

BAB I

PENDAHULUAN

Bagian ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, ruang lingkup penelitian, dan sistematika penulisan untuk membahas pelabelan tak teratur dan pelabelan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan P_m dengan graf lingkaran C_n .

1.1. Latar Belakang Masalah

Graf digunakan dalam teori kombinatorik yang merupakan cabang ilmu matematika mempelajari sifat-sifat kombinatorik, seperti graf bipartit, pasangan atau pemetaan antara dua himpunan digunakan untuk pemodelan dan analisis. Dalam kriptografi, graf juga digunakan dalam sistem enkripsi berbasis graf dan teori kombinatorial dalam analisis keamanan protokol dan dalam pengembangan model kriptograf. Graf dapat diterapkan di banyak disiplin ilmu seperti jaringan telekomunikasi, teknik sipil, biologi, kimia dan sebagainya.

Beberapa konsep dalam teori graf yang mencakup berbagai aspek seperti graf terhubung, pebelan graf, graf berbobot, dan sebagainya. Salah satu penerapannya yakni pada pelabelan graf dan graf berbobot, dimana setiap sisi atau titik dalam graf diberi nilai dan didapat bobot yang terkait dengan titik atau sisi tersebut. Salah satu penggunaan graf berbobot adalah dalam perancangan rute perjalanan, dimana titik dianggap sebagai wilayah dan sisi sebagai jalan yang menghubungkan wilayah-wilayah tersebut. Contohnya, graf dapat digunakan untuk menggambarkan jaringan jalan dan jarak antara dua titik. Dalam graf berbobot pada titik, jarak antara dua wilayah ini diwakili oleh pelabelan pada sisi dan bobot titik merupakan jumlah dari jarak antara wilayah yang satu dengan yang lainnya, sehingga memungkinkan untuk menentukan rute terpendek antara dua wilayah dan melakukan optimasi perjalanan.

Tahun 1736, teori graf diperkenalkan melalui Masalah Jembatan Königsberg (sekarang Kallingrad, Uni Soviet), dimana matematikawan Leonhard Euler mampu memecahkan masalah Jembatan Königsberg dengan memodelkannya sebagai graf.

Masalah yang muncul adalah kemungkinan melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi awal. Euler dapat menyelesaikan masalah ini dengan memisalkan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi. Melalui analisisnya, Euler berhasil membuktikan bahwa tidak mungkin menyeberangi setiap jembatan sekaligus dan kembali ke titik awal. Pemecahan masalah jembatan Königsberg akhirnya menjadi sejarah lahirnya teori graf.

Penelitian teori graf mengalami perkembangan, salah satunya perkembangan mengenai pelabelan. Pada survei yang membahas pelabelan graf berjudul “*A Dynamic Survey of Graph Labeling*” oleh Gallian [1] menjelaskan bagaimana perkembangan konsep-konsep pada pelabelan graf, serta memberikan pandangan tentang bagaimana pelabelan digunakan dalam penelitian dan aplikasi saat ini. Graf secara umum merupakan objek dari kajian pelabelan yang diwakili oleh titik dan sisi dipetakan pada himpunan bilangan yang disebut label. Terdapat berbagai jenis pelabelan salah satunya adalah pelabelan tak teratur. Pada makalah [2] Sugeng dkk, memperkenalkan suatu pelabelan sisi $\psi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, untuk suatu bilangan bulat k disebut pelabelan- k tak teratur di G jika setiap dua titik yang berbeda x dan y di $V(G)$ memenuhi $w_\psi(x) \neq w_\psi(y)$ dimana $w_\psi(x) = \sum_{xz \in E(G)} \psi(xz)$.

Nilai k terkecil sehingga G memiliki pelabelan- k tak teratur dengan label terbesar k disebut nilai ketakteraturan, dinotasikan dengan $s(G)$ [3]. Kemudian nilai ketakteraturan dikembangkan pada berbagai jenis graf, pada [4] membuktikan nilai ketakteraturan pada graf lintasan dengan orde n maka $s(P_n) = \frac{n}{2}$ jika $n \equiv 0 \pmod{4}$, $s(P_n) = \frac{n+1}{2}$ jika $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$, dan $s(P_n) = \frac{n+2}{2}$ jika $n \equiv 2 \pmod{4}$. Kemudian [5] menunjukkan nilai ketakteraturan pada graf lingkaran dengan orde n adalah $s(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ jika $n \equiv 1 \pmod{4}$ dan $s(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ untuk n lainnya. Juga beberapa penelitian lainnya yang membahas nilai ketakteraturan pada jenis graf yang berbeda.

Pada penelitian [3] Bača Martin dkk, memperoleh sebuah perkembangan dari nilai ketakteraturan, yang didefinisikan dengan sebuah pelabelan- k sisi $\psi: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k tak teratur modular dari graf G jika terdapat fungsi bijeksi $\sigma: V(G) \rightarrow Z_n$ dengan orde $n > 2$ yang didefinisikan oleh

$$\sigma(x) = \sum \psi(xy) \pmod{n},$$

dengan $\sigma(x)$ disebut bobot modular dari titik x , dimana Z_n adalah himpunan bilangan bulat modulo n .

Kemudian pada penelitian yang sama [3] mendefinisikan nilai ketakteraturan modular dari graf G dinotasikan dengan $ms(G)$ adalah bilangan positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan- k tak teratur modular. Jika tidak terdapat nilai k sehingga tidak memiliki pelabelan- k tak teratur modular dari G , maka didefinisikan $ms(G) = \infty$. Dengan memperoleh nilai ketakteraturan modular pada 5 keluarga graf, yaitu nilai ketakteraturan modular pada graf lintasan dengan orde $n \geq 3$ maka $ms(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jika $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ dan $ms(P_n) = \infty$ jika $n \equiv 2 \pmod{4}$. Nilai ketakteraturan modular pada graf lingkaran dengan orde $n \geq 3$ maka $ms(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ jika $n \equiv 1 \pmod{4}$, $ms(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ jika $n \equiv 0,3 \pmod{4}$, dan $ms(C_n) = \infty$ jika $n \equiv 2 \pmod{4}$. Kemudian pada graf bintang dengan orde $n + 1$, $n \geq 2$ memperoleh nilai ketakteraturan modular $ms(K_{1,n}) = n$ jika $n \equiv 0,2 \pmod{4}$, $ms(K_{1,n}) = n + 1$ jika $n \equiv 3 \pmod{4}$, dan $ms(K_{1,n}) = \infty$ jika $n \equiv 1 \pmod{4}$. Juga nilai ketakteraturan modular pada keluarga graf triangular $ms(T_n)$ dan graf gear $ms(G_n)$.

Graf memiliki perkembangan struktural dengan salah satu inovasi yang disebut hasil kali *comb*, istilah ini didefinisikan dalam penelitian [6] sebagai operasi *comb* antara graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \triangleright H$. Graf ini dihasilkan dengan mengambil satu salinan dari G dan $|V(G)|$ salinan dari H , kemudian menghubungkan titik u dari setiap salinan graf H ke- i pada titik ke- i dari salinan graf G . Dalam konteks ini, G dan H adalah graf terhubung dan u merupakan titik di graf H .

Pada penelitian ini, penulis melakukan perkembangan dari paper [3] “*Modular irregularity strength of graphs*”, yang disusun oleh Martin Bača, K. Muthugurupackiam, KM. Kathiresan, S. Ramya dipublikasikan tahun 2020 mengenai nilai ketakteraturan modular dari 5 keluarga graf umum. Namun penulis menggunakan graf dengan struktur yang berbeda dengan penelitian sebelumnya,

sehingga penelitian ini diberi judul “Pelabelan Tak Teratur dan Tak Teratur Modular pada Graf Hasil Kali *Comb* antara Graf Lintasan P_2 dengan Graf Lingkaran C_n ”.

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi pelabelan tak teratur pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n ?
2. Berapa nilai ketakteraturan pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n ?
3. Bagaimana konstruksi pelabelan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n ?
4. Berapa nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n ?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pelabelan yang dikaji adalah pelabelan tak teratur dan tak teratur dan tak teratur modular pada suatu graf.
2. Graf yang menjadi objek penelitian adalah graf dengan struktur operasi kali *comb* yakni graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n .

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang masalah dan rumusan masalah, terdapat tujuan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Mengkonstruksi pelabelan tak teratur pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n .
2. Menentukan nilai ketakteraturan pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n .

3. Mengkonstruksi pelabelan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n .
4. Menentukan nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara lintasan P_2 dengan graf lingkaran C_n .

1.5. Metode Penelitian

Pada tahap studi literatur dilakukan identifikasi masalah berupa pendekatan teoritis dengan mengumpulkan, memahami, serta mengkaji teori-teori yang berkaitan dengan pelabelan tak teratur, pelabelan tak teratur modular, dan graf hasil kali *comb* yang di dapat dari sumber pustaka berupa buku maupun jurnal.

Pada tahap penelitian, penulis melakukan proses analisis serta pembuktian lema dan teorema pada penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan pelabelan tak teratur dan tak teratur modular. Kemudian dengan didasari oleh lema dan teorema tersebut, penelitian ini dimulai dengan membuat suatu konstruksi pelabelan sisi yang berpola dengan bobot titik yang berbeda untuk setiap titik pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan dengan graf lingkaran, serta label yang diperoleh dari konstruksi tersebut merupakan label yang seminimal mungkin. Dari hasil pola pelabelan tersebut didapatlah rumus pelabelan untuk setiap sisi dengan berbagai kasus yang sudah ditentukan, dan dari hasil rumus pelabelan sisi tersebut diperoleh juga rumus untuk mencari bobot titiknya, serta bobot titik yang diperoleh berbeda untuk setiap titik maka dapat dikatakan sebagai pelabelan tak teratur. Karena penelitian ini mencari pelabelan tak teratur yang seminimal mungkin sehingga didapat nilai ketakteraturannya, diperoleh juga teorema baru mengenai nilai ketakteraturan pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan dengan graf lingkaran. Dari hasil teorema pelabelan tak teratur pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan dengan graf lingkaran maka berdasarkan lema dan teorema yang sudah ada diperoleh juga pelabelan tak teratur modularnya, serta diperoleh teorema baru mengenai nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara graf lintasan dengan graf lingkaran.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam menyusun skripsi ini adalah sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, ruang lingkup penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan teori-teori yang mendasari pembahasan dalam penelitian yang dikaji secara garis besar.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini berisikan permasalahan utama dari penelitian ini, yang meliputi pelabelan tak teratur, nilai ketakteraturan, pelabelan tak teratur modular, dan nilai ketakteraturan modular pada graf $P_m \triangleright C_n$ dengan kasus pada struktur graf $P_2 \triangleright C_n$ beserta contoh kasus pada graf tersebut.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari pembahasan yang telah dikaji. Selain itu juga diberikan saran untuk pengembangan lebih lanjut dan lebih mendalam dari pembahasan tersebut.