

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu topik dalam matematika dengan banyak aplikasi atau penerapannya adalah teori graf. Teori graf adalah salah satu kajian dalam bidang studi matematika dan ilmu komputer yang mempelajari karakteristik graf. Graf dapat mewakili berbagai macam struktur juga dapat digunakan untuk mengatasi berbagai macam permasalahan. Suatu persoalan dapat disajikan dengan lebih sederhana dengan menyajikannya kedalam bentuk graf.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali dijumpai hal-hal yang dapat digambarkan sebagai pemisalan dari sebuah graf. Contoh sederhananya adalah dalam sebuah hubungan antara satu dengan yang lainnya, terdapat komunikasi yang menjadi penghubung diantara keduanya. Apabila contoh tersebut digambarkan dalam sebuah graf maka orang-orang yang menjalin hubungan tersebut dapat dimisalkan sebagai titik dan komunikasi antara keduanya dapat dimisalkan sebagai garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Secara definisi sederhana, Graf dapat dianalogikan sebagai kumpulan objek yang disebut simpul (titik) yang dihubungkan oleh tepi (sisi). Cara sederhana untuk mendefinisikan graf adalah dengan menyatakannya sebagai kumpulan titik (mewakili simpul) yang dihubungkan oleh garis (mewakili tepi). Struktur pada graf dapat dikembangkan dengan memberikan bobot pada himpunan titik ataupun sisi dalam graf tersebut. Banyak konsep/ide yang dapat diwakili menggunakan graf berbobot. Jika graf menggambarkan jaringan jalan, maka bobotnya dapat dianalogikan sebagai panjang jalan atau kecepatan maksimal perjalanannya.

Pada tahun 1736, sejarah mencatat bahwa Leonhard Euler yang merupakan seorang ilmuwan matematika dari Swiss pertama kalinya memperkenalkan sekaligus menyelesaikan sebuah masalah dengan menggunakan teori graf. Masalah yang dikenal sebagai persoalan jembatan Königsberg ini merupakan permasalahan pertama yang diselesaikan dengan bantuan graf. Pada saat itu, tepatnya dikota Königsberg,

terdapat sebuah sungai yang bercabang menjadi dua buah anak sungai dan membelah daratan. Terdapat tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan terpisah tersebut, dan yang menjadi permasalahan pada saat itu adalah apakah mungkin seseorang bisa melewati setiap jembatan tersebut tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Euleur kemudian dapat memecahkan persoalan tersebut dengan pembuktian sederhana dan memodelkannya ke dalam graf. Jawaban dari persoalan tersebut berdasarkan pembuktian sederhana dari Euleur adalah bahwa jika derajat setiap titik tidak persis sama dan derajat dari titik tersebut tidak seluruhnya genap, maka tidak mungkin seseorang melewati ketujuh jembatan tepat satu kali sebelum kembali ke lokasi awalnya [5].

Salah satu bidang penelitian teori graf yang terus dikaji dan dieksplorasi adalah pelabelan graf. Masalah pelabelan graf dipandang sebagai salah satu hal yang menarik untuk dianalisa lebih lanjut, karena model yang termasuk dalam pelabelan graf dapat diolah kemudian diterapkan dan akan berguna pada pengaplikasian yang sangat luas. Suatu graf pada umumnya yang direpresentasikan oleh titik dan sisi dengan subhimpunan bilangan asli berlabel merupakan subjek penelitian dalam pelabelan graf. Sadlak (1964), Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970), kemudian Stewart (1966), adalah ilmuan-ilmuan pertama yang memperkenalkan pelabelan graf. Secara khusus, bidang sistem komunikasi dan transportasi, penyimpanan data komputer, radar, navigasi geografis, dan desain sirkuit terpadu dari komponen listrik semuanya sangat diuntungkan dengan diterapkannya teori pelabelan graf pada bidang-bidang tersebut hingga saat ini [1]. Selain itu, pelabelan graf juga dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah jaringan komputasi dan pembangkitan kunci dalam kriptografi [2].

Pemetaan atau fungsi yang disebut pelabelan pada graf mengubah komponen graf menjadi himpunan bilangan bulat. Label dengan domain dalam bentuk himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing disebut sebagai pelabelan titik dan pelabelan sisi, sedangkan pelabelan total adalah istilah yang digunakan ketika domain pemetaannya merupakan gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi [12].

Banyaknya jenis pelabelan yang telah ditemukan dan dikembangkan hingga saat ini seperti pelabelan harmonis, pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib, pelabelan anti-ajaib, dan pelabelan tak teratur, menunjukkan bahwa penelitian pelabelan graf banyak diminati oleh para ilmuwan di bidang matematika [2].

Pelabelan tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Charthand pada tahun 1986 dan didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan setiap elemen dalam himpunan sisi suatu graf ke himpunan  $\{1, 2, \dots, k\}$  yang menghasilkan bobot setiap titik berbeda [4]. Pelabelan tak teratur modular merupakan salah satu jenis/bagian dari pelabelan tak teratur. Dalam menentukan pelabelan tak teratur modular pelabelan yang digunakan adalah pelabelan sisi, dan bobot yang dicari adalah bobot titik. Terdapat beberapa penelitian yang mengkaji tentang pelabelan tak teratur modular, diantaranya pada tahun 2021, KA Sugeng, ZZ Barack, N Hinding, dan R Simanjuntak, membahas mengenai pelabelan tak teratur modular pada graf bintang ganda dan graf persahabatan yang ditulis dalam makalah berjudul “*Modular Irregular Labeling on Double-star and Friendship Graphs*”. Kemudian, pada tahun 2022, R Selvaraj dan S Vidyanandini juga membahas pelabelan tak teratur modular yang ditulis dalam makalah berjudul “*Modular Irregular Labeling on Complete Graphs and Complete Bipartite Graph*”, dan pada tahun 2023, Dermawan Lase, Nurdin Hinding, dan Amir Kamal menulis makalah yang membahas tentang pelabelan tak teratur modular berjudul “*Modular Irregular Labeling on Firecrackers Graphs*”.

Selain itu, terdapat pula penelitian dalam makalah berjudul “*Modular Edge Irregularity Strength of Graphs*” yang ditulis oleh Ali NA Koam, Ali Ahmad, Martin Baça, dan Andrea SF, yang dipublikasikan pada tahun 2023. Dalam makalah ini juga dibahas mengenai nilai ketakteraturan modular, yang lebih tepatnya adalah nilai ketakteraturan modular sisi pada graf ulat, graf lingkaran, graf persahabatan, dan graf matahari. Namun, berbeda dengan tiga makalah sebelumnya, dalam makalah ini, pelabelan yang diberikan adalah pelabelan titik, kemudian bobot yang dicari adalah bobot sisi, dan nilai ketakteraturan modular yang ditentukan adalah nilai ketakteraturan modular sisi, dimana dilakukan pelabelan sedemikian rupa sehingga menghasilkan bobot setiap sisi itu berbeda.

Pada penelitian terdahulu, sudah cukup banyak ilmuwan yang mengkaji pelabelan tak teratur, namun masih sedikit penelitian yang membahas terkait pelabelan tak teratur modular, dan belum ada penelitian yang mengkaji pelabelan tak teratur dan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tugas akhir skripsi dengan mengangkat judul “Pelabelan Tak Teratur dan Tak Teratur Modular pada Graf Hasil Kali *Comb* Antara Dua Graf Lintasan serta Graf Ulat dengan Graf intasan”, sehingga tujuan dari pengkajian topik ini bisa tercapai yaitu secara khusus untuk mengetahui bagaimana pelabelan tak teratur dan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan, dan lebih jauh secara umum untuk mengembangkan lagi kajian-kajian dengan topik pelabelan tak teratur.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan judul dan latar belakang skripsi, maka dirumuskan masalah yang akan diteliti dalam skripsi ini yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan?
2. Bagaimana menentukan pelabelan tak teratur pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan?
3. Bagaimana menentukan nilai ketakteraturan pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan?
4. Bagaimana menentukan pelabelan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan?
5. Bagaimana menentukan nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan?

## **1.3 Batasan Masalah**

Dalam skripsi ini, terdapat hal-hal yang menjadi batasan dalam penelitian yaitu sebagai berikut:

1. Jenis graf yang digunakan adalah graf lintasan dan graf ulat

2. Operasi yang digunakan pada graf adalah operasi kali *comb*
3. Pelabelan yang dikonstruksi adalah pelabelan tak teratur

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan juga rumusan masalah dalam skripsi, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menggambarkan graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan
2. Mengkonstruksi pelabelan tak teratur pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan dengan label terbesar yang paling minimum
3. Menentukan nilai ketakteraturan pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan
4. Mengkonstruksi pelabelan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan dengan label terbesar yang paling minimum
5. Menentukan nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan

#### 1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut:

##### 1. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi masalah berupa pendekatan teoritis melalui studi literatur dan pemahaman mendalam terkait pelabelan tak teratur dan tak teratur modular, dengan mencari dan mengumpulkan referensi yang mendukung dalam pengkajian penelitian baik dari jurnal, buku, media online, dan sumber referensi lainnya.

##### 2. Analisis

Pada tahap ini dilakukan analisis serta pembuktian teorema yang sudah dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya terkait dengan topik pelabelan tak teratur dan tak teratur modular. Kemudian, dengan mengacu

pada teorema yang sudah ada, mulai dirumuskan dan dibentuk pola serta teorema baru untuk kasus penelitian yang sedang dikaji pada skripsi yaitu teorema untuk kasus pelabelan tak teratur dan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan, yang diawali dengan menggambarkan graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan, kemudian mengkonstruksi pelabelan tak teratur dan pelabelan tak teratur modular pada graf tersebut dengan label terbesar yang paling minimum sehingga diperoleh nilai ketakteraturan serta nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan. Selanjutnya, dirumuskan teorema untuk nilai ketakteraturan serta nilai ketakteraturan modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan.

### 3. Pembuktian teorema dan contoh kasus

Pada tahap ini dilakukan pembuktian teorema yang sudah dirumuskan sebelumnya. Kemudian, teorema yang sudah dirumuskan dan dianalisa sebelumnya diterapkan untuk beberapa contoh kasus pelabelan tak teratur dan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan, yaitu untuk kasus  $(P_2 \triangleright P_n)$ ,  $(P_m \triangleright P_2)$ , dan  $(Cp_{1,m}) \triangleright P_2$ . Uji penerapan teorema pada beberapa contoh kasus dilakukan untuk menunjukkan bahwa pola atau teorema yang sudah dirumuskan tersebut berlaku untuk sembarang nilai  $m$  dan  $n$  pada graf yang dikaji dengan berdasarkan pada ketentuan dalam teorema.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari empat bab yang didalamnya terdapat beberapa sub bab. Adapun sistematika penulisan pada skripsi ini adalah sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.



## BAB II LANDASAN TEORI

Bab landasan teori berisi penjelasan tentang teori-teori yang relevan dan mendasari pembahasan terhadap masalah yang dikaji dalam skripsi yang diambil dari referensi pada buku, artikel, dan penelitian terdahulu. Secara garis besar, bab ini berisikan informasi yang berkaitan dengan pelabelan tak teratur dan tak teratur modular.

## BAB III PEMBAHASAN

Bab ini merupakan pembahasan utama dalam skripsi, yaitu membahas tentang pelabelan tak teratur dan tak teratur modular pada graf hasil kali *comb* antara dua graf lintasan serta graf ulat dengan graf lintasan, yang disertai dengan teorema-teorema pendukung serta bukti dari teorema tersebut dan beberapa contoh kasus.

## BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

Bagian kesimpulan pada bab ini berisi hal-hal yang dapat disimpulkan dari hasil pembahasan yang dikaji pada bab utama. Kemudian dilanjutkan dengan saran untuk pengembangan penelitian lanjutan, serta rekomendasi agar hasil penelitian dapat menjadi pedoman bagi perkembangan penelitian selanjutnya.

## DAFTAR PUSTAKA