor dari Universitas Lepzig. Kemudian ia pindah ke Nuremburg. Disana ia menulis sebuah essay secara brilian yang diberikan dalam perkuliahan hukum dengan menggunakan metode sejarah. Hal ini telah mendorong para pemilih dari Mainz untuk mengangkatnya menjadi anggota komisi pengkajian ulang undang-undang.

Sisa-sisa hidupnya digunakan untuk melaksanakan tugas-tugas diplomatik. Pertama-tama ia diangkat menjadi Elector dari Mainz, dan kira-kira pada tahun1676 sampai menjelang kematiannya ia mengelola perkebunan milik kerajaan Brunswick di Hanover. Pada tahun 1672, ketika ia melakukan misi diplomatis di paris, ia menemui Huygens seorang matematikawan perancis, kemudian Leibniz dibujuknya untuk memberikan kuliah matematika. Tahun berikutnya Leibniz dikirim ke London untuk sebuah misi politis, dan disana ia memperkenalkan dan memperagakan mesin hitung kepada Royal Society.

Sebelum ia meninggalkan Paris, ia mendapat tugas untuk mengelola perpustakaan kerajaan Brunswick. Ia telah berhasil menemukan teori dasar kalkulus. Dunia kalkulus telah memperoleh kemajuan yang luar biasa, karena sumbangan yang diberikan Leibniz. Kemajuan tersebut diantaranya dalam masalah pemberian simbol-simbol yang berlaku dalam kalkulus, dan penyusunan daftar rumus-rumus dasar untuk diferensial.

Dengan diangkatnya Leibniz di Hanover telah memungkinkan untuk mengembangkan berbagai karyanya, termasuk study favoritnya. Ia mempunyai bakat istimewa dalam bidang bahasa dan tertarik dengan beberapa orang sarjana sansekerta yang ternama. Tulisan-tulisannya dalam bidang filsafat telah mengangkat nama baiknya dalam bidang tersebut.

Pada tahun 1682 bersama Otto Mencke menerbitkan suatu jurnal yang disebut Acta Eruditorum, dan ia sendiri diangkat menjadi editornya. Hampir selama sepuluh tahun, yaitu dari tahun 1682-1692 banyak menulis masalah matematika yang dibahas secara mendalam dan sistematis. Jurnal itu telah mempunyai sirkulasi yang meluas sampai ke seluruh daratan Eropa.

Pada tahun 1760, Leibniz mendirikan akademi berlin dalam bidang sain (sciece). Ia telah berusaha keras untuk menyamai akademi-akademi di Dresden, Vienna, dan st. Petersburg.

Tujuh tahun terakhir dari masa hidupnya, terasa sebagai hal yang menyakitkan hatinya, karena terjadi kontroversi masalah keabsahan penemuan kalkulusnya. Leibniz telah menemukaan kalkulus secara terpisah dan lepas dari penemuan kalkulusnya Newton. Namun demikian telah mengakibatkan adanya pertentangan yang berkepanjangan diantara para pengikutnya.

Pada tahun 1714, Leibniz meninggalkan majikannya raja keturunan Jerman yang pertama di Inggris, dan ia telah dibiarkannya untuk pergi ke Hanover. Mereka menyatakan bahwa dua tahun kemudian, yaitu pada tahun 1717 ketika ia meninggal dunia pemakamannya hanya dihadiri oleh sekertarisnya yang setia.

Penelitian yang dilakukan Leibniz untuk “Characteristica generalis” telah memberikan dasar pada suatu teori logika secara matematis dan metode pemberian simbol dengan aturan-aturan yang formal.

Leibniz menciptakan kalkulusnya dari tahun 1673 sampai tahun 1676. tepatnya pada tanggal 20 Oktober 1673, untuk pertama kalinya ia memberikan simbol untuk integral yang modern, seperti huruf S yang memanjang yang diambil dari huruf pertama kata latin ”Summa” (sum), dan sebenarnya indikasinya dari ”ketakterbagian Cavalieri” (cavalieri’s indivisibles). Diantaranya beberapa notasi yang kita pakai sekarang untuk integral dan derivatif, seperti:

$$\int ydy \text{ dan } \int ydx.$$

Publikasi yang pertama kalinya untuk kalkulus diferensial tidak muncul hingga tahun 1684. dalam tulisannya, Leibniz menerangkan bahwa dx sebagai suatu interval terbatas yang berubah-ubah kemudian ia mendefinisikan dy dengan rumusan : Dy : dx = y subtangent.

Banyak aturan-aturan dasar yang ditemukan oleh Leibniz dalam hitung diferensial yang dipelajari oleh para pelajar pada awal pelajaran kalkulus. Diantaranya aturan untuk mendapatkan turunan ke-n dari perkalian dua fungsi adalah salah satu dari ”Aturan Leibniz” (Leibniz’s rule).

Leibniz memiliki filing yang luar biasa untuk membentuk hal-hal yang berhubungan dengan matematika, dan ia juga sangat sensitif dan potensial dalam menemukan simbol-simbol yang baik.

Notasi-notasi di dalam kalkulus terbukti sangat menguntungkan dan tak dapat disangsikan lagi ketepatan dan fleksibilitasnya dari pada notasi-notasi dari Newton yang terus menerus mengalami perubahan.

Teori determinan pada dasarnya ditentukan oleh Leibniz, yaitu pada tahun 1693 ketika dia memperhatikan sistem persamaan linear simultan. Pengembangan yang hampir sama telah diberikan sepuluh tahun lebih awal oleh matematikawan Seki Kowa (1642-1708) dari Jepang. Demikian dengan perluasan teorema binomial, yaitu teorema multinomial seperti:

$(a + b + c + \ldots + n)^n$,

Telah pula ditemukan oleh Leibniz.

Dia telah pula berbuat banyak dalam meletakkan dasar-dasar besar ”teori envelopes” dan ia telah pula mendefinisikan hal yang berhubungan dengan lingkaran yang diperlukan dalam mempelajari kurva. Disini kita akan mengakhiri tentang pertentangan diantara Newton dan Leibniz yang patut disayangkan. Pendapat yang umum pada saat ini menyatakan, bahwa setiap penemuan dalam kalkulus adalah saling mementingkan satu sama lainnya. Ketika Newton membuat hasil penemuannya yang pertama, Leibniz telah lebih awal mempublikasikan hasilnya. Jika Leibniz tidak memiliki ketajaman sebagai matematikawan seperti Newton, tidaklah akan menjadi rivalnya. Debagai seorang analisis ahli matematika dan ahli di Inggris, Leibniz mungkin memiliki imajinasi matematika yang luar biasa dan memilki insting yang lebih tajam untuk bentuk-bentuk matematika.

Dalam beberapa tahun setelah Newton Leibniz, pondasi-pondasi kalkulus tidaklah mengalami perkembangan yang luar biasa. Pada tahun 1700, sebagian besar dari sarjana-sarjana kalkulus telah mulai mengembangkan variasi-variasinya. Teks buku yang pertama yang membahas kalkulus ditulis pada tahun 1696 oleh Marquis de L’Hospital (1661-1704). Buku ini ditulisnya pada masa de L’Hospital mendapat pelajaran dari gurunya, Johann Bernoulli. Dalam buku tersebut ditemukan apa yang disebut sebagai aturan L’Hospital untuk mencari nilai limit dari suatu pecahan yang pembilang dan penyebutnya cenderung mendekati nol.

BAB XII

MASA TRANSISI ABAD DUA PULUH

12-1 PENDAHULUAN

Dalam tiga bab yang lalu telah kita uraikan tentang sumbangan pemikiran dari para matematikawan di abad ke-17 terhadap matematika dasar (*Elementary Mathematics* = aritmetika, aljabar, geometri, trigonometri, geometri analitik, dan kalkulus). Bahkan lebih daripada itu, mereka telah mampu pula memperluas dan memodifikasi matematika dasar tersebut. Dan satu hal yang menarik, bahwa matematika yang diajarkan di sekolah-sekolah adalah sesuai pula dengan evolusi dari materi matematika itu.

Untuk orang yang ingin mempelajari apa yang terjadi selama $2\frac{1}{2}$ abad dalam matematika, diperlukan pengetahuan yang cukup tentang kalkulus. Apabila kita ingin mengetahui hal yang demikian, dianjurkan untuk mempelajari buku yang ditulis oleh E.T.Bell dengan judul *"The Development of Mathematics"*. Selain dari itu perlu pula ditambah dengan pokok-pokok perkembangan dalam matematika pada abad ke-18, 19, dan abad ke-20, sehingga kita akan mampu menjelaskan secara lebih luas tentang dasar-dasar perkembangan matematika. Hal ini diperlukan, karena bidang matematika dasar yang muncul kemudian adalah sebagai pendahulu dalam prestasi abad modern.

Seseorang tidak akan dapat menunjukkan dengan jelas kesederhanaan dan ketidaklengkapan tentang apa-apa yang terjadi berikutnya dalam perkembangan sejarah matematika. Sejarah matematika yang paling terkenal Moritz Cantor telah membatasi perkembangan matematika. Ia telah membatasinya sampai akhir abad ke-18, dan ia telah membuat empat buah buku dengan uraian yang lengkap yang masing-masing hampir seribu halaman. Ia telah memperkirakan, bahwa sejarah matematika di abad ke-19 dapat ditulis dengan uraian yang lengkap sama seperti pada akhir abad ke-14, sehingga akan memuat uraian materi yang sangat banyak pula. Tidak seorangpun dapat memperkirakan jumlah uraian materi yang diperlukan dalam sejarah matematika pada pertengahan abad ke-20, karena terdapat aktifitas yang sangat banyak. Dan untuk memakai pengertian tentang materi yang banyak, tentunya memerlukan latar belakang keahlian matematika yang cukup pula.

Ledakan pertumbuhan penelitian matematika dalam abad yang modern sudah mulai nampak sejak tahun 1700. Pada waktu itu telah beredar 17 majalah yang memuat artikel-artikel matematika, kemudian, pada abad ke-18 ada 210 majalah dan pada abad ke-19 telah mencapai 950 macam majalah. Sedangkan pada pertengahan abad ke-20 jumlah majalah yang memuat artikel-artikel matematika yang beredar sudah sangat banyak macamnya. Lebih jauh lagi, sebelum sampai pada abad ke-19 telah muncul pula bermacam-macam jurnal yang memberikan uraian tentang hasil-hasil penelitian dan perkembangan sejarahnya dari materi matematik yang modern. Jurnal-jurnal yang diterbitkan pada waktu itu adalah jurnal-jurnal yang pertama kalinya menguraikan secara khusus tentang materi matematika.

Kalkulus yang dibantu oleh geometri adalah alat matematika yang terkenal yang sudah diketemukan sejak abad ke-17. Materi matematika ini sudah terbukti sangat dominan dan sangat praktis untuk dipakai dalam memecahkan soal-soal matematika. Namun pada mulanya pemakaian kalkulus ini telah ramai dipertengkarkan orang.

Untuk selanjutnya penggunaan kalkulus oleh para peneliti matematika yang terbiasa meluas dan sangat menakjubkan, sehingga pada zaman itu telah banyak dihasilkan tulisan-tulisan tentang matematika. Namun pada prosesnya, sebagian besar diantara para ahli matematika ada yang masih mempertahankan dan mempergunakan dasar yang telah biasa mereka kerjakan. Hal seperti ini berlangsung tidak hanya sampai akhir abad ke-18. Sebagai bukti dari keadaan seperti demikian telah diketemukannya sepuluh keanehan dan kontradiksi-kontradiksi yang masuk ke dalam matematika. Sebagai akibatnya di dalam matematika sudah terasa adanya hal-hal yang khusus yang dijadikan dasar oleh para ahli matematika pada waktu itu, sehingga merekapun menyadari perlunya pengujian berdasarkan logika dengan dasar yang kuat.

Adanya usaha-usaha yang sungguh-sungguh untuk menempatkan analisis sebagai dasar logika yang kuat merupakan reaksi terhadap penggunaan intuisi dan formalisme dari abad-abad sebelumnya. Pekerjaan pembuktian menjadi suatu hal yang sangat sulit. Keanekaragaman sudut tinjauan di dalam pembuktian telah menghasilkan cabang-cabang bagian yang penting dalam sejarah matematika pada 100 tahun berikutnya.

Salah satu hasil kerja yang berdasarkan analisis telah memberikan pola kerja yang penuh dengan ketelitian dan sifatnya sama untuk setiap cabang matematika. Dan dengan dasar analisis mereka telah mampu memberikan beberapa konsep yang penting di dalam matematika. Di dalam matematika, ide itu sendiri haruslah dijelaskan dengan penuh ketelitian, misalnya limit, kontinuitas (*continuity*), differensiabilitas (*differentiability*), dan integrabilitas (*integrability*) haruslah dijelaskan dengan penuh kehati-hatian dan didefinisikan dengan jelas pula.

Tugas membersihkan konsep-konsep dasar dalam matematika telah membuka ke arah penggeneralisasian yang sulit. Namun demikian, konsep-konsep seperti ruang, dimensi, konvergensi, integrabilitas dan sejenisnya telah mengalami generalisasi dan abstraksi kearah yang baik sekali.

Suatu bagian kegiatan yang baik dalam matematika telah dilakukan dalam pertengahan abad ke-20. Kegiatan ini menyeleksi konsep-konsep dalam matematik sampai pada generalisasi dan abstraksi telah menarik perhatian para ahli matematik sekarang. Tetapi beberapa kegiatan pengembangannya telah menimbulkan beberapa kelompok yang mempunyai perbedaan pendapat. Dan dari hasil penelitian tentang generalisasi telah pula memperluas dan memperdalam beberapa cabang matematika. Tetapi dalam waktu yang bersamaan mereka telah pula melakukan beberapa hal perbedaan yang tentunya sangat menggangu dalam perkembangan matematika. Hal-hal inilah yang akan kita lihat sekarang, dan pada pertengahan abad ke- 20 kita pun akan menyaksikan uraian masalah yang genting ini.

Pada beberapa paragrap yang terdahulu, kita bisa menyatakan dengan kejujuran yang tulus, bahwa pada abad ke-18 telah banyak para ahli matematika yang mengusahakan beberapa metode baru yang kuat untuk kalkulus. Kemudian abad ke-19 telah pula memberikan dasar logika yang kuat, walaupun beberapa bagian yang lemahnya masih ditegakkan sebagai akibat peninggalan dari abad sebelumnya. Demikian pula di abad ke-20 telah pula memberikan generalisasi yang lebih jauh beserta beberapa tambahannya sebagai perbaikan. Dan sekarang beberapa ahli matematika telah tertarik pada persoalan dasar matematika yang lebih mendalam lagi. Namun sebagai gambaran umumnya telah dipersulit oleh faktor sosiologi yang beraneka ragam yang mempengaruhi beberapa perkembangan ilmu pengetahuan.

Pada abad ke-18 terutama di Benua Eropa telah terjadi perkembangan yang besar dalam masalah pelayaran, ekonomi dan teknologi dan baru terpecahkan dengan revolusi industry. Masalah lainnya di Eropa adalah timbulnya peperangan di udara yang hingga sekarang telah meluas ke bagian-bagian dunia lainnya. Hal-hal yang seperti demikian telah membawa dampak yang praktis dalam perkembangan matematika. Pembagian matematika ke dalam “matematika murni” dan “matematika terapan” telah terjadi, penelitian terhadap cabang-cabang matematika itu telah meluas lagi dan dalam pelaksanaannya sering terjadi secara beririsan. Dan untuk selanjutnya kita akan melihat secara panjang lebar tentang sketsa gambaran umum yang terjadi di atas.

12-2 KELUARGA BERNOULLI

Sebagaimana yang telah diuraikan pada fasal sebelumnya (fasal 10-3), kita dapat melihat awal abad ke-18 sebagai awal dari geometri analitik yang merupakan hasil kerja dari Antoine Parent dan Alexis Clairaut.

Pada tahun pertama pertengahan abad ke-18 terlihat pula hasil kerja yang penting dari Girolamo Saccheri sebagai pelopor yang membahas tentang *geometri Non Euclid* (lihat fasal 5-7). Di akhir abad ke-18 masalah ini disebutkan kembali dalam hasil kerja Lambert, pada abad ke-19 telah pula ditemukan *geometri Non Euclid* oleh Lobachevsky, Janos Bolyai dan Gauss. Namun sebagian materi dari matematika pada abad ke-18 pertemuannya terjadi karena masalah mekanika dan astronomi. Demikian pula sampai abad ke-19, bahwa penelitian yang dilakukan dalam matematika umumnya banyak ditempuh dari pandangan mekanika dan astronomi.

Sumbangan pemikiran atas prinsip-prinsip matematika di abad ke-18 telah banyak diberikan oleh anggota keluarga besar Bernoulli, Abraham De Moivre, Brook Taylor, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Jean-le-Rond d’Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, dan Gaspard Monge.

Salah satu keluarga yang sangat terkemuka dalam sejarah matematika dan sain adalah keluarga Bernoulli dari Swiss. Sejak akhir abad ke-17 keluarga ini telah banyak memberikan ahli-ahli matematika dan ahli-ahli sain.

Tercatat dalam sejarah, bahwa pada mulanya keluarga Bernoulli ini dipelopori oleh dua saudara, yaitu Jakob Bernoulli (1654-1705) dan Johann Bernoulli (1667-1748). Seperti telah kita sebutkan dalam uraian fasal terdahulu bahwa kedua bersaudara ini telah banyak melakukan penyempurnaan konsep-konsep matematika. Kedua orang ini telah memberikan rangsangan yang menarik dengan berbagai pembahasannya tentang matematika, sehingga menjadikan matematikawan Leibniz menulis buku *Acta Eruditorum*.

Kedua bersaudara Bernoulli bersama-sama dengan Leibniz termasuk diantara matematikawan yang mempunyai keyakinan akan kemampuan kalkulus. Mereka yakin bahwa kalkulus akan dapat digunakan untuk memecahkan berbagai masalah, baik dalam matematika maupun dalam aplikasinya dalam masalah-masalah lain.

Dari tahun 1687 hingga kematiannya, Jakob Menduduki jabatannya sebagai ahli matematika di Universitas Basel. Kemudian pada tahun 1697, Johann diangkat menjadi Profesor matematika di Universitas Groningen. Pada tahun 1705, Jakob meninggal dunia dan Johann menggantikan jabatan ahli matematika di Universitas Basel, kemudian ia tinggal disana sampai akhir hayatnya.

Dua bersaudara Bernoulli ini telah bersaing secara positif, dan mereka telah biasa melakukan pertukaran pikiran. Selain di antara mereka, sering pula bertukar pikiran dengan Leibniz dan para matematikawan lainnya.

Diantaranya sumbangan yang telah diberikan oleh Jakob Bernaoulli terhadap matematika adalah pengenalan tentang penggunaan koordinat polar atau koordinat kutub (sudah diuraikan pada fasal 10-3). Dalam koordinat polar dan koordinat kartesius diuraikan tentang turunan untuk rumus jari-jari lengkungan dari sebuah kurva datar. Salah satu penelitiannya adalah tentang garis rantai (*catenary*) beserta perluasannya, yaitu masalah kaitan diantara variabel dengan tali penghubung dari sebuah gaya sentral. Dilanjutkan pula dengan penelitian terhadap sejumlah kurva datar berpangkat tinggi yang disebut isochrone yaitu kurva yang berhubungan dengan kecepatan yang sama.

Jakob Bernoulli telah pula mengusulkan dan membicarakan masalah-masalah gambar-gambar isoperimetric, dan orang pertama yang bekeja dengan berbagai variasi dalam kalkulus. Ia juga (seperti telah diuraikan dalam fasal 10-5) adalah orang pertama sebagai kelanjutan dari matematikawan probabilitas Huygens. Bukunya dalam bidang ini adalah *Ars conjectandi* yang diterbitkan pada tahun 1713.

Ada pula beberapa konsep dalam matematika yang ditunjang oleh nama Jakob Bernoulli, diantaranya distribusi Bernoulli dan berbagai teorema Bernoulli dalam statistika dan probabilitas. Persamaan Bernoulli yang dijumpai oleh setiap pelajar didahului oleh persamaan-persamaan differensial, bilangan-bilangan Bernoulli dan polinom-polinom Bernoulli dari teori bilangan serta Lemnisca te Bernoulli yang dijumpai dalam pelajaran kalkulus.

Penyelesaian yang diberikan oleh Jakob Bernoulli terhadap masalah kurva Isochrone dimuat dalam *Acta eruditorum* yang diterbitkan pada tahun 1690. Dalam buku ini, kita menemukan kata “Integral” dalam kalkulus untuk pertama kalinya. Di lain pihak, Leibniz telah pula meyebut kalkulus integral dengan istilah “calculus summatorius”. Kemudian dalam tahun 1696 Leibniz dan Johann Bernoulli sepakat untuk meyebutnya “caculus integralis”.

Jakob Bernolli telah pula menemukan spiral equiangural yang ditemukannya sendiri dari bermacam-macam transformasi sebagai tiruan dari Archimedes. Spiralnya digambar pada batu kapur sepanjang tulisan “Eadem Mutate Resurgo” (“saya akan muncul dengan cara yang sama meskipun ada perubahan”).

Johann Bernoulli telah memberikan sumbangan pemikiran yang lebih melimpah terhadap matematika daripada saudaranya Jakob Bernoulli. Meskipun ia seorang pecemburu dan orang yang suka bertengakar, namun ia adalah seorang guru yang paling berhasil pada masanya. Ia orang yang telah memperkaya kalkulus dan orang yang sangat berpengaruh dalam membicarakan pembaharuan di Benua Eropa.

Telah kita lihat pula dalam fasal sebelumnya (fasal 11-10), bahwa Marquis de l’Hospital (1661-1704) di bawah perjanjian keuangan yang ganjil dengan gurunya Johann telah dapat menerbitkan teksbuk kalkulus yang pertama. Buku kalkulus ini diterbitkan pada tahun 1696 yang berisikan materi pelajaran yang diberikan oleh Johann Bernoulli. Dalam buku tersebut dimuat metode yang terkenal tentang penilaian keadaan yang tidak menentu untuk pecahan yang pembilang dan penyebutnya mendekati nol. Dalam buku-buku kalkulus, metode seperti ini dikenal sebagai teorema l’Hospital.

Johann Bernoulli telah pula menulis bermacam-macam topik, diantaranya fenomena optik yang berhubungan dengan pemantulan dan pembiasan. Penentuan kurva yang mempunyai lintasan orthogonal, perbaikan kurva drajat dua, trigonometri analitis, kalkulus eksponensial, dan masih banyak topik lainnya.

Salah satu diantara tulisan Johann Bernoulli yang paling mendapat perhatian ialah sumbangan hasil kerjanya dalam masalah “brachystochrone”, yaitu menentukan kurva yang paling cepat dari sebuah partikel yang mempunyai berat dan bergerak diantara dua titik yag diberikan dalam suatu daerah gravitasi. Kurva yang dihasilkannya merupakan sebuah busur yang menyerupai kurva sikloida (*cycloid*). Masalah ini pernah pula dibicarakan oleh Jakob Bernoulli.

Kurva sikloida merupakan jawaban terhadap masalah “tautochroune”, yaitu menetukan kurva sepanjang partikel yang mempunyai berat yang sampai di suatu titik tertentu dalam interval waktu yang sama, sedangkan titik awal kurva tersebut dipersoalkan. Secara lebih umum lagi, persoalan seperti ini selain dibicarakan oleh Jakob Bernoulli juga dibicarakan oleh Johann Bernoulli, Euler, dan Lagrange. Namun persoalan seperti ini sebelumnya telah pula dipecahkan oleh Huygens (1673) dan Newton (1687). Seperti telah kita ketahui dalam bab X, Huygens telah menggunakan persoalan ini dalam membahas cara-cara pembuatan bandul jam.

Johann Bernoulli mempunyai tiga orang putera yaitu yang pertama Nicolaus (1659-1726), Daniel (1700-1782), dan yang terakhir Johann (II) (1710-1790). Kesemuanya ini mempunyai nama yang termashur sebagai matematikawan dan saintis di abad ke-18.

Nicolaus Bernoulli nampaknya paling berbakat dalam bidang matematika seperti yang diutarakan oleh Akademi St. Petersburg. Ia telah menulis masalah kurva, persamaan differensial, dan probabilitas. Diantaranya ada sebuah persoalan probabilitas yang pernah diajukan di St. Petersburg yang kemudian dikenal sebagai paradoks St. Petersburg. Persoalan ini berhubungan dengan pengetossan (pelemparan) kepingan uang logam, yaitu A akan menerima satu sen dolar jika yang muncul kepala (muka) dari hasil pengetosan uang pertama, akan menerima dua sen dolar jika tidak muncul kepala (muncul ekor atau muka baru) pada pengetosanyang kedua, akan menerima empat sen dolar jika tidak muncul kepala pada pengetosan ketiga, dan seterusnya, berapakah nilai ekspetasi A (nilai harapan A)? menurut teorema yang berlaku dalam matematika menunjukkan bahwa nilai ekspetasi A tidak berhingga, dan ini adalah sebuah hasil yang bersifat paradoks.

Untuk selanjutnya, persoalan paradoks St. Petersburg diselidiki oleh Daniel Bernoulli, dan ia pula yang menggantikan Nicolaus Bernaulli di Akademi St. Petersburg.

Daniel Bernoulli adalah yang paling terkenal diantara tiga putera Johann Bernoulli. Ia telah banyak memberikan sumbangannya dalam masalah probabilitas, astronomi, fisika, dan hidrodinamika. Dalam probabilitas, Daniel telah megemukakan konsep "Ekspetasi moral" (*Moral Exspetation*). Kemudian pada tahun 1738 ia telah mengemukakan prinsip-prinsip hidrodinamika, sehingga namanya tercantum dalam setiap buku pelajaran Fisika dasar. Selain dari itu, ia telah pula menulis teori kinetis (*kinetic*) untuk gas, kemudian mempelajari getaran dawai, dan dianggap sebagai pelopor dari persamaan diferensial parsial.

Johann Bernoulli (II), putera yang paling muda dari tiga bersaudara, pada mulanya mempelajari masalah hukum, namun beberapa tahun menjelang akhir hidupnya ia menjadi Profesor matematika di Universitas Basel. Dalam matematika, Johann (II) secara khusus lebih tertarik dalam masalah panas dan cahaya yang berkaitan dengan teori-teori matematika.

Adapula seorang keponakan Jakob dan Johann I yang bernama Nicolaus II (1687-1759) yang telah pula mencapai kemasyuran dalam bidang matematika. Nicolaus Bernaulli II pernah menduduki kursi ahli matematika di Padua, dan kedudukan ini pernah dipegang oleh Galileo untuk selama satu periode. Nicolaus II telah pula menulis Geometri dan persamaan diferensial secara panjang lebar. Pada akhir hidupnya, Nicolaus II memberikan kuliah logika dan hukum.

Johann Bernoulli II mempunyai tiga orang putera, satu diantaranya bernama Johann Bernoulli III, (1744-1807). Selain namanya sama seperti ayahnya, ia sama seperti ayahnya mempelajari bidang hukum dulu, kemudian akhirnya kembali kepada matematika. Ketika ia berumur 14 tahun, ia dipanggil sebagai seorang professor matematika di Akademik Berlin. Johann III menulis masalah astronomi, doktrin peluang (*doctrine of chanche*), pecahan bersusun, dan persamaan tersamar.

Dua orang putera Johann Bernoulli II lainnya kurang mendapat perhatian, yaitu Daniel Bernoulli II (1751-1834) dan Jakob Bernoulli II (1759-1789). Keluarga Bernoulli yang lainnya adalah putera Daniel Bernoulli II yang bernama Crhistoph Bernoulli (1782-1863). Crhistoph mempunyai seorang putera yang bernama Johann Gustav (1811-1863).

12-3 DE MOIVRE, TAYLOR, MACLAURIN

Abraham De Moivre (1667-1754) yang lahir di Perancis tetapi lama tinggal di Inggris adalah sahabat baik Isaac Newton. Hasil kerjanya yang paling berharga dicatat dalam *Annuities upon lives*, yaitu aturan-aturan yang penting dalam sejarah perhitungan asuransi (actuarial Mathematics). Ia telah pula mengemukakan doktrin peluang yang banyak memuat materi baru tentang teori-teori probabilitas. Kemudian ia memberikan *Miscellanea analytica*, yang banyak berhubungan dengan deret, probabilitas, dan trigonometri analitik.

De Moivre merupakan orang pertama yang mengemukakan berlakunya integral probabilitas,

$$\int_0^{\sim} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$$

Dan esensialnya kurva frekuensi normal

$$y = c\,e^{-hx^2}$$

dengan c dan h konstanta, merupakan hal-hal yang penting dalam pelajaran statistika. Rumus Stirling's yang salah sebut, berlaku untuk n yang besar menyatakan bahwa:

$$n! \approx (2\,\pi\,n)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^n,$$

diberikan oleh De Moivre sebagai pendekatan n faktorial untuk jumlah yang besar. Demikian pula dengan rumus trigonometri yang sudah terkenal yaitu: $(Cos\;x + i\;Sin\;x)^n = Cos\;nx + i\;\;Sin\;nx,\;\; i = \sqrt{-1}$
dengan n adalah bilangan bulat positif, rumus ini dikenal dengan nama Rumus De Moivre, dan tentunya akan kita jumpai pada teksbuk-teksbuk yang membicarakan teori persamaan. Rumus ini telah menjadi dasar dalam trigonometri.

Adapula hal yang lebih menarik, yaitu dongeng yang sering diceritakan tentang kematian De Moivre. Sesuai dengan riwayat De Moivre, dikabarkan bahwa dalam setiap harinya diperlukan seperempat jam tambahan lebih lama waktu tidurnya dari setiap hari sebelumnya. Kemudian, ketika mencapai 24 jam lamanya waktu yang diperlukan untuk tidurnya ia meninggal dunia.

Setiap orang yang pernah mempelajari kalkulus, tentunya akan kenal dengan orang Inggris yang bernama Brook Taylor (1685-1731), dan orang Scot yang bernama Colin Maclaurin (1698-1746).

Pada tahun 1715 Taylor telah mempublikasikan (dengan tidak ada pertimbangan konvergensi) teorema. Perluasan dari sebuah fungsi yang diuraikan dalam deret pangkat, teorema ini dikenal dengan nama deret Taylor yang dinyatakan dalam bentuk:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a)\,\frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \ldots\ldots$$

Dalam tahun 1717, Taylor telah menggunakan deretnya untuk menyelesaikan persamaan-persamaan numerik, diantaranya seperti berikut: misalkan a adalah aproksimasi untuk sebuah akar dari f(x) = 0; set f(a) = k, f′(a) = k′, f"(a) = k" dan x = a + h; perluasannya 0 = f (a + h) dengan deret; buang semua pangkat h yang lebih dari kedua; subtitusikan nilai-nilai dari k, k′, k", dan selesaikanlah untuk h. pemakaian yang berturut-turut dari proses seperti ini merupakan aproksimasi yang sangat mendekati terhadap keadaan yang sebenarnya.

Beberapa pekerjaan yang telah dilakukan oleh Taylor dalam teori perspektif telah dipergunakan baru-baru ini untuk keperluan matematika photogrammetry. Ilmu pengetahuan ini berhubungan dengan penelitian pemakaian alat potret yang diambil dari pesawat terbang.

Maclaurin termasuk salah seorang matematikawan tertama di abad ke-18. ia telah memperluas masalah deret Taylor, yaitu mengambil satu kasus untuk a = 0, dan sesungguhnya hal seperti ini pernah pula diberikan 25 tahun sebelumnya oleh James Stirling. Perluasan deret taylor yang dilaksanakan oleh Maclaurin terjadi pada tahun 1742.

Maclaurin merupakan salah seorang yang terkemuka dalam bidang geometri, khususnya dalam masalah-masalah kurva bidang pangkat tinggi (higher plane curves). Selain itu, ia telah pula menunjukan kemampuannya yang sangat tinggi dalam pemakaian geometri klasik untuk menyelesaikan masalah-masalah fisika. Diantara beberapa tulisannya yang membahas matematika terapan ada yang menjadi pemenang laporan ilmiah untuk teori matematika saat itu.

12-4 EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT

Nama Leonard Euler telah sering disebut dalam tulisan kita ini. Euler (1707-1783) lahir di Bassel, Swiss, dan ia belajar matematika dibawah pimpinan Johann Bernoulli. Pada tahun 1727 ia menduduki jabatan kursi ahli matematika di Akademi St. Peterburg yang baru didirikan oleh Peter yang agung. Empat belas tahun kemudian, ia menerima undangan dari Frederick yang agung untuk datang ke Berlin untuk memimpin Akademi Prussian. Sesudah 25 tahun berlalu, Euler kembali lagi ke St. Peterburg, dan ia tinggal di sana hingga kematiannya pada tahun 1783 dalam usia 76 tahun.

Euler adalah seorang matematikawan yang terkenal dan paling banyak karya tulisnya. Karena ia adalah salah seorang matematikawan yang produktif, maka tentu saja namanya banyak disebut-sebut dalam setiap perkembangan cabang matematika. Yang paling menakjubkan tentang produktivitas karya tulisnya terjadi pada tahun 1768. pada tahun ini, Euler mengalami musibah menjadi buta secara total namun kejadian ini tidaklah menjadikan kerugian bagi dirinya dalam usaha-usahanya untuk terus menulis.

Karya-karya Euler merupakan contoh yang menarik dari formalisme abad ke-18, karena merupakan manipulasi yang tidak memperhatikan konvergensi dan keberadaan matematika, dan sekaligus rumus-rumusnya telah melibatkan proses yang tidak terbatas. Sebagai contoh, jika teorema binomial digunakan untuk $(1-2)^{-1}$ maka akan kita peroleh:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots ,$$

Apakah hasil yang diperoleh oleh Euler ini tidak mengagumkan? Juga dengan menjumlahkan dua deret:

$$x + x2 + \dots = x/(1 - x) \; dan$$

$$1 + 1/x + 1/x2 + \dots = x/(x-1),$$

Euler menemukan bahwa

$$\ldots + 1/x2 + 1/x + 1 + x + x + \ldots = 0.$$

Usaha-usaha yang telah dilakukan oleh Euler pada abad ke-18 telah memberikan dorongan yang sangat kuat dalam perkembangan matematika di abad ke-19. Ia telah membawa hal-hal yang menimbulkan keanehan, di antaranya seperti yang di atas, sehingga menjadi rancangan untuk para matematikawan berikutnya.

Secara umum sumbangan Euler dalam sejarah perkembangan matematika sangatlah banyak. Namun secara khusus kita dapat memperhatikan sumbangan pemikirannya dalam bentuk-bentuk yang sangat mendasar. Kita merasa berhutang budi kepada Euler dalam hal kebiasaannya untuk menggunakan notasi-notasi berikut:

f(x) untuk notasi fungsi,
e untuk bilangan pokok logaritma natural,
a, b, c untuk sisi-sisi dari sebuah segitiga ABC
s untuk keliling suatu segitiga
Σ untuk menyatakan jumlah al-jabar
i untuk satuan imajiner, $\sqrt{}$-1.

Euler telah pula memberikan rumus-rumus yang menakjubkan di antaranya hubungan-hubungan seperti berikut:

$$e^{ix} = cos\, x + i\, sin\, x\ ,$$

dan untuk x = π, rumus di atas menjadi:

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,,$$

ini adalah sebuah relasi yang menghubungkan lima buah bilangan khusus yang sangat penting dalam matematika. Selanjutnya dengan proses formal yang murni, Euler telah sampai pada sejumlah relasi yang ia ingin ketahui, seperti

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

dan ia telah pula berhasil menunjukkan bahwa untuk beberapa bilangan real yang tidak nol r mempunyai logaritma yang tidak terhingga (untuk sebuah bilangan pokok yang diberikan), semuanya imajiner jika r 0 maka semuanya imajiner kecuali r 0.

Dalam pelajaran geometri, kita menemukan garis Euler (*Euler Line*) dari sebuah segitiga (soal latihan). Demikian pula di perguruan tinggi dalam teori persamaan, kita kadang-kadang menggunakan metode Euler (*Euler Method*) untuk menyelesaikan persamaan kuadrat. Bahkan dalam pendidikan menengah pun, banyak kita jumpai teorema Euler (*Euler theorem*) dan fungsi Ø Euler (*Euler Ø-function*) (latihan soal-soal).

Fungsi beta dan fungsi gama dalam kalkulus tinggi diberikan oleh Euler, meskipun ada anggapan diberikan oleh Wallis. Ia telah menggunakan idenya untuk menyatukan faktor-faktor dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Ini adalah salah satu perkembangan yang pertama dari teori pembagian yang terus menerus. Teori ini merupakan sumbangan dalam bidang geometri diferensial dari variasi-variasi kalkulus. Selain itu teori tersebut telah pula memperluas teori bilangan.

Dalam salah satu karya tulis kecil, Euler telah mengemukakan relasi:

$$V - E + F = 2$$

Yang sebenarnya bentuk seperti ini pernah pula diperkenalkan oleh Descartes, yaitu suatu relasi diantara titik sudut (*vertex*) V, rusuk (*edge*) E, dan sisi permukaan (*faces*) F dari sembarang polyhera tertutup yang sederhana.

Dalam tulisannya yang lain, Euler menyelidiki kurva-kurva orbivorm, atau kurva yang menyerupai lingkaran, cembung bulat memanjang dengan luas yang tetap.

Beberapa tulisan lainnya mengungkapkan kembali beberapa penemuan dalam matematika, misalnya grafik-grafik unicursal dan multicursal (diilhami oleh tujuh jembatan yang ada di Konigsberg), lintasan-lintasan pada papan catur dan bujur sangkar Latin Greco.

Euler menerbitkan pula beberapa perluasan sebagai aplikasi matematika, misalnya untuk astronomi, mekanika, hidrolika, pembuatan kapal, artileri, dan teori musik.

Euler adalah penulis besar yang telah mempublikasikan tidak kurang dari 800 tulisan (± 866 tulisan). ia telah menghadiahkan sejumlah teksbuk yang penuh kejelasan, terperinci, dan lengkap. Naskahnya banyak yang terkenal dan mencapai popularitas yang lama, dan pada saat sekarang pun masih sangat menarik dan banyak keuntungannya untuk dibaca. Tentunya kita merasa heran pada ide-ide Euler yang begitu banyak, demikian pula para matematikawan besar lainnya sesudah Euler, mereka semuanya merasa berhutang budi kepada Euler.

Claude Alexis Clairaut (1713-1765) yang lahir di Paris pada tahun 1713, dan meninggal di sana pada tahun 1765. ia mengenyam pendidikan matematika sejak usia muda, dan pada usia 11 tahun ia telah berhasil menyusun sebuah risalah tentang kurva pangkat tiga. Bertitik tolak dari tulisan yang pertamanya ini, ia telah dapat mengembangkan teori berikutnya yang luar biasa, yaitu mengenai geometri differensial dari kurva-kurva ruang.

Clairaut pernah memenangkan sebuah kedudukan di akademi sains Perancis pada usia yang belum memenuhi persyaratan, yaitu ketika ia baru berusia 18 tahun.

Pada 1736, Clairaut bersama dengan Pierre Louis Moreau de Moupertuis (1698-1759) melakukan ekspedisi ke Lapland untuk mengukur panjang satu derajat meridian bumi. Ekspedisi ini dilakukan untuk menyelesaikan masalah perbedaan pendapat tentang bentuk permukaan bumi.

Newton dan Huygens telah menyimpulkan dalam teorinya secara matematis, bahwa bumi bentuknya pipih terhadap kutub-kutubnya. Namun sekitar tahun 1712 ahli astronomi dan matematika dari Italia, yaitu Geovanni Domenico Cassini (1625-1412) dan putranya kelahiran Perancis Jacques Casini (1677-1756) telah mengukur sebuah busur bumi yang membujur dari Dunkirk ke Perpignan. Dari hasil penelitian mereka, tampaknya mendukung anggapan yang diberikan oleh Cartesian, bahwa bumi memanjang terhadap kutubnya.

Hasil pengukuran yang telah dibuat dari Lapland tidaklah dapat disangkal, malahan memperkuat keyakinan Newton-Huygens, dan hasil yang diperolehnya Maupertouis ini dikenal dengan judul "earth flattener".

Pada tahun 1743 sesudah kembali lagi ke Perancis, Clairaut menerbitkan sebuah tulisan *Theorie de la figure de la Terre*. Dalam tahun 1752 ia memenangkan sebuah hadiah dari akademi St. Petersburg untuk tulisannya *Theorie de la Lune*. Karyanya in merupakan sebuah penelitian secara matematis tentang pergerakan bulan, yaitu menjelaskan persoalan-persoalan yang sebelumya tidak terjawab. Ia telah menerapkan proses turunan ke dalam persamaan diferensial.

$$y = px + f(p), \qquad p = dy/dx,$$

Yang sekarang terkenal dengan teksbuk dasar berbagai persamaan Clairaut, atau sering disebut pula persamaan Clairaut. Dari hasil penelitiannya, ia menemukan jawaban yang aneh, namun proses ini pernah pula dipergunakan sebelumnya oleh Brook Taylor. Selanjutnya pada tahun 1759, ia telah menghitung lamanya pergerakan komet Halley, dan dari hasil perhitungannya terjadi kesalahan satu bulan dari waktu edar sebenarnya.

Clairaut mempunyai seorang saudara yang meninggal pada usia 16 tahun. Pada usia 14 tahun, saudaranya ini pernah membaca tulisan tentang geometri yang diterbitkan oleh akademi Perancis, dan pada usia 15 tahun ia telah mempublikasikan karyanya yang berhubungan dengan geometri. Ayahnya Clairaut seorang ahli matematika, seorang koresponden dari Akademi Berlin, dan iapun seorang penulis masalah geometri.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) seperti halnya Clairaut lahir dan meninggal di Paris. Sebagai seorang bayi yang baru lahir, ia dibuang di dekat gereja Saint Jean Le Rond dan diketemukan oleh seorang gendarme. Selanjutnya secara terburu-buru dibaptis dan diberi nama sesuai dengan tempat dimana ia diketemukan. Kemudian untuk alasan yang tidak dikenal, ditambahkan nama d'Alembert.

Persaingan yang ada diantara para ilmuan, sering terjadi tidak ramah, demikian pula diantara d'Alembert dan clairaut.

Pada usia 24 tahun d'Alembert telah mendapat pengakuan dari Akademi Perancis. Pada tahun 1743, ia telah menerbitkan *Traite de dynamicue*, yang menjadi dasar sebagian besar prinsip-prinsip kinetik, sehingga melakirkan hukum d'Alembert. Pada tahun 1744 ia telah menerapkan prinsip-prinsipnya pada sebuah risalah tentang akibat-akibat angin atau pergerakan udara. Kemudian pada tahun 1747, ia telah pula menjelaskan masalah getaran dawai. Dari masing-masing karyanya itu, telah mengarah pada persamaan diferensial parsial, dan ia telah menjadi pelopor dalam penelitian persamaan yang demikian.

Dengan bantuan prinsip-prinsipnya pula, d'Alembert telah memungkinkan untuk memperoleh jawaban lengkap tentang masalah yang mengherankan, yaitu tentang lamanya waktu yang sama antara siang hari dan malam hari.

Pada tahun 1754, d'Alembert telah membentuk usulan yang penting dari teori limit di atas dasar analisis yang kuat, tetapi para matematikawan sebayanya kurang menaruh perhatian terhadap usulannya itu.

Kemudian pada tahun 1754, d'Alembert diangkat menjadi sekretaris tetap di Akademi Perancis. Selama akhir hidupnya ia mengerjakan masalah matematika dalam Ensiklopedi

Perancis (*Fench Encyclopedie*). Pekerjaan yang besar ini sebelumnya telah dimulai oleh Denis Diderot bersama-sama dengan d'Alembert sendiri.

12-5 LAMBERT, LAGRANGE, MONGE

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) lebih muda sedikit dari Clairaut dan d'Alembert, ia lahir di Mulhouse (Alsace) bagian dari wilayah Swiss.

Pada tahun 1766, Lambert telah menulis hasil penelitiannya dalam masalah postulat paralel yang berjudul *Die Theorie der Paralellinien* (lihat pasal 5-7). Ia termasuk salah seorang matematikawan yang kemampuannya sangat tinggi.

Sebagai putera seorang penjahit yang miskin, Lambert banyak menuntut ilmunya dengan cara belajar sendiri. Ia memiliki daya imajinasi yang baik dan mempunyai perhatian yang besar terhadap matematika.

Pada kenyataannya, Lambert adalah orang pertama yang membuktikan bahwa bilangan π (phi) adalah irasional. Ia telah memperlihatkan, bahwa jika x adalah bilangan rasional yang tidak sama dengan nol, maka tgn x bukanlah bilangan rasional. Karena harga Tgn $\frac{\pi}{4}$ = 1, maka $\frac{\pi}{4}$ atau π tidak mungkin rasional.

Kita juga merasa berhutang budi kepada Lambert, karena ia adalah orang pertama yang membahas secara sistematis masalah teori fungsi hiperbolik. Selain itu ia pula yang telah menghadirkan notasi-notasi untuk fungsi tersebut.

Lambert adalah seorang sarjana di berbagai bidang, dan tentunya yang paling utama adalah sumbangan pemikirannya yang selalu berkaitan dengan matematika. Ia telah menyumbangkan geometri deskriptif, lintasan orbit comet, dan teori proyeksi yang sekarang digunakan dalam pembuatan peta. Ia pernah pula memperhatikan masalah logika matematika yang pernah diteliti secara garis besarnya oleh Leibniz.

Dua orang matematikawan ternama dari abad ke-18 lainnya adalah Joseph Lagrange (1736-1813) dan Euler (1707-1783).

Pada tahun 1766, ketika Euler meninggalkan Berlin, Frederick Yang Agung menulis surat kepada Lagrange, bahwa "Raja yang paling besar di Eropa" menginginkan di istananya "matematikawan yang paling besar di Eropa". Lagrange menerima undangannya, dan selama 20 tahun ia memegang jabatan yang dilepaskan oleh Euler.

Beberapa tahun sesudah meninggalkan Berlin, dan karena situasi politik yang kacau di Perancis, Lagrange menerima jabatan guru besar di Ecole Normale dan politeknik Ecole. Kedua perguruan ini menjadi terkenal di Perancis. Tercatat dalam sejarah matematika, bahwa kedua perguruan tinggi ini telah banyak mendidik matematikawan modern di Perancis yang memegang jabatan guru besar di sana. Lagrange telah meningkatkan kualitas para sarjana yang dihasilkan dari lembaga yang dibinanya.

Karya-karya Lagrange mempunyai pengaruh yang sangat kuat dalam setiap penelitian matematika yang berikutnya. Ia adalah matematikawan pertama dalam angkatannya yang merasa tidak puas terhadap dasar-dasar analisis, dan ia telah mencoba kekuatan kalkulus. Namun hasil percobaannya kurang memuaskan, dan dipublikasikan pada tahun 1797 dalam Theorie des functions analytiques contenant les principes du calcul differentiel. Ide yang terpenting dalam tulisannya ini adalah pernyataan dari sebuah fungsi f(x) menurut deret Taylor. Turunan-turunan f'(x), f"(x),… yang kemudian didefinisikan sebagai koefisien-koefisien dari h, $h^2/2!$, … pada perluasan Taylor dari f(x + h) dipandang dari h. Notasi f'(x), f"(x),… yang sekarang telah umum pemakaiannya, diberikan oleh Lagrange. Namun Lagrange gagal untuk memberikan pengertian yang cukup dalam hal konvergensi dan divergensi. Sekalipun demikian, kita meyakini bahwa Lagrange adalah orang pertama yang telah membahas "teori fungsi variabel real".

Dua karya besar lainnya dari Lagrange adalah Traite de la resolution des equations numerques de tous degres dan sebuah karya monumental Mecanique analytique. Tulisan yang pertama memberikan sebuah metode pendekatan mencari akar real dari sebuah persamaan dengan menggunakan pembagian yang terus-menerus. Tulisan yang kedua (sebuah puisi ilmiah) yang ditulis sejak ia tinggal di Berlin, dan membahas persamaan umum dari sebuah sistem dinamika yang kemudian dikenal sebagai Persamaan Lagrange.

Karya Lagrange yang lainnya banyak membahas persamaan diferensial (sebagai contoh metode variasi dari parameter), dan yang lebih khusus lagi dalam persamaan diferensial parsial. Tulisan-tulisannya ini sangat menarik perhatian dan sekaligus merupakan sumbangan yang berharga terhadap kalkulus.

Lagrange tertarik pula terhadap teori bilangan, dan ia telah pula menulis dalam bidang ini. Misalnya dalam salah satu penerbitannya dimuat cara pembuktian yang pertama tentang teorema, bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai jumlah yang tidak lebih dari empat buah suku pangkat dua.

Beberapa karya Lagrange tentang teori persamaan merupakan awal yang membawa Galois kepada teori grupnya. Salah satu teorema dalam teori Grup yang menyatakan bahwa Order suatu subgrup dari suatu grup G adalah faktor dari Order G disebut Teorema Lagrange.

Jika kita perhatikan ternyata Euler dalam menguraikan karyanya telah menulis dengan sangat terperinci dan leluasa. Sedangkan Lagrange menulis karyanya dengan ringkas dan memperlihatkan sebagai hasil usaha yang keras. Lagrange adalah modern dalam gaya dan dapat dikarakteristikan sebagai analisis real yang pertama.

Matematikawan abad ke-18 yang terakhir akan kita lihat adalah Gaspard Monge (1746-1818) (Gambar 12.13 terlampir). Pada tahun 1794 ia diangkat menjadi seorang guru besar matematika di Politeknik Ecole, dan ia termasuk salah seorang pendirinya.

Monge tercatat pula sebagai orang yang secara terperinci menjelaskan geometri deskriptif, yaitu ilmu pengetahuan yang berkaitan dengan tiga dimensi dari bangun-bangun yang diproyeksikan pada bidang dua dimensi.

Salah satu karya Monge yang berjudul "Application de I'analyse a la geometrie" yang pernah diterbitkan sampai lima edisi merupakan salah satu karya yang terpenting. Karyanya ini merupakan tulisan pertama yang membahas geometri differensial dari permukaan.

Monge adalah seorang guru yang berbakat, sehingga dalam kuliahnya memungkinkan sebagian besar yang mengikutinya menjadi ahli-ahli geometri.

Akhirnya kita dapat menyimpulkan terhadap beberapa hasil penelitian matematika yang dilakukan pada abad 18. Pada abad ini kita dapat menyaksikan dan mencatat beberapa pengembangan yang jauh dalam berbagai bahasan seperti trigonometri, geometri analitik, kalkulus, teori bilangan, teori persamaan, probabilitas, persamaan diferensial, dan mekanika analitik. Juga kita dapat melihat beberapa materi baru yang diciptakan dalam abad ini, diantaranya pengetahuan aktuarial, kalkulus bervariasi, fungsi pangkat tinggi, geometri deskriptif dan geometri differensial.

12-6 TIGA PERISTIWA PENTING DARI ABAD KE-19

Abad kesembilan belas bagian teratas dari sejarah perkembangan matematika terus menerus mengalami peningkatan, namun umumnya peningkatan itu hanyalah terjadi pada kedalaman dasarnya saja. Evaluasi dari intuisi yang kuat dalam matematika mengalami kemajuan. Matematika secara berangsur-angsur mendapatkan kebebasan dari ikatan tradisional. Generalisasi dan abstraksi mulai menjadi susunan yang terbiasa. Tanggung jawab pengajaran matematika profesional lebih meningkat. Penelitian semakin lebih berpusat di universitas-universitas daripada di sekeliling istana raja. Bahasa-bahasa nasional berangsur-angsur diganti dengan bahasa Latin ilmiah. Para matematikawan mulai bekerja dalam bidang yang lebih khusus. Sejumlah filsafat penting dari matematika bermunculan.

Ada tiga peristiwa penting yang terjadi dalam sejarah perkembangan matematika di abad ke-19. Tiga peristiwa itu diantaranya adalah satu dalam bidang geometri, satu dalam bidang aljabar, dan satu lagi dalam bidang analisis.

Peristiwa penting yang pertama terjadi dalam bidang geometri, yaitu di sekitar tahun 1824 diketemukannya cabang geometri baru yang berbeda dengan geometri dari Euclid. Sejarah perkembangan dari peristiwa itu telah kita ceritakan dalam pasal 5-7. Beberapa pahlawan dalam geometri non Euclid itu diantaranya Nicolai Ivanivitch Lobachevsky (1793-1856), Jenus Bolyai (1802-1860), dan Carl Fiedrich Gauss (1777-1855) (Gambar 12.14 terlampir).

Penemuan pertama dari geometri non Euclid adalah sebagai akibat dari penyelesaian akhir terhadap masalah postulat paralel. Postulat paralel ini diperlihatkan sebagai sesuatu hal yang bebas dari asumsi-asumsi geometri Euclid. Namun sebagai akibatnya yang lebih jauh telah membebaskan diri dari acuan geometri tradisional.

Adanya anggapan yang sudah berakar selama berabad-abad tentang adanya satu sistem geometri telah memungkinkan terciptanya beberapa sistem geometri yang baru. Dengan memungkinkan terciptanya geometri "artificial" murni, maka menjadi jelas bahwa geometri tidaklah terikat pada ruang fisik yang nyata. Postulat-postulat dalam geometri bagi para matematikawan dapat dijadikan hipotesa yang mempunyai kebebasan fisik yang sebenarnya. Para matematikawan dapat mengambil postulatnya sesuai dengan kesenangannya selama mereka tetap konsisten antara yang satu terhadap yang lainnya.

Kejadian yang kedua dari tiga peristiwa penting dalam matematika, terjadi dalam bidang aljabar. Peristiwa ini berlangsung tidak berapa lama sesudah peristiwa yang pertama, yaitu dalam tahun 1843 timbulah aljabar yang tidak komutatif. Pada awal abad ke-19, aljabar dipandang sebagai penggeneralisasian yang sederhana dari aritmatika. Aljabar dipandang sebagai pengganti pekerjaan yang berhubungan dengan bilangan-bilangan yang mempunyai sifat-sifat yang khusus. Dan sebagaimana halnya yang dilakukan dalam aritmatika, maka pada aljabarpun kita menggunakan huruf-huruf sebagai simbol untuk menyatakan bilangan-bilangan yang sembarang.

Pada awal abad ke-19, sekelompok orang yang berkecimpung di lingkungan sekolah-sekolah di Inggris seperti George Peacock (1791-1858), Duncan Farquharson Gregory (1813-1844), Augustus De Morgan (1806-1871) dan beberapa orang lainnya merupakan orang-orang pertama yang memperhatikan struktur dalam aljabar. Mereka telah mengemukakan beberapa hukum yang berlaku dalam susunan aljabar, diantaranya hukum komutatif dan hukum asosiatif yang berlaku dalam operasi tambah dan operasi kali, kemudian hukum distributif dari perkalian terhadap penjumlahan dan sebagainya.

Pada awal abad ke-19, telah menampakkan adanya pemikiran tentang struktur dalam aljabar yang berbeda dengan struktur dalam aljabar dari aritmatika. Seperti halnya pemikiran tentang aljabar pada tahun 1843 dari seorang ahli matematika Irlandia William Rowan Hamilton (1805-1865). Ia telah menemukan aljabar yang berdasarkan pemikirannya selama bertahun-tahun terhadap sebuah soal khusus. Dalam aljabarnya itu diperlihatkan bahwa hukum komutatif dari perkalian tidaklah dijadikan sebagai pegangan dari suatu struktur.

Pada tahun berikutnya yaitu tahun 1844, matematikawan Jerman yang bernama Hermann Grassmann (1809-1877) telah menerbitkan edisi pertama dari tulisannya “Ausdehnungslehre”. Dalam karyanya yang terbaik ini, ia telah mengembangkan seluruh kelas-kelas dalam aljabar dengan suatu struktur yang berbeda dengan aljabar yang dikenal dari aritmatika.

Dalam tahun 1857, seorang matematikawan Inggris Arthur Cayley (1821-1895) telah merancang aljabar matriks. Dalam aljabar matriks ini, Cayley telah memperlihatkan suatu contoh yang berbeda dengan aljabar yang biasa, yaitu tidak dipenuhinya hukum komutatif untuk operasi kali.

Dengan adanya perkembangan baru dalam aljabar yang memenuhi struktur hukum-hukum yang berbeda dari kepatuhan dalam aljabar biasa, telah membukakan jalan ke arah aljabar abstrak modern (modern abstract algebra).

Akhirnya terjadilah kelemahan bahwa terhapusnya bermacam-macam postulat dari aljabar biasa. Dan kadang-kadang pula kita dapat menggantikan satu postulat atau lebih dari aljabar biasa oleh postulat-postulat lainnya yang konsisten dengan postulat-postulat sisa. Keadaan yang demikian telah mengakibatkan timbulnya berbagai sistem yang bervariasi yang dapat kita pelajari. Beberapa sistem yang baru itu, yang kita miliki itu, diantaranya group, ring, integral domain, groupoids, quasigroups, loop, semi group, monoid, lattices, division ring, bool ring, aljabar bool, field, ruang vektor, aljabar Jordan, dan aljabar Lie. Dua contoh yang terakhir dalam aljabar yang baru adalah aljabar-aljabar yang tidak asosiatif.

Dapatlah kita katakan bahwa para matematikawan telah mempelajari aljabar dengan lebih baik lagi. Mereka telah mampu membentuk 200 struktur aljabar modern yang berbeda dengan aljabar yang biasa. Banyak diantara karya-karya ini yang dimiliki oleh para matematikawan di abad ke-20. Keadaan demikian telah mencerminkan adanya semangat dari generalisasi dan abstraksi dari matematika yang sekarang. Aljabar abstrak telah menjadi perbendaharaan dalam matematika yang sekarang.

Peristiwa yang ketiga dari pendalaman matematika pada abad ke-19 terjadi dalam bidang analisa yang pelaksanaannya berjalan secara lambat. Peristiwa evolusi dalam analisa ini sering disebut sebagai “arithmetigation of analysis”.

Kita telah melihat bahwa pada abad ke-18 telah terjadi kekhawatiran dari beberapa matematikawan sebagai akibat adanya kemelut dalam pondasi untuk analisis. Menurut hasil observasi D’Alembert, yang dilakukan pada tahun 1754 menyimpulkan, bahwa sebuah teori tentang limit dalam analisa sangatlah diperlukan. Lain lagi dengan teori yang diberikan oleh Lagrange yang dipublikasikan pada tahun 1797. Lagrange telah menolak ide limit yang diberikan oleh D’Alembert. Lagrange telah mencoba memberikan dasar-dasar analisa dengan konsep yang sama seperti yang pernah dikembangkan oleh Taylor yaitu dengan pendekatan konsep deretnya yang terkenal.

Sebuah kemajuan yang luar biasa dalam analisa telah terjadi pada tahun 1821. Seorang matematikawan Perancis yang bernama Augustin Louis Cauchy (1789-1857) pada tahun 1821 telah berhasil mendukung usaha-usaha yang dilaksanakan oleh d’Alembert. Ia telah mengembangkan sebuah teori tentang limit yang secara umum dapat diterima kebenarannya. Melalui konsep limit inilah Cauchy telah mampu memberikan definisi-definisi konvergensi, kontinuitas, differensiabilitas, dan integral terbatas (definite integral). Secara khusus definisi-definisi ini sekarang dapat kita jumpai pada teksbuk-teksbuk dasar yang membahas kalkulus.

Namun untuk keperluan suatu pengertian yang lebih mendalam lagi tentang dasar-dasar analisa, secara menyolok idenya datang pada tahun 1847. Idenya datang dari seorang matematikawan Jerman Karl Weierstrass (1815-1897). Ia telah membahas fungsi kontinu yang tidak mempunyai turunan, atau, apakah yang sama berlaku untuk sebuah kurva yang kontinu tetapi tidak mempunyai garis singgung untuk beberapa titiknya.

George Bernhard Riemann (1826-1866) telah memberikan suatu fungsi yang kontinu untuk nilai-nilai irasional dari variabelnya, tetapi diskontinu untuk semua nilai yang rasional.

Beberapa contoh di atas merupakan hal yang berlawanan dengan intuisi kita. Keadaan seperti ini menunjukkan suatu kenyataan bahwa Cauchy belum dapat membangun dasar-dasar untuk analisis yang benar-benar terlepas dari kesulitan.

Teori limit yang telah dibangun oleh Cauchy merupakan sebuah pemikiran yang sederhana dari sistem bilangan real. Tentu saja dalam pengambilan sistem bilangan realnya tidaklah terikat oleh jumlah, dan hal seperti ini telah nampak dalam beberapa teksbuk kalkulus dasar. Jelaslah bahwa teori limit, kontinuitas, dan differensiabilitas tergantung pada sistem bilangan real yang diusulkannya. Hal ini sesuai pula dengan program yang dikemukakan oleh Weierstrass, bahwa konsep dalam sistem bilangan real haruslah kuat sebab semua konsep dasar dari analisis berasal dari sistem bilangan real. Programnya yang baik ini dikenal sebagai arithmetization of analysis yang dalam pembuktiannya sangatlah sulit dan berbelit-belit. Namun demikian Weierstrass dan para pengikutnya telah dapat membuktikannya, sehingga sekarang semua analisa secara logika berasal dari sekumpulan postulat karakteristik sistem bilangan real.

Para matematikawan telah berjalan di dalam analisa dasar dengan dasar sistem bilangan real. Geometri Euclid dengan interpretasi secara analitis dapat pula didasarkan pada sistem bilangan real. Banyak matematikawan yang telah memperlihatkan bahwa sangat banyak cabang geometri yang konsisten jika geometri Euclid-nya konsisten.

Sekali lagi, karena sistem bilangan real atau beberapa bagiannya dapat digunakan untuk menafsirkan beberapa cabang dari aljabar, maka bermunculanlah berbagai usaha dalam aljabar yang berdasarkan sistem bilangan real. Memang, bahwa sekarang ini dapatlah diterangkan secara khusus bahwa semua matematika yang ada adalah konsisten, jika sistem bilangan realnya konsisten. Dalam hal ini kebebasannya terletak pada sistem bilangan real sebagai dasar dari matematika.

Karena sebagian besar matematika yang ada dikembangkan berdasarkan sistem bilangan real, maka sesuatu yang sangat menakjubkan sebagai pendalamannya telah terjadi.

Pada akhir abad ke-19 beberapa karya dari Richard Dedekind (1831-1916), George Cantor (1845-1918), dan Giuseppi Peano (1858-1932), telah membuat beberapa penyederhanaan, yaitu dengan menjadikan bilangan asli sebagai dasarnya. Orang-orang inilah yang telah menunjukkan bagaimana sistem bilangan real sebagai tema pokok dalam sebagian besar matematika dapat pula berasal dari sekumpulan postulat sistem bilangan asli.

Kemudian dalam awal abad ke-20, telah pula diperlihatkan bahwa bilangan asli dapat didefinisikan dari konsep-konsep teori himpunan, dan sebagian besar dari materi matematika dapat pula dikembangkan berdasarkan teori himpunan.

Logikawan yang dipelopori oleh Bertrand Russell (1872-1970) dan Alfred North Whitehead (1861-1947), telah memberikan dorongan yang lebih dalam lagi tentang peran dari teori himpunan sebagai dasar kalkulus dan logika. Namun demikian tidaklah semua matematikawan merasakan langkah-langkah ini sebagai hal yang telah berhasil dilaksanakan.

Sebagian besar materi matematika dapat dikembangkan berdasarkan teori himpunan. Namun disisi lain, sebagai akibat dari teori himpunan dijadikan dasar dalam matematika telah menimbulkan beberapa kemelut lain. Beberapa matematikawan di abad ke-20 telah memperhatikan kemelut yang terjadi pada waktu tersebut, dan mereka telah berusaha untuk mencari pemecahannya.

Ada tiga buah sekolah yang muncul dan berperan dalam filsafat matematika. Sekolah Logistik (*logistic school*) yang memeriksa pernyataan putusan dalam karya monumental Principia Mathematica dari Whitehead dan Russell. Yang kedua adalah Sekolah intuisi (*intuitionist school*) yang dimulai oleh matematikawan Belanda yang bernama L.E.J Brouwer (1881-). Kemudian yang ketiga adalah Sekolah Formal (*Formalist school*) yang didirikan oleh matematikawan Jerman David Hilbert (1862-1943) (gambar 12.18 terlampir).

Karena kelayakan dari logistik adalah sebuah cabang dari matematika yang merupakan perpaduan dari sekumpulan postulat dan logika, maka timbulah pembahasan logika simbul (*Symbolic logic*). Banyak para matematikawan sekarang yang telah mengembangkan Logika Simbul. Selain itu, telah ada pula sejumlah jurnal yang secara khusus telah ikut mempublikasikan karya-karya para matematikawan tersebut.

12-7 EVOLUSI DARI BEBERAPA KONSEP DASAR

Menjelang akhir abad ke-19, Georg Cantor (1845-1918) berusaha terus untuk mengembangkan teori himpunan. Yang menarik lagi teori himpunan telah berkembang dengan cepat, dan sampai sekarang setiap cabang matematika telah merasakan pengaruhnya.

Pemikiran tentang ruang (space), misalnya geometri ruang, secara garis besarnya telah dirubah oleh teori himpunan. Demikian pula konsep dasar dalam analisa, seperti limit, fungsi, kontinuitas, turunan dan integral akan lebih tepat jika dijelaskan dengan ide teori himpunan.

Namun yang sangat penting lagi adalah perkembangan dari matematika baru (*New mathematic*) yang telah berkembang sejak 50 tahun yang lampau, dan kejadiannya merupakan hal yang tidak pernah dimimpikan sebelumnya.

Sebagai akibat telah lahirnya pengertian prosedur dalam matematika baru disertai pengertian ruang (*space*) yang abstrak, maka terciptalah teori yang umum tentang dimensi dan berbagai kreasi dalam pengukuran. Kemudian terciptalah cabang matematika baru yang disebut Topologi (*Topology*) yang telah mengalami pertumbuhan secara spektakuler.

Secara singkat, di bawah pengaruh teori himpunan telah terjadi penggabungan dari matematika tradisional (*traditional mathematic*) dengan matematika baru (*new mathematics*). Prosesnya terjadi dengan kecepatan yang luar biasa.

Untuk memberikan ilustrasi dalam sejarah perkembangan konsep-konsep matematika dasar, perlu memperhatikan pemikiran tentang “ruang” dan “geometri ruang”. Konsep-konsep ini telah banyak mengalami perubahan sejak zaman Yunani kuno.

Pada zaman Yunani, hanya ada satu konsep tentang “ruang” dan satu konsep tentang “geometri”. Kedua konsep ini mutlak kebenarannya. “Ruang” merupakan sesuatu hal yang tidak dipikirkan sebagai himpunan dari titik-titik, tetapi lebih jauh lagi sebagai alam atau tempat kedudukan untuk obyek-obyek yang dapat bergerak secara bebas dan dapat diperbandingkan satu dengan yang lainnya. Dari titik pandangan ini, relasi dasar dalam geometri adalah kongruensi (*congruence*).

Dengan berkembangnya geometri analitik pada abad ke-17, masalah “ruang” menjadi lebih diperhatikan lagi dan dianggap sebagai himpunan titik-titik. Dengan adanya kreasi dari geometri yang klasik, yaitu timbulnya Geometri Non-Euclid di abad ke-19. para ahli matematika telah menerima adanya lebih dari satu geometri. Namun demikian “ruang” masih dipandang sebagai tempat kedudukan untuk menggambarkan perbandingan yang satu dengan yang lainnya.

Ide selanjutnya berpusat pada grup transformasi yang kongruen dari “ruang” kepada dirinya sendiri. Sedangkan geometri, lebih diperhatikan sebagai penelitian sifat-sifat dari susunan titik-titik, dan tidak berubah bila menyertakan “ruang” dalam membahas transformasi.

Kita telah melihat dalam fasal 9-8, bagaimana titik dipandang dan dikembangkan oleh Felix Klein (1849-1929) dalam bukunya Erlanger Program yang diterbitkan pada tahun 1872. Dalam karyanya ini, ia mendefinisikan geometri sebagai teori yang invarian di bawah sebuah grup transformasi. Konsep ini telah mempersatukan dan menggeneralisasikan semua konsep awal geometri. Selain itu, ia telah pula mengklasifikasikan secara tunggal dari sejumlah besar geometri-geometri yang terpenting.

Pada akhir abad ke-19 telah berkembang ide dari suatu cabang matematika yang bersifat abstrak dalam melahirkan sekumpulan postulat. Hal ini telah mengakibatkan setiap geometri mempunyai pandangan yang sama terhadap “titik”. Geometri yang bersifat seperti ini merupakan sebuah cabang yang khusus dalam matematika. Sekumpulan postulat dalam jumlah yang besar dan bervariasi dalam geometri telah dipelajari, namun Erlanger Programm tetap tidak terpengaruhi, malahan telah berkembang sebuah geometri yang mempunyai teori-teori yang sama dengan sebuah grup transformasi.

Dalam tahun 1906, Maurice Frechet (1878-) telah membuka penelitian tentang ruang yang abstrak (*abstract spaces*). Sebuah “ruang” menjadi himpunan dari obyek-obyek yang biasanya disebut titik-titik. Jika titik-titik ini bersama-sama dengan sejumlah relasi yang melibatkan titik-titik tersebut, maka sebuah geometri akan menjadi suatu teori yang sederhana. Kumpulan dari relasi yang melibatkan perubahan titik-titik dinamakan struktur ruang (*structure of the space*). Struktur ini kadang-kadang dapat dijelaskan dan kadang-kadang tidak dapat dijelaskan dengan teori invarian dari sebuah grup transformasi. Jadi, teori himpunan telah diterima oleh geometri sebagai sebuah generalisasi yang lebih lanjut.

Ruang abstrak untuk pertama kalinya diperkenalkan secara resmi pada tahun 1906. Pada tahun tersebut, ide geometri diperoleh dari penelitian terhadap sekumpulan titik dengan beberapa struktur yang berlapis. Keadaan ini telah dikembangkan oleh Riemann dalam kuliahnya yang terkenal pada tahun 1854. Hal yang menarik bahwa dari beberapa bagian geometri yang baru telah diketemukan pemakaian yang berharga untuk teori relatifitas Einstein, dan perkembangan lainnya untuk fisika modern.

Konsep fungsi dalam pemikiran “ruang” dan “geometri” telah mengalami evolusi. Setiap orang yang mempelajari matematika akan menemukan berbagai macam perbaikan sebagai akibat dari evolusi itu. Hal demikian merupakan suatu kemajuan yang berarti dalam penelitian dan pendidikan di sekolah tinggi.

Sejarah "fungsi" merupakan contoh lengkap yang menarik dari kecenderungan para matematikawan untuk menggeneralisasikan dan memperluas konsep-konsep mereka. Perkataan "fungsi" yang sama dengan bahasa Latinnya, kemungkinan diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1694. Untuk pertama kalinya dipakai menunjukkan sembarang besaran yang dihubungkan dengan sebuah kurva, misalnya koordinat suatu titik yang terletak pada sebuah kurva, koefisien arah kurva, jari-jari kelengkungan kurva, dan seterusnya.

Johann Bernoulli, pada tahun 1718 telah memandang sebuah fungsi sebagai pernyataan dari sebuah variabel dan beberapa konstanta. Sedangkan Euler, agak terlambat dalam memperhatikan sebuah fungsi sebagai sembarang persamaan atau sebagai rumus yang melibatkan beberapa variabel dan konstanta. Ide yang terakhir ini merupakan pola pemikiran tentang "fungsi" yang secara formal diterima oleh para siswa dalam mempelajari matematika dasar.

Konsep fungsi dari Euler tetap berlaku tidak mengalami perubahan hingga Joseph Fourier (1768-1830) memimpin penelitian tentang arus panas). Juga masih didasarkan pada fungsi, Fourier telah membahas deret fungsi yang disebut deret trigonometri. Deret ini merupakan bentuk yang lebih umum dalam hal relasi diantara variabel-variabelnya daripada yang telah dipelajari sebelumnya.

Percobaan yang dilakukan oleh Fourier telah pula memberikan sebuah definisi tentang perluasan fungsi yang mencakup relasi-relasinya. Keadaan demikian telah mengantarkan Lejeune Dirichlet (1805-1859) sampai pada rumusannya seperti berikut : "sebuah variabel adalah sebuah simbol yang menggambarkan satu dari sekumpulan bilangan ; jika dua buah variabel x dan y sedemikian rupa sehingga menghubungkan kapan saja sebuah nilai x dapat menggantikan nilai y secara otomatis dengan beberapa aturan atau hubungan, maka kita katakan y adalah fungsi dari x. variabel x yang dapat dipilih secara sembarang sehingga menghasilkan nilai untuk variabel y disebut variabel bebas (dependent variabel), sedangkan variabel y yang nilainya tergantung pada variabel x disebut variabel terikat (*independent variable*). Nilai-nilai x terletak pada daerah fungsi yang disebut domain dari definisi suatu fungsi, sedangkan nilai-nilai y terletak pada daerah yang disebut range dari satu fungsi.

Para siswa yang mempelajari matematika, biasanya menemukan definisi fungsi Dirichlet sebagai perkenalan dalam belajar kalkulus. Definisi Dirichlet ini sangatlah luas, yaitu menyatakan secara langsung relasi diantara x dan y oleh beberapa pernyataan analitik. Sedangkan penentuan ide dasarnya merupakan sebuah relasi di antara dua himpunan bilangan.

Teori himpunan yang telah memperluas konsep fungsi, di antaranya mencakup relasi untuk sembarang dua himpunan yang unsur-unsurnya dapat berupa bilangan atau yang lainnya. Dalam teori himpunan, sebuah fungsi f didefinisikan sebagai himpunan dari beberapa pasangan unsur, sehingga jika $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, dan $a_1 = a_2$, maka $b_1 = b_2$. Himpunan A beranggotakan semua unsur pertama dari setiap pasangan disebut sebagai domain fungsi, sedangkan himpunan B yang anggota-anggotanya semua unsur kedua dari setiap pasangan tadi disebut range fungsi.

Sebuah relasi yang fungsional tidaklah selamanya mempunyai arti, kecuali sebuah jenis khusus dari produk cartesian A x B. Sebuah korespondensi satu-satu adalah suatu jenis khusus dari fungsi, yaitu sebuah f sedemikian rupa, hingga untuk $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$, dan $b_1 = b_2$, maka $a_1 = a_2$. Jika untuk sebuah relasi fungsional f, $(a, b) \in f$, maka kita tulis $b = f(a)$.

Jalan pemikiran dalam fungsi telah banyak diserap oleh cabang-cabang matematika dan sain. Pada awal abad yang sekarang konsep fungsi telah mempengaruhi pola pemikiran para matematikawan. Pemakaian konsep fungsi telah berperan sebagai pemersatu prinsip dalam organisasi pengajaran matematika dasar. Konsep fungsi telah pula berperan sebagai pembentuk kebiasaan dan petunjuk yang efektif dalam menseleksi dan mengembangkan materi-materi suatu karya tulis. Tidaklah ada keragu-raguan lagi tentang keharusan seseorang mempelajari matematika untuk berkenalan sedini mungkin dengan konsep fungsi.

12-8 LAPLACE, LEGENDRE, GAUSS

Di abad ke-19 terdapat beberapa tokoh matematika yang sebagian besar dari mereka telah bekerjasama dengan orang-orang yang kurang mendapat perhatian seperti yang telah kita sebutkan pada bagian awal bab ini. Pada fasal yang sekarang, kita akan memperhatikan secara singkat nama-nama besar seperti Pierre-Simon, Laplace, Adrien-Marie Legendre, Carl Friedrich Gauss, dan beberapa ahli geometri abad ke-19 seperti Augustin-Louis Cauchy, Karl Weirstrass, Georg Bernhard Riemann, dan Georg Cantor.

Laplace dan Legendre sebaya dengan Lagrange, tetapi pada abad ke-19 mereka telah menerbitkan karya-karyanya dengan prinsip-prinsip mereka sendiri. Pierre-Simon Laplace (1749-1827) lahir dari keluarga miskin pada tahun 1749. Ia adalah seorang guru matematika yang baik, dan ia adalah seorang petualang politik. Sewaktu terjadinya revolusi Perancis, ia mengikuti partai apa saja yang berkuasa. Beberapa karyanya yang terkenal dalam bidang-bidang mekanika, ruang angkasa, probabilitas, persamaan diferensial, dan geodesi.

Beberapa karya Laplace yang terkenal di antaranya dalam bidang astronomi yang membahas mekanika ruang angkasa, adalah "*Traite de mecanique celeste*" (Lima edisi 1799-1825). Dalam bidang probabilitas, ia telah menulis "*Theorie analytique des probabilities*" (1812). Pada masing-masing bukunya didahului oleh penjelasan non teknik.

Lima jilid "*Traite de mecanique celeste*" yang judulnya diperoleh dari "*the Newton of Trance*" mencakup semua penemuan sebelumnya dalam bidang mekanika ruang angkasa. Karyanya merupakan sumbangan Laplace terhadap dunia astronomi, sekaligus sebagai bukti bahwa ia adalah jagaon yang tidak tersaingi dalam topik ini.

Mungkin menarik untuk mengungkapkan kembali tentang anekdot yang sering diceritakan sehubungan dengan karya Laplace tadi. Ketika Napoleon menegur bahwa Laplace tidak menyebut-nyebut nama Tuhan dalam risalahnya, Laplace menjawab: "Tuan, saya tidak memerlukan hipotesa itu".

Nama Laplace berhubungan pula dengan kosmologi dan dengan apa yang dinamakan "persamaan Laplace" dari teori potensial. Selain dari itu dikenal pula apa yang dinamakan "*Laplace transform*" yang akhir-akhir ini menjadi kunci kalkulus operasional dari Heaviside. Juga dikenal istilah "*Laplace expansion*" yang berhubungan dengan determinan.

Laplace meninggal pada tahun 1827, tepat seratus tahun sesudah kematiannya Isaac Newton.

Andrien-Marie Legendre (1752-1833) terkenal dalam sejarah dengan prinsip matematika dasar untuk sebuah karnyanya yang sangat populer "*Elements de geometrie*". Karya Legendre ini, merupakan peningkatan dari "*Elements Euclid*", yaitu penyusunan kembali dan penyederhanaan dari beberapa dalil geometri dalam "*Elements*" karya Euclid.

Karya Legendre tentang geometri ini sangat digemari di Amerika, dan menjadi prototipe dari buku-buku geometri di negara ini. Terjemahan geometri Legendre dibuat pada tahun 1819 oleh John Farrar dari Universitas Harvard. Tiga tahun kemudian diterjemahkan ke dalam bahasa Inggris oleh seorang guru matematika dari Skotlandia yang bernama Thomas Carlyle. Terjemahan Carlyle ini kemudian direvisi oleh Charles Davies, dan yang terakhir oleh J.H.Van Amringe, yang berjalan sampai 33 edisi dalam edisi Amerika.

Dalam edisi yang terakhir dari geometrinya, Legendre mencoba untuk membuktikan postulat paralel. Karya utama lainnya dari Legendre dalam matematika tinggi berpusatkan pada teori bilangan, fungsi elliptik, metode kuadrat terkecil dan integral yang akan kita singgung di sini.

Legendre juga merupakan salah seorang yang menekuni bidang komputer, terutama tentang tabel matematika. Sedangkan nama Legendre pada masa sekarang dihubungkan dengan persamaan diferensial tingkat dua.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

yang mempunyai peran penting dalam matematika terapan. Fungsi-fungsi yang memenuhi persamaan differensial ini disebut "fungsi Legendre" (dari tingkat n). Jika n adalah bilangan bulat yang tidak negatif, maka persamaan akan mempunyai penyelesaian polinomial yang disebut "polinomial Legendre" (*Legendre polinomials*).

Nama Legendre dihubungkan pula dengan salah satu simbol yang berlaku dalam teori bilangan yaitu simbol (c│p). "Simbol Legendre" (c│p) adalah sama dengan ± 1 dengan c adalah bilangan bulat, p adalah bilangan prima, memenuhi atau tidak merupakan sisa dari bilangan prima p yang ganjil. (Sebagai contoh, (6│19) = 1 karena kongruensi $x^2 \equiv 6$ (mod 19) mempunyai sebuah penyelesaian, dan (39│47) = -1 karena kongruensi $x^2 \equiv 39$ (mod 47) tidak mempunyai penyelesaian).

Ahli matematika yang sangat terkenal dari abad ke-19 yang sejajar dengan Archimedes dan Isaac Newton, serta termasuk pula sebagai salah seorang dari tiga matematikawan besar yang sangat terkenal sepanjang masa, adalah Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Gauss adalah seorang pendidik yang ajaib dari waktu ke waktu. Ada yang menceritakan, bahwa pada waktu ia berumur tiga tahun telah dapat mengoreksi sebuah kesalahan aturan yang termuat dalam buku milik ayahnya. Dalam fasal 5-4, kita telah melihat sumbangan pemikiran yang luar biasa yang diberikan oleh Gauss terhadap pembentukan dan penyebaran teori Euclid tentang poligon beraturan. Demikian pula dalam fasal 5-7 telah diuraikan penemuan Gauss tentang geometri non Euclid.

Pada waktu disertasi doktornya, Gauss baru berumur 20 tahun ia telah memberikan uraian secara menyeluruh tentang pembuktian teorema aljabar yang mendasar (fundamental theorem of algebra), (sebuah persamaan polinom berpangkat n dengan koefisien yang kompleks, paling sedikit mempunyai salah satu akar kompleks). Percobaan-percobaan yang tidak berhasil untuk membuktikan teorema ini pernah diberikan oleh Newton, Euler, d'Alembert, dan Lagrange.

Salah satu karya Gauss yang pernah diterbitkan dan paling terkenal adalah *Disquisitiones arithmeticae*, yaitu sebuah tulisan yang menjadi dasar penting dalam teori bilangan yang modern. Penemuan Gauss dalam menguraikan poligon beraturan muncul dalam karyanya ini. Ia telah pula memberikan notasi-notasi yang cocok untuk kongruensi, dan ia adalah orang pertama yang membuktikan secara baik tentang hukum kebalikan kuadratik. Ia telah menyatakan bahwa simbol yang didefinisikan oleh Legendre, bahwa jika p = 2P + 1 dan q = 2Q + 1 adalah bilangan-bilangan prima yang tidak sama, maka:

$$(p\,|\,q)\,(q\,|\,p) \;=\; (-1)^{PQ}$$

Sumbangan pemikiran lainnya dari Gauss, khususnya dalam bidang astronomi, geodesi, elektro, geometri diferensial dan metode kuadrat terkecil.

Pada tahun 1812 dalam sebuah tulisannya yang merupakan hasil penelitian pertama yang dibuat oleh Gauss, telah diuraikan masalah konvergensi dari sebuah deret.

Pernyataan yang terkenal yang pernah diberikan oleh Gauss, diantaranya: "Matematika adalah ratunya ilmu pengetahuan dan teori bilangan adalah ratunya matematika" (*Mathematics is the queen of the sciences, and theory of numbers is the queen of mathematics*).

Gauss dijelaskan sebagai "Raksasa matematika yang mempunyai wawasan yang luas seperti tingginya bintang dan dalamnya lembah".

Sejak dari tahun 1807 hingga meninggalnya, Gauss bekerja sebagai direktur sebuah lembaga penelitian dan guru besar matematika di Universitas Gottingen Jerman.

12-9 GEOMETRI DALAM ABAD KE-19

Lepas dari penemuan geometri non-Euclid, bidang geometri di abad ke-19 telah banyak mengalami kemajuan. Banyak karya-karya geometri yang dibahas secara sintetik dan analitik sesuai dengan semangat pengajaran yang diberikan oleh Gaspard Monge.

Geometri proyektif sebagai sebuah cabang matematika telah dimulai sejak tahun 1822, yaitu dengan diterbitkannya *Traite des proprietes des figures* oleh Jean Victor Poncelet (1788-1867).

Karya Poncelet ini telah memberikan dorongan yang kuat sekali untuk mempelajari geometri, sehingga karya ini telah membuka "peride besar" dalam sejarah geometri proyektif. Sebagaimana telah kita lihat dalam pasal 9-8, ide tentang "pole" (polar atau kutub) dalam geometri proyektif telah diteliti oleh Poncelet dan Joseph Diez Gergonne (1771-1859). Ide ini telah memberikan metode yang teratur dalam menumbuhkan prinsip "dualitas".

Banyak ide-ide Poncelet yang dikembangkan lebih jauh oleh ahli geometri dari Swiss yang bernama Jacob Steiner (1796-1867). Steiner terkenal pula sebagai ahli geometri sintetik yang terkemuka. Kemudian, geometri proyektif melahirkan dasar metrik yang oleh Karl Georg Christian Von Staudt (1798-1867) dimuat dalam *Geometrie der Lage* pada tahun 1847.

Geometri analitik telah pula dikembangkan dengan perolehan yang spektakuler dari karya-karya Augustus Ferdinand Mobius (1790-1868), Michel Chasles (1793-1880), dan Julius Plucker (1801-1868). Michel Chasles, juga merupakan salah seorang ahli geometri sintetik yang terkemuka, dan salah satu karyanya yang bersejarah dan standard adalah *Apercu historique sur l'origine et le development des methodes en geometrie* (1837).

Di lain pihak, Felix Klein (1849-1929) telah memperkenalkan karyanya dengan judul Erlanger Programm yang merupakan kodifikasi dari geometri yang dipublikasikan pada tahun 1872 (lihat pasal 9-8, perkembangan geometri proyektif).

Pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, geometri proyektif telah menerima sejumlah postulat, sehinga keterbatasan dalam geometri mulai berkurang.

Diperkirakan, bahwa dari tahun ke tahun telah terjadi perubahan dan penambahan postulat, sehingga seseorang dapat melampaui geometri proyektif, menggunakan geometri Euclid, dan menemukan sejumlah geometri penting lainnya.

Akhirnya, berkembang pula geometri diferensial yang dimulai dengan cara yang khusus oleh Gaspard Monge. Teometri ini telah dikembangkan secara mendalam oleh Carl Friederich Gauss dan Georg Bernhard Riemann.

Perlu pula diketahui bahwa pada akhir abad ke-19 telah lahir sekolah geometri yang terkenal di Italia.

12-10 CAUCHY, WEIERSTRASS, RIEMANN, CANTOR

Dengan kehadirannya Lagrange dan Gauss, analisis di abad ke-19 dapat berdiri dengan kokoh dan megah. Matematikawan di akhir abad ke-19 yang menonjol dalam karyanya adalah seorang Perancis, Augustin-Louis Chauchy (1789-1857), dan seorang Jerman Karl Weierstrass (1815-1897). Seperti telah dicatat di atas, beberapa definisi telah dihadirkan oleh Cauchy diantaranya tentang limit, kontinuitas, turunan sebagai limit dari sebuah hasil bagi yang berbeda, dan integral tertentu sebagai penjumlahan yang banyak.

Cauchy telah banyak menulis secara panjang lebar dan mendalam tentang matematika murni maupun matematika terapan. Bila diurutkan dalam jumlah karyanya Cauchy berada sesudah Euler. Sumbangannya banyak ia berikan untuk matematika tinggi, termasuk penyelidikan konvergensi dan divergensi dari deret tak hingga, teori fungsi real dan kompleks, persamaan diferensial, determinan, probabilitas, dan matematika fisika.

Nama Cauchy dijumpai pula oleh mereka yang mempelajari kalkulus dengan apa yang disebut test akar Cauchy (*Cauchy root test*) dan *test* perbandingan Cauchy (*Cauchy ratio test*). Kedua test ini digunakan untuk konvergensi dan divergensi dari satu deret dengan suku-suku yang positif. Bahkan dalam bagian pertama dari teori fungsi bilangan kompleks yang dipelajari oleh seseorang tentunya akan berjumpa dengan pertidaksamaan Cauchy, teorema integral Cauchy, dan dasar-dasar diferensial Cauchy-Riemann.

Motivasi yang diberikan oleh Cauchy terhadap para matematikawan lainnya untuk tidak hanya menggunakan manipulasi dan intuisi dalam analisis, sangatlah besar sekali.

Cauchy adalah seorang pendukung kuat dari Bourbons, dan sesudah revolusi tahun 1830, terpaksa ia mengorbankan jabatan guru besarnya di Politeknik Ecole. Ia telah pula dilarang untuk menjadi tenaga pengajar di lembaga pendidikan tersebut hampir selama delapan tahun. Bagian waktu ini, ia habiskan ditempat pengasingannya di Turin dan Pragua, serta mengajar di beberapa sekolah keagamaan di Paris.

Pada tahun 1848, Cauchy diizinkan kembali menduduki jabatan guru besar di Politeknik Ecole tanpa harus mengambil sumpah setia kepada pemerintah yang baru.

Seluruh hidup Cauchy telah dipergunakan untuk bekerja dengan tidak mengenal lelah. Namun sangat disesalkan memiliki kesombongan dan mengabaikan pendapat orang-orang yang lebih muda.

Menurut pemikiran umum tentang seorang matematikawan yang berhasil, haruslah dimulai mempelajari matematika pada usia yang relatif muda, dan dengan tidak mengenal bosan harus pula mempelajari sejumlah materi dasar yang banyak sekali. Namun lain lagi dengan Karl Weierstrass yang termasuk pada pengecualian dua aturan umum tadi.

Pada usia mudanya Karl Weierstrass lebih banyak mempelajari hukum dan keuangan, sehingga ia terlambat dalam memulai mempelajari matematika hingga berusia 40 tahun. Kemudia ia melepaskan pekerjaan utamanya dan beralih menjadi seorang pengajar sampai menduduki jabatan lektor di Universitas Berlin. Pada tahun 1864, ia menduduki jabatan guru besar di salah satu Universitas, dan akhirnya ia menghabiskan seluruh waktunya untuk memajukan matematika.

Weierstrass telah banyak menulis masalah integral hiperelliptik, fungsi abelian, dan aljabar persamaan diferensial. Namun sumbangannya yang terbesar untuk matematika berhubungan dengan dasar-dasar fungsi kompleks dari deret eksponen, uraiannya ini merupakan perluasan dari bidang kompleks yang ide awalnya pernah dicoba oleh Lagrange, tetapi Weierstrass-lah yang telah berhasil menguraikan kebenarannya secara mutlak.

Weierstrass telah berhasil menunjukkan hal yang menarik dalam mendefinisikan fungsi sebagai perkalian yang tidak terbatas. Dia telah menemukan konsep konvergensi uniform yang dimulai dengan apa yang dinamakan analisis aritmetika, atau reduksi dari prinsip-prinsip analisis untuk bilangan real. Sejumlah besar penemuan matematikanya tidak dipublikasikan secara resmi, tetapi kita dapatkan melalui pengambilan buku catatan kuliahnya. Sebagai gambaran, dalam kuliahnya pada tahun 1861 untuk pertama kalinya ia membahas contoh sebuah fungsi yang kontinu tetapi tidak diferensiabel, dan konsepnya ini baru diumumkan pada tahun 1874 oleh Paul du Bois-Reymond (1831-1889).

Weierstrass adalah salah seorang guru matematika yang sangat berpengaruh, memiliki kecermatan, dan selalu memberikan pemikiran yang positif terhadap para mahasiswanya, sehingga mereka banyak yang menjadi matematikawan ternama.

Kecermatan dan ketegaran Weierstrass searti dengan "pemikiran yang sangat seksama". Ia adalah "suara matematika yang sempurna", dan ia dikenal pula sebagai "bapaknya analisis modern".

Weierstrass meninggal pada tahun 1897, tepatnya 100 tahun sesudah dipublikasikan karya yang pertama dari Lagrange (1797), yaitu sebuah usaha untuk meletakkan dasar-dasar yang kuat dalam menegakkan kalkulus.

Selama terjadinya usaha-usaha menegakkan matematika, muncullah kecenderungan ke arah generalisasi yang abstrak. Hal seperti ini merupakan sebuah proses yang telah menjadi kenyataan dalam perkembangan matematika yang sekarang. Seorang matematikawan Jerman di abad ke-19 yaitu Georg Bernhard Riemann (1826-1866), adalah orang yang lebih banyak menaruh perhatian kepada matematika modern.

Desertasi doktornya pada tahun 1851, Riemann telah membawa konsep "permukaan Riemann" (*Riemann surface*) sebagai perkenalan dengan apa yang disebut pertimbangan topologi dalam analisis. Ia telah pula menjelaskan konsep integrabilitas dengan definisi seperti yang dikenal oleh kita sekarang sebagai "integral Riemann". Konsepnya ini telah membawa ke arah generalisasi yang lebih umum pada perkembangan abad ke-20, yaitu konsep integral yang lebih lanjut yang dikenal dengan "integral Lebesque".

Dalam kuliahnya yang diberikan pada tahun 1854 telah diperkenalkan konsep yang terkenal dengan hipotesanya tentang dasar geometris dalam membahas permukaan. Ide tentang permukaan yang diberikan oleh Riemann ini telah sampai kepada perluasannya, yaitu tentang pentingnya konsep ruang yang abstrak.

Riemann meninggal pada usia 40 tahun karena terserang tuberkolosis. Namun dalam usianya yang relatif singkat itu, ia telah meninggalkan dunia matematika dengan beberapa sumbangan pemikirannya. Tulisan Riemann merupakan pemikiran-pemikiran yang sangat berharga, dan beberapa di antaranya masih belum dapat diungkapkan penyelesaiannya oleh para matematikawan yang sekarang.

Georg Cantor (1845-1918) yang hidup pada akhir abad ke-19 dan awal abad ke-20, adalah orang ahli matematika yang perlu pula untuk kita kenal. Ia lahir di Petersburg, kemudian pindah bersama orang tuanya ke Jerman di tahun 1856, belajar di Universitas Berlin di bawah bimbingan Weierstrass dari tahun 1863 sampai tahun 1869. Kemudian ia mengajar di Universitas Halle dari tahun 1869 sampai tahun 1905, dan ia meninggal di rumah sakit jiwa pada tahun 1918.

Pada mulanya Cantor tertarik pada teori bilangan, persamaan tersamar, deret trigonometri. Dengan teori deret trigonometrinya telah memberikan inspirasi untuk melihat dasar-dasar analisis. Ia telah pula memberikan hasil-hasil pemikiran tentang bilangan rasional dengan mempergunakan konvergensi dari bilangan rasional, dan karyanya dalam geometri berbeda secara jelas dengan geometri yang diberikan oleh Dedekind. Tahun 1874, adalah awal dari revolusi karya Cantor tentang teori himpunan dan ketakberhinggaan.

Dalam karyanya yang terakhir, Cantor telah menciptakan sebuah bidang baru tentang hasil penelitian matematikanya. Dalam tulisannya itu, ia telah mengembangkan sebuah teori bilangan transfinit yang didasarkan pada percobaan tentang ketidakberhinggan. Ia telah pula menciptakan sebuah aritmetika yang analogi dengan bilangan transfinit untuk aritmetika dari bilangan yang terhingga.

Cantor adalah orang yang teguh pada ajaran agamanya, dan sebuah karyanya sebagai lanjutan dari pendapatnya mempunyai kaitan dengan paradoks zeno. Karyanya ini membahas sifat-sifat ketidak berhinggaan dan sekaligus sumbangan simpatinya terhadap pendidikan pada abad pertengahan. Pandangannya terhadap ketidak berhinggan sangatlah kontradiksi dengan pandangan yang pernah diberikan oleh Leopard Kronecker (1823-1891) dari Universitas Berlin.

Pada saat sekarang ini, konsep teori himpunan yang diberikan oleh Cantor telah merembes hampir ke setiap cabang matematika, dan telah dibuktikan secara khusus dalam topologi dan dasar-dasar teori fungsi real. Namun demikian telah timbul pula kesulitan secara logika, dan timbul pula pertentangan-pertentangan. Dalam abad ke-20 telah terjadi perbedaan pendapat di antara kelompok formalis yang dipimpin oleh David Hilbert (1826-1943) dengan kelompok instuisi yang dipimpin oleh L.E.J. Brouwer (1881-19). Pertentangan ini adalah kelanjutan dari pertentangan di antara Cantor dengan Kronecker.

Sampai di sinilah tulisan kita ini, dan tentunya kita akhiri dengan pengakuan tentang ketidakpuasan yang sebenarnya dapat dihindarkan bila beberapa dasar dan topik yang menarik tersebut tidaklah diberikan alasan-alasannya. Beberapa topik dalam sejarah perkembangan matematika ini hanyalah sebagai bekal untuk mempelajari matematika lebih lanjut. Sedangkan bagi mereka yang tertarik dapat menjadi suatu dorongan untuk mempelajari cerita lainnya sesudah memperoleh dasar matematika lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Ali Abdulah, Al Daffa. 1998. *Sumbangan Islam terhadap Matematika*: Pustaka. Bandung.

Cook, Cyinthia Conwell.1977. *The Ages of Mathematics*. Volume III Western Mathematics Comes of Age, Charles F. Linn (Editor): Doubleday & Company, Inc.

Eves, Howard. 1993. *An Introduction to The History Of Mathematics:* Plattsburg. New York

Http:// www. Google.com. Mcs.st-kurt godel ac.uk.

Karso. 1988. Sejarah Matematika. UPI. Bandung.

Lethold, Hutaen. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik: edisi ke 5 jilid 1*. Jakarta. Erlangga.

Muir, Jane. 1965. Of Men and Nimbers. Dell Publishing Co. Inc.

Mohaini, Mohammad. 2001. *Matematika Muslim Terkemuka*:Jakarta.Salemba Teknika.

Naga, S. Dali. 1980. *Berhitung Sejarah dan Perkembangannya*: Jakarta. Gramedia.

Ngatolllah, Ibnu. 1980. *Sejarah Matematika Klasik dan Modern.*

Salah Keduri, Haza'a. 2004. *Sejarah matematika klasik dan modern*. UAD press.

Sitorus, J. 1990. *Pengantar Sejarah Matematika dan Pembaharuan Pengajaran Matematika Disekolah*: Tarsito. Bandung.

Syahbana, Ali. 2001. *Sumbangan Islam Kepada Sains dan Peradaban Dunia*: Nuansa. Bandung